UNIVERSITÀ DI SIENA 1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di

ANALISI MATEMATICA

Numeri complessi

AA. 2024/25

NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi nascono storicamente dall'esigenza di dare una soluzione a problemi privi di essa in ambito reale. Si inizia con la seguente:
Definizione 1 : Dicesi **unità immaginaria**, denotata con la lettera i, quel numero (non reale) tale che $i^2 = -1$.
Si può arrivare a tale definizione supponendo che vi possano essere numeri per i quali opposto e reciproco coincidono: $-x = \frac{1}{x}$, da cui otteniamo $x^2 = -1$, che, algebricamente risolta, ci fornisce $x = \pm\sqrt{-1}$. Avendo posto, per definizione, $i^2 = -1$, sia i che $-i$ sono le soluzioni di tale equazione, e quindi risulta $\frac{1}{i} = -i$.
Per quanto riguarda le potenze dell'unità immaginaria i avremo:
$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = i \cdot i^2 = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 = i^0$,
ovvero queste si ripetono con periodicità pari a 4. Ciò ne consente un calcolo molto rapido.
Esempio 1 : $i^{725} = i^{181 \cdot 4+1} = \left(i^4\right)^{181} \cdot i^1 = 1^{181} \cdot i = i$.
$i^{-321} = i^{-(80 \cdot 4)-1} = \left(i^4\right)^{-80} \cdot i^{-1} = 1^{-80} \cdot \frac{1}{i} = -i$.

Definizione 2 : I numeri del tipo $k\,i$, con $k \in \mathbb{R}$, vengono detti **numeri immaginari** (puri).
Dai numeri immaginari si passa a definire i numeri complessi:
Definizione 3 : Dicesi **numero complesso** un numero della forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero la somma di un numero reale con un numero immaginario.
Il numero a si dice la **parte reale** del numero complesso $a + bi$, mentre bi è detta la **parte immaginaria**, e b è detto il **coefficiente dell'immaginario**.
Il numero $a + bi$ è detto numero complesso in **forma algebrica**.
Indicato con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, risulta $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; infatti i numeri reali sono un sottoinsieme dei numeri complessi, potendosi porre: $a = a + 0i, \forall\, a \in \mathbb{R}$.
Consideriamo ora la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. E' facile vedere come esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$: ad ogni coppia (a, b) corrisponde uno ed un solo numero complesso in forma algebrica $a + bi$, e viceversa. Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi ed i punti del piano $\mathbb{R}^2$; la parte reale a ha il ruolo dell'ascissa, il coefficiente dell'immaginario b ha il ruolo dell'ordinata.
Un piano cartesiano, ad ogni punto (a, b) del quale viene fatto corrispondere il numero complesso $a + bi$, prende il nome di **piano complesso**. L'asse delle ascisse prende il nome di asse reale, dato che ad esso corrispondono i numeri $a + 0i$, ovvero i numeri che sono reali, mentre quello delle ordinate prende il nome di asse immaginario, dato che ad esso corrispondono i numeri $0 + bi$, ovvero i numeri che sono immaginari. Il numero reale 0 corrisponde alla coppia $(0, 0)$, il numero reale 1 alla coppia $(1, 0)$, l'unità immaginaria i alla coppia $(0, 1)$.

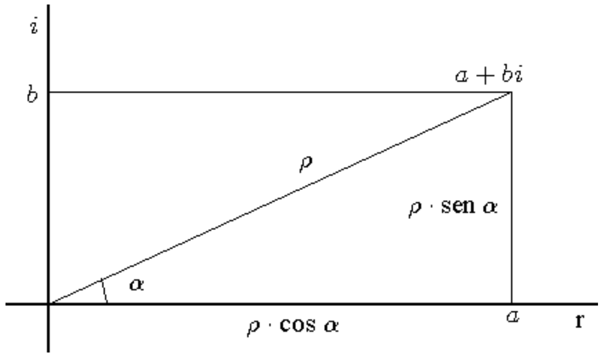
OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

Definizione 4 : Dati due numeri complessi espressi in forma algebrica $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, si definiscono la loro **somma** e la loro **differenza** come:
$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;
$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Ovvero la somma (differenza) di due numeri complessi è un numero complesso avente per parte reale la somma (differenza) delle parti reali e per parte immaginaria la somma (differenza) delle parti immaginarie.
Usando invece la notazione a coppie, se $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, definiamo:
$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$ quale somma, e
$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$ quale differenza dei due numeri complessi.
Si noti l'analogia con la somma e la differenza di vettori in $\mathbb{R}^2$.
Passiamo al **prodotto** di due numeri complessi in forma algebrica. Eseguendo il prodotto mediante le regole del calcolo letterale, e ricordando che $i^2 = -1$, avremo:
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1\, a_2 + a_1\, b_2 i + a_2\, b_1 i + b_1\, b_2\, i^2 =$
$= a_1\, a_2 + a_1\, b_2 i + a_2\, b_1 i - b_1\, b_2 = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2) + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1) i$.
Con la notazione a coppie scriveremo invece:
$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2; a_1\, b_2 + a_2\, b_1)$.
E' facile vedere come gli **elementi neutri** rispetto alla somma ed al prodotto siano ancora 0 e 1, ovvero le coppie $(0, 0)$ e $(1, 0)$.
Passiamo ora al calcolo del reciproco di un numero complesso $z = a + bi$. Per fare questo introduciamo il concetto di coniugato:
Definizione 5 : Dato il numero complesso $a + bi$ si dice suo **coniugato** il numero complesso $a - bi$, ovvero il numero avente la stessa parte reale e l'opposto per coefficiente dell'immaginario.
Il coniugato di z si indica con $\overline{z}$, ed avremo quindi $\overline{z} = a - bi$.
Per calcolare il **reciproco** di z moltiplichiamo e dividiamo per il suo coniugato $\overline{z}$, ed avremo:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i.$$
Nella notazione a coppie avremo: $\dfrac{1}{(a,b)} = (a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}; -\dfrac{b}{a^2+b^2} \right)$.
Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha quindi un unico reciproco. Ricordiamo che $\dfrac{1}{i} = -i$.
Passiamo infine al **quoziente** $\dfrac{z_1}{z_2}$, vedendolo come il prodotto $z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$, ed avremo:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} \cdot \frac{a_2-b_2 i}{a_2-b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + a_2 b_1 i - a_1 b_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2+b_2^2} =$$
$= \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}\, i$. Mediante la notazione a coppie scriveremo:
$$\frac{(a_1,b_1)}{(a_2,b_2)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}; \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} \right).$$

Esempio 2 : $(3 + 2i) - (5 - i) = -2 + 3i$.
$(3 + 2i) \cdot (5 - i) = 15 - 3i + 10i - 2i^2 = 17 + 7i$.
$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{15+3i+10i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i.$$

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI
Dato un numero complesso $z = a + bi \neq 0$, come illustrato in figura, valgono le seguenti uguaglianze: $\begin{cases} a = \rho \cos\alpha \\ b = \rho \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$, dove $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ viene detto **modulo** del numero complesso $z = a + bi$ mentre α, l'angolo formato dal segmento che unisce i punti $(0, 0)$ e (a, b) con il semiasse reale positivo, è detto **argomento** del numero complesso $z = a + bi$.



Avremo allora, sostituendo:
$z = a + bi = \rho \cos\alpha + i\,\rho \operatorname{sen}\alpha = \rho\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)\,,$
che viene detta **forma trigonometrica** del numero complesso.
Notiamo che $|\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = 1\,.$
Si ha poi $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\rho \operatorname{sen}\alpha}{\rho\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, da cui otteniamo, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a},\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\,.$

Notiamo come la rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non sia unica; infatti, se $k \in \mathbb{Z}$, si ha $\rho\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = \rho\,(\cos(\alpha + 2k\pi) + i\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi))\,,$ per la periodicità, a meno di giri interi, delle funzioni seno e coseno.

Esempio 3 : Essendo $|i| = \sqrt{0+1} = 1$, otteniamo : $i = 1 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right).$
Essendo $|-1| = 1$, otteniamo $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)\,.$
Essendo $|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, otteniamo : $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) =$
$= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\operatorname{sen}\dfrac{3}{4}\pi\right)$, quindi per $z = -1 + i$, risulta $\rho = \sqrt{2}$ e $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi\,.$
Essendo $\left|2\sqrt{3} + 2i\right| = \sqrt{12+4} = 4$, otteniamo : $2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right) =$
$= 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$, quindi per $z = 2\sqrt{3} + 2i$, risulta $\rho = 4$ e $\alpha = \dfrac{\pi}{6}\,.$

OPERAZIONI SUI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA
La forma trigonometrica dei numeri complessi non è di particolare utilità per calcolare somma e differenza di numeri complessi, operazioni per le quali è più utile operare in forma algebrica. Diversa è la situazione per quanto riguarda il prodotto, il reciproco, il quoziente, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice.
Siano allora dati due numeri complessi in forma trigonometrica:
$z_1 = \rho_1\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e $z_2 = \rho_2\,(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)\,.$
Eseguendo il prodotto avremo:
$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\,\rho_2\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\ (\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) =$
$= \rho_1\,\rho_2\left(\cos\alpha\cos\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right) =$
$= \rho_1\,\rho_2\,(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + i\,(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)) =$
$= \rho_1\,\rho_2\,(\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta))\,.$ Ovvero:
Teorema 1 : Il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.
Si estende facilmente la regola al prodotto di quanti si vogliano numeri complessi.
Passiamo ora al calcolo del reciproco di un numero complesso $z \neq 0$; avremo:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{1}{\rho}\,\frac{(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\,(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\,\frac{(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)}{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)} = \frac{1}{\rho}\,(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha) = \frac{1}{\rho}\,(\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha))$$. Ovvero:

Teorema 2 : Il reciproco di un numero complesso in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il reciproco del modulo e per argomento l'opposto dell'argomento.
Calcoliamo infine il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica, come prodotto del primo per il reciproco del secondo. Avremo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \rho_1\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \cdot \frac{1}{\rho_2}\,(\cos(-\beta) + i\operatorname{sen}(-\beta)) =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,(\cos(\alpha - \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha - \beta))$$. Ovvero:

Teorema 3 : Il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.
Le formule fin qui ottenute prendono il nome di **formule di De Moivre**.

Esempio 4 : Sapendo che $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, $2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, e $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$, otteniamo:

$$\frac{i}{2\sqrt{3} + 2i} = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\,i\,.$$

$$\frac{1}{-1 + i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\,.$$

POTENZE DI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

Utilizzando quanto visto per il prodotto, calcoliamo la potenza ad esponente naturale di un numero complesso. Se $z = \rho\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e se $n \in \mathbb{N}$, avremo :
$z^n = [\rho\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^n = \rho^n \cdot (\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha)$, dato che il modulo sarà il prodotto di n moduli tutti uguali a ρ, mentre l'argomento è la somma di n argomenti tutti uguali ad α.
Ovvero:

Teorema 4 : La **potenza ad esponente naturale** di un numero complesso in forma trigonometrica ha per modulo la potenza n-esima del modulo e per argomento il multiplo secondo n dell'argomento.

Esempio 5 : Essendo $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$, sarà

$$(-1 + i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(8 \cdot \frac{3}{4}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(8 \cdot \frac{3}{4}\pi\right)\right) = 16\,(\cos 6\pi + i\operatorname{sen} 6\pi) = 16\,.$$

Passiamo alle potenze ad esponente intero $m \in \mathbb{Z}$. Dato che $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, basta definire le potenze ad esponente $m \in \mathbb{Z}_-$. Per far questo poniamo $m = -n, n \in \mathbb{N}$.
Essendo $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n$, basterà applicare la regola trovata per gli esponenti naturali al numero z^{-1}, il reciproco di z. Avremo quindi, se $z = \rho\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$:

$$z^m = z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \left[(\rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha))^{-1}\right]^n = \left[\frac{1}{\rho}\,(\cos(-\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(-\alpha))\right]^n =$$
$$= \frac{1}{\rho^n}\,(\cos(-n\,\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(-n\,\alpha)) = \rho^m\,(\cos m\,\alpha + i\,\mathrm{sen}\,m\,\alpha)\,.$$

Quindi la **potenza ad esponente intero** m, positivo o negativo che sia, si definisce nello stesso modo delle potenze ad esponente naturale: ha per modulo la potenza m-esima del modulo e per argomento il multiplo secondo m dell'argomento.
Si noti come il risultato trovato per il reciproco coincida, ovviamente, con quello che si trova applicando l'elevamento a potenza -1.

Esempio 6 : Essendo $2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, sarà anche:

$$\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^{-12} = 4^{-12}\left(\cos\left(-12\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-12\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4^{12}}\,(\cos(-2\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(-2\pi)) = \frac{1}{4^{12}}\,(1 + i\cdot 0) = \frac{1}{4^{12}}\,.$$

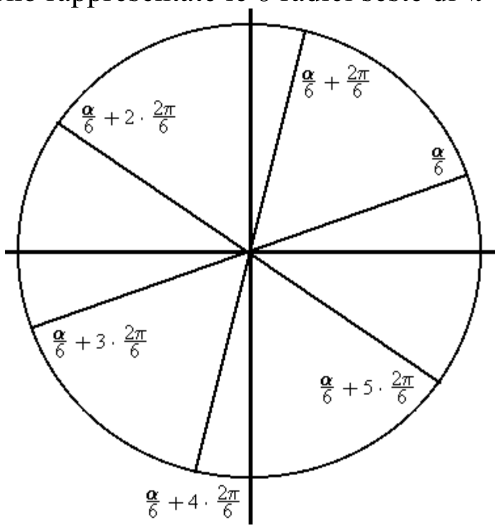
Passiamo alle potenze ad esponente razionale, iniziando dagli esponenti del tipo $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ovvero studiamo il problema dell'estrazione della **radice n-esima** di un numero complesso.
Vogliamo definire $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$, con $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.
Posto $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = w$, con w incognito, sia $w = x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$, con x e y incogniti.
Essendo $z = w^n$, sostituendo otteniamo: $\rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = x^n\,(\cos ny + i\,\mathrm{sen}\,ny)$.
Quest'ultima uguaglianza risulta soddisfatta se:

$$\begin{cases} \rho = x^n \\ \alpha + 2k\pi = ny \end{cases}, \text{ ovvero se } \begin{cases} x = \sqrt[n]{\rho} \\ y = \dfrac{\alpha}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

La prima uguaglianza ha una sola soluzione, la radice n-esima positiva di ρ, mentre la seconda uguaglianza esprime la possibilità che gli argomenti dei due numeri complessi z e w^n diano luogo allo stesso punto del piano complesso pur differendo per multipli interi di un giro.
Il valore $\frac{\alpha}{n}$ rappresenta l'n-esima parte dell'argomento α del radicando z mentre $\frac{2\pi}{n}$ rappresenta un n-esimo di un giro intero.
Per $k = 0$ otteniamo $y = \frac{\alpha}{n}$, per $k = 1$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$ e così via; per $k = n - 1$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + (n-1)\,\frac{2\pi}{n}$, ed infine, per $k = n$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + n\cdot\frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi$, che nel piano complesso ci rappresenta lo stesso punto dato da $y = \frac{\alpha}{n}$. Avendo diviso l'angolo giro in n parti uguali, partendo dalla posizione data da $y = \frac{\alpha}{n}$, dopo aver aggiunto n di queste parti ci ritroviamo nella posizione di partenza. Se diamo allora a k i valori $n+1$, $n+2$ eccetera ritroveremo gli stessi punti trovati in precedenza, e quindi le stesse radici n-esime.
Quindi vale il seguente
Teorema 5 : Le radici n-esime del numero complesso z sono in numero di n e sono date dalla formula generale:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right)\right),\ 0 \le k \le n-1,\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha esattamente n radici n-esime; queste hanno tutte lo stesso modulo, pari a $\sqrt[n]{\rho}$, quindi stanno su di una circonferenza avente centro in $(0,0)$ e raggio pari a $\sqrt[n]{\rho}$. Dato che i loro argomenti differiscono per un angolo pari a $\frac{2\pi}{n}$, le n radici n-esime di z formano i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt[n]{\rho}$; il primo di questi vertici ha per argomento $\frac{\alpha}{n}$.
Nella figura seguente vengono rappresentate le 6 radici seste di $z = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.



Esempio 7 : Calcoliamo $\sqrt[4]{i}$. Essendo $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ avremo:
$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\,\frac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + k\,\frac{2\pi}{4}\right)\right)$, $0 \leq k \leq 3$, da cui si ottengono:
per $k = 0$: $1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$;
per $k = 1$: $1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8}\right)$;
per $k = 2$: $1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = \left(\cos\frac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{8}\right)$;
per $k = 3$: $1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\frac{13\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{8}\right)$.
Dalle formule di bisezione $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ e $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$, essendo:
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, otteniamo :
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, dalle quali infine:
per $k = 0$ si ha: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;
per $k = 1$ si ha: $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
per $k = 2$ si ha: $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

per $k=3$ si ha: $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Esempio 8 : Calcoliamo $\sqrt[n]{1}$. Essendo $1 = 1\cdot(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ avremo:
$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{0}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{0}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$, $0 \le k \le n-1, k \in \mathbb{N}$, ovvero:
$\sqrt[n]{1} = \cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)$, $0 \le k \le n-1$.

Riprendendo l'uguaglianza precedentemente trovata:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$, $0 \le k \le n-1, k \in \mathbb{N}$,
per quanto visto sul prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica, potremo scrivere:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\cdot\sqrt[n]{1}\cdot\left(\cos\dfrac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$,
dove $\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{n}\right)$ rappresenta la prima radice n-esima del numero z, quella che corrisponde a $k=0$, mentre $\left(\cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$, come visto nell'Esempio 8, rappresenta, per $0 \le k \le n-1$, le radici n-esime dell'unità 1. Quindi:
Teorema 6 : Le radici n-esime di un qualunque numero complesso $z \neq 0$ si possono ottenere calcolandone una sola, quella che corrisponde a $k=0$, e moltiplicando poi questa per le n radici n-esime dell'unità 1.

Esempio 9 : Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$ e da questa $\sqrt[4]{i}$. Avremo allora:
$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{4}\right)\right) = \left(\cos\left(k\,\dfrac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $0 \le k \le 3$,
e quindi: per $k=0$ si ha $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$; per $k=1$ si ha $\cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = i$;
per $k=2$ si ha $\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$; per $k=3$ si ha $\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -i$.
Riprendendo la prima radice trovata per $\sqrt[4]{i}$, ovvero, per $k=0$:
$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, moltiplicandola per i, per -1 e per $-i$, ritroviamo le altre radici quarte di i trovate in precedenza. Infatti:
$\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot i = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, quella per $k=1$;
$\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot(-1) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, quella per $k=2$;
$\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot(-i) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, quella per $k=3$.

Esempio 10 : Calcoliamo $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right)^2}$. Essendo $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right| = 1$, risulta:

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i = \cos\left(\frac{11}{6}\,\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{6}\,\pi\right)$, dalla quale otteniamo:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)^2 = \cos\left(\frac{11}{3}\,\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{3}\,\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,.$$

Sarà allora $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i} = \cos\left(\frac{5}{6}\,\pi + k\,\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\,\pi + k\,\frac{2\pi}{2}\right)$, $0 \le k \le 1$:

per $k = 0$ otteniamo: $\cos\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$;

per $k = 1$ otteniamo: $\cos\left(\frac{11}{6}\,\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11}{6}\,\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$.

Come si vede, quindi, non è corretto scrivere $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$.

Esempio 11 : Risolviamo l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$.
Avremo allora $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.
Essendo $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$, otteniamo $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$, e quindi abbiamo due soluzioni, complesse e coniugate, $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ e $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.
Esempio 12 : Risolviamo l'equazione $x^3 + 1 = 0$, che ammette un'unica soluzione reale data da $x = -1$.
Da $x^3 = -1$, otteniamo $x = \sqrt[3]{-1}$, e quindi le tre radici di $z = 1 \cdot (\cos \pi + i\,\text{sen}\,\pi)$:
$\sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $0 \le k \le 2$, ovvero:
per $k = 0$ si ha: $\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$;
per $k = 1$ si ha: $\cos \pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$;
per $k = 2$ si ha: $\cos\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.
Si sono trovate quindi tre soluzioni, in numero pari al grado del polinomio $x^3 + 1$.

Passiamo infine alle **potenze ad esponente razionale**, $z^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$; supponiamo che m e n siano primi tra loro, con $m \neq 1$.
In base alle definizioni precedenti, poniamo $z^{\frac{m}{n}} = (z^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$, ed operiamo di conseguenza. La potenza z^m ci dà un solo risultato, del quale vanno poi calcolate le n radici n-esime.

L'ESPONENZIALE COMPLESSA e^z, $z \in \mathbb{C}$
Preso un numero immaginario puro $z = x\,i$, $x \in \mathbb{R}$, diamo la seguente
Definizione 6 : Si definisce l'esponenziale $e^{x\,i}$ come:

$e^{x\,i} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x\,.$
Vediamo una giustificazione (non certo una dimostrazione !) di tale definizione utilizzando i polinomi di Mac Laurin delle funzioni reali e^x, $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$, anche se, più correttamente, si dovrebbero utilizzare i loro sviluppi in serie di potenze. Sappiamo che risulta:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + ... + \frac{x^n}{n\,!} + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\; x^k + o(x^n)\,.$$

$$\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \frac{x^9}{9\,!} - \;...+ \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}\,x^{2n+1} + o\big(x^{2n+1}\big)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \frac{x^8}{8\,!} \;-\; ... + \frac{(-1)^n}{(2n)\,!}\,x^{2n} + o\big(x^{2n}\big)\,.$$

Sostituendo, in maniera formale in queste espressioni, alla variabile x la variabile $x\,i$, si ha:

$$e^{x\,i} = 1 + (x\,i) + \frac{(x\,i)^2}{2\,!} + \frac{(x\,i)^3}{3\,!} + \frac{(x\,i)^4}{4\,!} + \frac{(x\,i)^5}{5\,!} + \frac{(x\,i)^6}{6\,!} + \frac{(x\,i)^7}{7\,!} + ... \text{ da cui:}$$

$$e^{x\,i} = 1 + x\,i - \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!}\,i + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^5}{5\,!}\,i - \frac{x^6}{6\,!} - \frac{x^7}{7\,!}\,i + ... \text{ ovvero:}$$

$$e^{x\,i} = \left(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + ...\right) \text{ e quindi:}$$

$e^{x\,i} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x\,.$
Preso ora $z \in \mathbb{C}$, $z = x + y\,i$, usando le proprietà delle potenze reali, poniamo:
$e^z = e^{x+y\,i} = e^x \cdot e^{y\,i} = e^x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$
ovvero otteniamo un numero complesso avente per modulo il numero reale positivo e^x e per argomento il coefficiente dell'immaginario y. Si ha infatti : $|\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y| = 1\,.$
Dalla definizione data segue subito, $\forall\; k \in \mathbb{Z}$, che:
$e^{z+2k\pi\,i} = e^{x+y\,i+2k\pi\,i} = e^x \cdot e^{(y+2k\pi)\,i} = e^x\,(\cos\,(y+2k\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(y+2k\pi)) =$
$= e^x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^z$, cioè la funzione complessa $z \to e^z$ è periodica di periodo $2\pi\,i\,.$

Esempio 13 : Calcoliamo e^i. Essendo $e^i = e^{0+1\cdot i}$ otteniamo:
$e^i = e^0\,(\cos 1 + i\,\mathrm{sen}\,1) = \cos 1 + i\,\mathrm{sen}\,1\,.$
Se calcoliamo $e^{2\pi i}$ avremo invece $e^{2\pi i} = e^{0+2\pi i} = e^0\,(\cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi) = 1\,.$

LOGARITMI DI NUMERI COMPLESSI $\log z,\, z \in \mathbb{C}$
Vediamo ora come definire il $\log z,\, z \in \mathbb{C},\, z \neq 0$. Posto $\log z = w$, otteniamo $z = e^w$.
Se poniamo $w = x + y\,i$, con x e y incogniti, e $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, ρ e α valori invece noti, imponiamo che sia: $e^w = e^{x+y\,i} = e^x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, che risulta soddisfatta quando: $\begin{cases} e^x = \rho \\ y = \alpha + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ovvero se $\begin{cases} x\; = \log\rho \\ y = \alpha + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
Notiamo che $\log\rho$ è sempre definito, essendo ρ un modulo e quindi una quantità reale sempre positiva; la seconda uguaglianza dipende dal poter rappresentare un punto del piano complesso in infiniti modi, vista l'identità di rappresentazione a meno di giri interi.
Sostituendo le uguaglianze trovate avremo allora:
$\log z = w = x + y\,i = \log\rho + (\alpha + 2k\pi)\,i,\; k \in \mathbb{Z}\,.$
Con questa uguaglianza si definiscono gli infiniti logaritmi di un numero complesso $z \neq 0$.
Questi hanno tutti la stessa parte reale, $\log\rho$, mentre varia, di 2π in 2π, il coefficiente della loro parte immaginaria. I valori di $\log z$ stanno quindi tutti su una retta perpendicolare all'asse reale, passante per il punto $(\log\rho, \alpha)$.
Il valore corrispondente ad $\alpha = 0$ viene detto **valore principale**.

Esempio 14 : Calcoliamo $\log(-1)$. Essendo $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$, otteniamo:
$\log(-1) = \log 1 + (\pi + 2k\pi)\, i = (2k+1)\,\pi\, i\,,\ k \in \mathbb{Z}$. Da questa ricaviamo anche:
$e^{(2k+1)\pi i} = \cos((2k+1)\,\pi) + i \operatorname{sen}((2k+1)\,\pi) = -1$.
Esempio 15 : Calcoliamo $\log i$. Essendo $i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, avremo:
$\log i = \log 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z}$.
Esempio 16 : Calcoliamo $\log(1+i)$.
Essendo $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, avremo infine:
$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

POTENZE AD ESPONENTE COMPLESSO
Per definire la potenza $w^z, w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}, w \neq 0$, si usa l'uguaglianza, valida per le potenze reali di numeri a positivi: $a^x = e^{x\log a}$.
Definizione 7 : Si pone $w^z = e^{z\log w}$, dove sia l'esponenziale che il logaritmo vanno intesi in ambito complesso.

Esempio 17 : Calcoliamo i^i. Da $i = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ e da $\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$, otteniamo:
$i^i = e^{i\log i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\,,\ k \in \mathbb{Z}$.
La potenza i^i assume allora infiniti valori, che sono comunque tutti reali.
Calcoliamo ora $(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\log(1+i)}$. Essendo $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si è visto (Esempio 16) che $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i$, e quindi, sostituendo, otteniamo:

$$e^{(1-i)\log(1+i)} = e^{(1-i)\left(\log\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) i\right)} = e^{\log\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) i - i\log\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} =$$
$$= e^{\log\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\log\sqrt{2}\right) i} = e^{\log\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\log\sqrt{2}\right) i} =$$
$$= \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log\sqrt{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log\sqrt{2}\right)\right).$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE COMPLESSE
Dalla definizione $e^{x i} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, otteniamo, sostituendo $x\, i$ con $(-x\, i)$, la:
$e^{-x i} = \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x) = \cos x - i \operatorname{sen} x$.
Sommando e sottraendo tra loro le due uguaglianze $\begin{cases} e^{x i} = \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-x i} = \cos x - i \operatorname{sen} x \end{cases}$ otteniamo:

$\begin{cases} e^{x i} + e^{-x i} = 2\cos x \\ e^{x i} - e^{-x i} = 2\, i \operatorname{sen} x \end{cases}$ e da queste: $\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x i} + e^{-x i}}{2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{x i} - e^{-x i}}{2i} \end{cases}$.

Estendendo queste uguaglianze a $z \in \mathbb{C}$, otteniamo la definizione del **seno** e del **coseno** di un numero complesso: $\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{z i} + e^{-z i}}{2} \\ \operatorname{sen} z = \dfrac{e^{z i} - e^{-z i}}{2i} \end{cases}$.

Da queste abbiamo poi anche $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \dfrac{e^{z i} - e^{-z i}}{2i}\,\dfrac{2}{e^{z i} + e^{-z i}} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{e^{z i} - e^{-z i}}{e^{z i} + e^{-z i}}$.