COMPITO di ANALISI MATEMATICA 26/08/2024

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^3 - i\,z = 0$.

Avendosi $z^3 - i\,z = z\left(z^2 - i\right) = 0$ abbiamo la soluzione $z = 0$ e la $z^2 = i$ ovvero le due soluzioni che provengono da $z = \sqrt{i}$. Essendo $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$ otteniamo:
$\sqrt{z} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}\right); 0 \leq k \leq 1$.
Per $k = 0$: $\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
per $k = 1$: $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Quindi le tre soluzioni sono $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta\,|\,\text{sen}\,\vartheta|}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2 \cos^2\vartheta\,|\,\text{sen}\,\vartheta| = 0\,;$$
la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho^2 \cos^2\vartheta\,|\,\text{sen}\,\vartheta|\right| \leq \varrho^2 < \varepsilon$. La funzione è quindi continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2|0|}{\sqrt{h^2+0^2}} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{|h|h} = 0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0^2|h|}{\sqrt{0^2+h^2}} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{|h|h} = 0\,.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = 0\,.$$
Passando a coordinate polari otteniamo:
$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta\,|\,\text{sen}\,\vartheta|}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho \cos^2\vartheta\,|\,\text{sen}\,\vartheta| = 0\,;$$
la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho \cos^2\vartheta\,|\,\text{sen}\,\vartheta|\right| \leq \varrho < \varepsilon$. La funzione è quindi differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = 2xy - e^{x-y} - 2y - x + 2 = 0$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (1,1)$ che la soddisfa, verificare che è possibile con essa definire una funzione implicita $y = y(x)$ e vedere poi se sia possibile determinare la natura del punto stazionario che essa presenta in $x=1$, calcolando $y'(1)$ e $y''(1)$.

Essendo $\nabla f(x,y) = (2y - e^{x-y} - 1; 2x + e^{x-y} - 2)$ da cui $\nabla f(1,1) = (0;1)$.
Essendo $f'_y = 1 \neq 0$, esiste una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno di $x = 1$.
Per essa avremo $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{0}{-1} = 0$. Quindi in $x=1$ c'è un punto stazionario.
Sarà poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} -e^{x-y} & 2+e^{x-y} \\ 2+e^{x-y} & -e^{x-y} \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$.
Dalla $y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha $y''(1) = -\dfrac{-1 + 2\cdot 3\cdot 0 + (-1)\cdot 0^2}{1} = 1$.
Dato che $y'(1) = 0$ e $y''(1) = 1 > 0$, in $x = 1$ abbiamo un punto di minimo relativo.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3$, e dati u versore di $(1,1)$ e v versore di $(1,-1)$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulta $\mathcal{D}_u f(x,y) = 3\sqrt{2}$ e $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$.

Essendo un polinomio la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi avremo:
$\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot v$. Risulta $\nabla f(x,y) = \left(3x^2; 3y^2\right)$ e quindi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x,y) = (3x^2;3y^2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2} \\ \mathcal{D}_v f(x,y) = (3x^2;3y^2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 6 \\ 3x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 = 6 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

e quindi le quattro soluzioni $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ e $(-1,-1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y \\ \text{s.v. } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (cerchio) che è un insieme compatto, il vincolo è qualificato, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 \neq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$ e quindi il sistema non ammette soluzioni.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\,(1-\lambda) = 0 \\ 2\lambda y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ oppure}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Il punto $(0,1)$ con $\lambda = \frac{1}{2} > 0$ potrebbe essere un punto di massimo;
il punto $(0,-1)$ con $\lambda = -\frac{1}{2} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo;
il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con $\lambda = 1 > 0$ potrebbe essere un punto di massimo;
il punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con $\lambda = 1 > 0$ potrebbe essere un punto di massimo.
Essendoci un solo candidato a minimo, il punto $(0,-1)$ è il punto di minimo.
Per gli altri punti, facciamo l'analisi sulla frontire della regione ammissibile, esprimendo i punti della circonferenza in coordinate polari: $\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$.
Da $x^2 + y^2 = 1$ otteniamo $\varrho = 1$ per cui $\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$ e quindi, da $f(x,y) = x^2 + y$ otteniamo $F(1,\vartheta) = F(\vartheta) = \cos^2\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta$ e da questa:
$F'(\vartheta) = 2\cos\vartheta\,(-\mathrm{sen}\,\vartheta) + \cos\vartheta = \cos\vartheta\,(1 - 2\,\mathrm{sen}\,\vartheta) > 0$.
Risulta $\cos\vartheta > 0$ per $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3\pi}{2} < \vartheta < 2\pi$;
risulta $1 - 2\,\mathrm{sen}\,\vartheta > 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\vartheta < \frac{1}{2}$ per $0 < \vartheta < \frac{\pi}{6}$ e per $\frac{5\pi}{6} < \vartheta < 2\pi$.

0 – $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ – $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ – $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$ – π – $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ – 2π
++	+++	− − −	− − − − − − −	+++++
++	− −	− − −	+++++++	+++++
↗	↘	↗	↘	↗

Per $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ otteniamo il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, che relativamente alla frontiera risulterebbe di massimo, concordemente con l'indicazione del moltiplicatore e quindi è punto di massimo;
per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ otteniamo il punto $(0,1)$, $f(0,1) = 1$, che relativamente alla frontiera risulterebbe di minimo, contrariamente con l'indicazione del moltiplicatore e quindi non è nè un punto di massimo nè un punto di minimo;
per $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$ otteniamo il punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, che relativamente alla frontiera risulterebbe di massimo, concordemente con l'indicazione del moltiplicatore e quindi è punto di massimo;

per $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ otteniamo il punto $(0,\,-1)$, $f(0,\,-1) = -1$, che relativamente alla frontiera risulterebbe di minimo, concordemente con l'indicazione del moltiplicatore e quindi è punto di minimo.

II M 2) Data la funzione $f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 - 2y + z^2$, si determini la natura dei suoi punti stazionari.

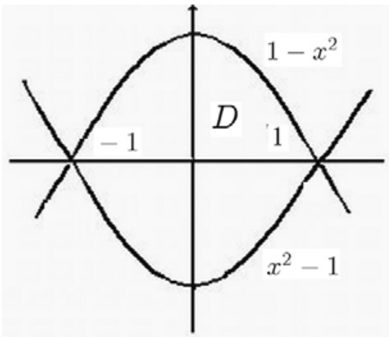
Applicando le condizioni del I ordine, $\nabla f(x,y) = \mathbb{O}$, otteniamo:
$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ f'_y = 2y - 2 = 0 \\ f'_z = 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$
Abbiamo due punti stazionari: $P_1 : (1,1,0)$ e $P_2 : (-1,1,0)$.
Per applicare le condizioni del II ordine, formiamo la matrice Hessiana:
$\mathbb{H}(x,y,z) = \begin{Vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. Avremo quindi:
$\mathbb{H}(1,1,0) = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 12 > 0 \\ |\mathbb{H}| = 24 > 0 \end{cases}$ e quindi $P_1 : (1,1,0)$ è un punto di minimo;
$\mathbb{H}(-1,1,0) = \begin{Vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$ ed essendoci due minori di guida del I ordine con segno diverso, $P_2 : (-1,1,0)$ è un punto di sella.
O anche, essendo $|\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$, $P_2 : (-1,1,0)$ è un punto di sella.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - y + t \\ y' = y + 2t \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x + y = t \\ y' - y = 2t \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale:
$$\begin{Vmatrix} D-1 & 1 \\ 0 & D-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t \\ 2t \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 2t & D-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$
$\Rightarrow (D-1)^2(x) = (D-1)(t) - 2t \Rightarrow x'' - 2x' + x = 1 - t - 2t = 1 - 3t$.
Da $(D-1)^2(x) = 0$ abbiamo la soluzione doppia $\lambda = 1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1\,e^t + c_2\,t\,e^t$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $x'' - 2x' + x = 1 - 3t$ ipotizziamo una soluzione del tipo $x_0(t) = at + b \Rightarrow x'_0(t) = a \Rightarrow x''_0(t) = 0$ e sostituendo nell'equazione $x'' - 2x' + x = 1 - 3t$ avremo $0 - 2a + at + b = at + (b - 2a) = 1 - 3t$ da cui si ha $\begin{cases} a = -3 \\ b - 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 + 2a = -5 \end{cases}$ e quindi avremo per soluzione della non omogenea la $x(t) = c_1\,e^t + c_2\,t\,e^t - 3t - 5$.
Dalla prima equazione $x' - x + y = t$ ricaviamo $y = -x' + x + t$ e quindi:
$y(t) = -c_1\,e^t - c_2\,e^t - c_2\,t\,e^t - 3 + c_1\,e^t + c_2\,t\,e^t - 3t - 5 + t$ ed infine:
$y(t) = -c_2\,e^t - 2t - 8$ e quindi la soluzione generale del sistema sarà:
$$\begin{cases} x(t) = c_1\,e^t + c_2\,t\,e^t - 3t - 5 \\ y(t) = -c_2\,e^t - 2t - 8 \end{cases}.$$

II M 4) Data $f(x,y) = x + 2y$ e data la regione $D = \{(x,y) : x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



$D = \{(x,y) : x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$ avremo:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2} x + 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(xy + y^2\right|_{x^2-1}^{1-x^2} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^2\right) - \left(x\left(x^2-1\right) + \left(x^2-1\right)^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^2 - x\left(x^2-1\right) - \left(x^2-1\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^2 + x\left(1-x^2\right) - \left(1-x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2x\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x - 2x^3\,\mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right|_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0\,.$$