COMPITO di MATEMATICA GENERALE 26/08/2024

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

C.E.: $x \neq 0$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x \to -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$;

$\lim_{x \to 0^-} x^2 + \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$.

C'è un asintoto verticale in $x = 0$. Non ci sono asintoti obliqui.

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases}$:

	-1	0
$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
$- - -$	$- - -$	$+ + +$
$(+)$	$(-)$	$(+)$

quindi $f(x) > 0$ per $x < -1$ e per $x > 0$ mentre $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$.

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2} > 0 \Rightarrow 2x^3 > 1 \Rightarrow x^3 > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

quindi la funzione è decrescente per $x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, crescente per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Quindi in $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ abbiamo un punto di minimo.

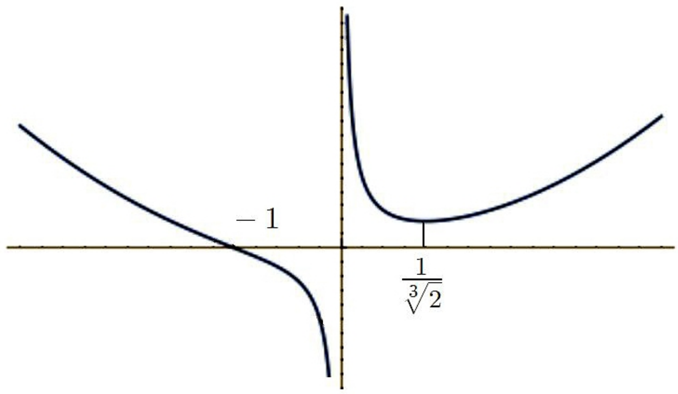
Da $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ segue $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = 2\,\frac{x^3+1}{x^3} > 0$ e quindi

$\frac{x^3+1}{x^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases}$

e quindi $f''(x) > 0$ quando $f(x) > 0$, per cui la funzione è convessa per $x < -1$ e per $x > 0$ mentre la funzione è concava per $-1 < x < 0$.

Nel punto $x = -1$ con $f(-1) = 0$ abbiamo un punto di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+x}{1+x^2}\right)^{1-x}$.

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}\cdot\dfrac{x}{2^x-1}=\log 3\cdot\dfrac{1}{\log 2}=\log_2 e\cdot\log 3=\log_2 3\,.$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x^2}\right)^{1-x}=(\to 0^+)^{(\to-\infty)}=(\to\ +\infty)^{(\to+\infty)}=\ +\infty\,.$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}kx}=4\,.$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}kx}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{kx}\cdot\dfrac{kx}{\operatorname{sen}kx}=1\cdot\dfrac{3}{k}\cdot 1=\dfrac{3}{k}=4\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}\,.$

4) Date le funzioni $f(x)=3x-k$ e $g(x)=e^x-1$, determinare il valore del parametro k per il quale $f(g(x))=3g(x)+5\,.$

Da $f(x)=3x-k$ e $g(x)=e^x-1$ avremo $f(g(x))=3(e^x-1)-k=3e^x-3-k\,.$
Da $f(g(x))=3g(x)+5$ avremo $3e^x-3-k=3(e^x-1)+5$ dalla quale:
$3e^x-3-k=3e^x-3+5\Rightarrow\ -k=5\Rightarrow k=\ -5\,.$

5) Calcolare $\int_0^1 e^{3x}-e^{-3x}\,\mathrm{d}x\,.$

Determiniamo una primitiva ($k=0$), e avremo:
$\int e^{3x}-e^{-3x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int 3e^{3x}\,\mathrm{d}x+\dfrac{1}{3}\int-3e^{-3x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\,e^{3x}+\dfrac{1}{3}\,e^{-3x}$ e quindi:
$\int_0^1 e^{3x}-e^{-3x}\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{3}\,e^{3x}+\dfrac{1}{3}\,e^{-3x}\right|_0^1=\left[\dfrac{1}{3}\,e^3+\dfrac{1}{3}\,e^{-3}\right]-\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right]=$
$=\dfrac{1}{3}\left(e^3+\frac{1}{e^3}-2\right)$ e quindi $\int_0^1 e^{3x}-e^{-3x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\left(e^3+\frac{1}{e^3}-2\right).$

6) Date le funzioni $f(x)=e^{2x}-1$ e $g(x)=x^2-kx$, determinare il valore del parametro k in modo che le due funzioni abbiano, nel punto $x=1$, rette tangenti al loro grafico tra loro perpendicolari.

L'equazione della retta tangente nel punto $x=1$ è data da $y-f(1)=f'(1)(x-1)\,.$
Per avere rette perpendicolari occorre che le due rette abbiano coefficienti angolari che sono uno l'opposto del reciproco dell'altro: $m_1=\ -\dfrac{1}{m_2}$. Dato che il coefficiente angolare è dato dalla derivata calcolata nel punto, dovrà risultare $f'(1)=\ -\dfrac{1}{g'(1)}$ e quindi, essendo $f'(x)=2e^{2x}\Rightarrow f'(1)=2e^2$ mentre $g'(x)=2x-k\Rightarrow g'(1)=2-k$, dovrà essere:
$f'(1)=\ -\dfrac{1}{g'(1)}\Rightarrow 2e^2=\ -\dfrac{1}{2-k}\Rightarrow 2-k=\ -\dfrac{1}{2e^2}$ per avere infine $k=2+\dfrac{1}{2e^2}\,.$

7) Data la funzione $f(x,y)=x^2-kxy+y^2$, determinare, al variare del parametro k, la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y)=\left(f'_x,f'_y\right)=(2x-ky;2y-kx)$ per cui:

$\begin{cases} 2x - ky = 0 \\ 2y - kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{k}\,x \\ \frac{4}{k}\,x - kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left(\frac{4}{k} - k\right) = 0 \\ y = \frac{2}{k}\,x \end{cases}$ da cui: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Abbiamo un solo punto stazionario: $(0,0)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix}$, avremo:

$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(0,0)| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2(0,0)| = 4 - k^2 \end{cases}$, per cui, se $4 - k^2 > 0$, ovvero se $k^2 < 4 \Rightarrow -2 < k < 2$, il punto $(0,0)$ è un punto di minimo.

Se $4 - k^2 < 0$ ovvero se $k < -2$ oppure $k > 2$, il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

Se fosse $k = 0$ avremo $f(x,y) = x^2 + y^2$ che presenta, banalmente, in $(0,0)$ un punto di minimo.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = k\,\mathbb{X}$.

Sarà $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3-1+0 \\ 7-5+0 \\ 6-6+0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix} = k \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow k = 2$.

9) Date le quattro proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ si costruisca la tavola di verità della proposizione: $[(\mathbb{A}\ e\ \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C}\ o\ \mathbb{B})] \Leftrightarrow \mathbb{D}$ sapendo che la proposizione $\mathbb{A}$ è sempre vera mentre la proposizione $\mathbb{D}$ è sempre falsa.

Poniamo $P_1 : [(\mathbb{A}\ e\ \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C}\ o\ \mathbb{B})]$ ed avremo la seguente tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$	$\mathbb{C}\,o\,\mathbb{B}$	$P_1 : (\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C}\,o\,\mathbb{B})$	$P_1 \Leftrightarrow \mathbb{D}$
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0

Come si vede dall'ulrima colonna, la proposizione $[(\mathbb{A}\ e\ \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C}\ o\ \mathbb{B})] \Leftrightarrow \mathbb{D}$, sotto le ipotesi fatte, risulta sempre falsa.

10) Data la funzione $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$, determinare per quale valore del parametro k la funzione presenta un punto di flesso in $x_0 = 3$.

La funzione è un polinomio, quindi è continua e derivabile almeno due volte in tutto il suo campo di esistenza.

Possiamo prendere un punto di flesso come un punto nel quale la funzione passa da concava a convessa oppure viceversa, (anche se nella versione più generale un punto di flesso è un punto nel quale la retta tangente taglia il grafico della funzione).

Dobbiamo comunque ricercare dove cambia di segno la derivata seconda della funzione.

Da $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ avremo $f'(x) = 3x^2 - 2kx$ e quindi $f''(x) = 6x - 2k$.

Sarà quindi $f''(x) = 6x - 2k > 0$ se $x > \dfrac{2k}{6} = 3$ per $k = 9$.