UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

**Dispense per il Corso di**
**ANALISI MATEMATICA**

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

**AA. 2024/25**

# EQUAZIONI E SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Si chiama **equazione differenziale** una equazione del tipo:
$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ ovvero una equazione che coinvolge la variabile indipendente $x$ ed una funzione incognita $y = y(x)$, nonchè le sue derivate fino a quella di un certo ordine $n$. L'ordine della più alta derivata presente si dice **ordine** dell'equazione differenziale. In una equazione del primo ordine compare quindi solo la derivata prima. L'equazione differenziale si dice poi **ordinaria** se la funzione incognita $y(x)$ è funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovvero funzione di una sola variabile. Se la funzione incognita è funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ovvero di più variabili, l'equazione differenziale è detta **alle derivate parziali**. L'equazione differenziale ordinaria si dice in **forma normale** se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine più alto:
$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$.
Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale assume quindi la forma:
$y' = f(x, y)$.
Un **sistema di equazioni differenziali** è costituito mediante un certo numero di equazioni differenziali in altrettante funzioni incognite. Per **soluzione** di una equazione differenziale o di un sistema di equazioni differenziali si intende una funzione (o più funzioni) che sia continua e derivabile, con derivate continue, fino all'ordine che occorre, dalla quale (o dalle quali) risulti soddisfatta l'equazione (o le equazioni del sistema) data. Risolvere una equazione differenziale ha per sinonimo quello di "integrare" l'equazione differenziale.
Per **soluzione (o integrale) generale** di una equazione differenziale si intende una funzione, che vedremo dipendere non solo dalla variabile $x$ ma anche da un numero opportuno di costanti arbitrarie, che rappresenti tutte (o quasi) le soluzioni dell'equazione data. Per **soluzione (o integrale) particolare** di una equazione differenziale si intende una soluzione dell'equazione che soddisfi ad una o più ulteriori condizioni quali, ad esempio, quella di passare per un assegnato punto e di assumere, in esso, valori assegnati per essa e per le sue derivate.

## EQUAZIONI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

Iniziamo con la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale: $y' = f(x, y)$. Si dice **problema di Cauchy** il seguente:
$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ dove, come si vede, alla soluzione $y(x)$ si chiede non solo di soddisfare l'equazione data, ma anche di passare per il punto $(x_0, y_0)$.
Per l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema di questo tipo vale il
**Teorema** 1 : (di Cauchy) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua in $\left]a, b\right[ \times \left]c, d\right[$ e tale che:
$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k\,|y_1 - y_2|$, con $k \in \mathbb{R}_+$, $\forall\, x \in \left]a, b\right[$ e $\forall\, y_1, y_2 \in \left]c, d\right[$.
Allora, $\forall\,(x_0, y_0) \in \left]a, b\right[ \times \left]c, d\right[$ esiste, in un intorno di $x_0$, una ed una sola soluzione $y = y(x)$ del problema $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.
La condizione $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k\,|y_1 - y_2|$ è detta **condizione di Lipschitz**, oppure si dice che la funzione $f(x, y)$ è Lipschitziana rispetto a $y$.
La dimostrazione del Teorema può essere data osservando che la funzione:

$y(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$ è soluzione del problema di Cauchy dato. Si definisce una Successione di funzioni mediante la $\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \end{cases}$, si verifica che tale Successione converge uniformemente ad una funzione $y(x)$ che è la soluzione unica cercata del problema di Cauchy.
Una condizione sufficiente a garantire la validità della condizione di Lipschitz è data dall'essere la funzione $f(x, y)$ dotata di derivata parziale $f'_y(x, y)$ continua, condizione quest'ultima solitamente di più facile verifica che non quella di Lipschitz.
Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni, senza che di queste sia garantita l'unicità, vale il:
**Teorema** 2 : (di Peano) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua in $\left]a, b\right[ \times \left]c, d\right[$.
Allora $\forall\, (x_0, y_0) \in \left]a, b\right[ \times \left]c, d\right[$ esiste almeno una soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Passiamo allora a trattare i metodi risolutivi per alcuni tipi di equazioni del primo ordine.

**EQUAZIONI LINEARI DEL TIPO** $y' + p(x)\, y = q(x)$
Queste equazioni appartengono ad una classe di equazioni, le cosiddette **lineari**, che riprenderemo nel seguito e tratteremo in generale, qualunque sia l'ordine dell'equazione. Per ora trattiamo solo quelle del primo ordine. Supponiamo $p(x)$ e $q(x)$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue in un opportuno intervallo. Se $q(x) = 0$ l'equazione si dice **omogenea**.
Consideriamo anzitutto questo caso: $y' + p(x)\, y = 0$.
Avremo allora $y' = -p(x)\, y \Rightarrow \dfrac{1}{y}\, y' = -p(x)$, posto $y \neq 0$.
Integrando ambedue i termini dell'equazione rispetto ad $x$ otteniamo:
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\, y'\, dx = -\int p(x)\, dx + k$, $k \in \mathbb{R}$ per avere la totalità delle soluzioni.
Ma $\displaystyle\int \frac{1}{y}\, y'\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy = \log|y| = -\int p(x)\, dx + k$ da cui:
$|y| = e^{-\int p(x)\, dx + k} = e^k\, e^{-\int p(x)\, dx} = m\, e^{-\int p(x)\, dx}$, avendo posto $e^k = m$.
Supponendo $m \in \mathbb{R}$ avremo infine:
$y = m\, e^{-\int p(x)\, dx}$ che è la soluzione generale dell'equazione omogenea.
Dato che $y = 0$ è anch'essa soluzione (basta sostituire !), si ha che $y = 0$ è una soluzione particolare, ottenibile dalla soluzione generale per $m = 0$. Si può anche considerarla come ottenuta da $e^k$ per $k \to -\infty$.
Per trovare la soluzione dell'equazione non omogenea $y' + p(x)\, y = q(x)$ supponiamo che la $m$ della soluzione dell'omogenea non sia una costante ma una funzione $m(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e vediamo come debba essere $m(x)$ affinchè una funzione del tipo $y = m(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$ sia soluzione dell'equazione non omogenea. Sostituiamo nell'equazione ed avremo:
$m'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} + m(x)\left(-p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}\right) + p(x)\, m(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = q(x)$.
Eliminando i due termini opposti otteniamo:
$m'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = q(x) \Rightarrow m'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}$.
Integrando infine rispetto ad $x$ si ottiene:

$\int m'(x)\,dx = m(x) = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k\,,\ k \in \mathbb{R}$ e quindi sostituendo:

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k\right)$$

rappresenta la totalità delle soluzioni, ovvero la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea.

Come si è visto, sia la soluzione generale dell'equazione omogenea che quella della non omogenea dipendono da una costante arbitraria, e questo dipende dal fatto che l'equazione differenziale è del primo ordine.

Vediamo alcuni esempi.
**Esempio** 1 : Risolviamo l'equazione $y' = y$ ovvero $y' - y = 0$ che è lineare omogenea.
Da $y' = y$, posto $y \neq 0$ si ha $\frac{1}{y}\,y' = 1$ da cui integrando:

$\int \frac{1}{y}\,y'\,dx = \int 1\,dx + k \Rightarrow \log|y| = x + k$ e quindi:

$|y| = e^{x+k} = m\,e^x$ . Considerando $m \in \mathbb{R}$ avremo infine $y = m\,e^x$ .
La $y = 0$ è una soluzione particolare, ottenuta per $m = 0$ o per $k \to -\infty$ .

**Esempio** 2 : Risolviamo l'equazione lineare non omogenea $y' + \frac{1}{x}\,y = \operatorname{sen} x$ .
Applicando la formula generale per la soluzione:

$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + k\right)$ avremo:

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\left(\int \operatorname{sen} x\,e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx + k\right) = e^{-\log x}\left[\int \operatorname{sen} x\,e^{\log x}\,dx + k\right] =$$

$= \frac{1}{x}\left[\int x \operatorname{sen} x\,dx + k\right] = \frac{1}{x}\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx + k\right)$ e quindi

$$y(x) = \frac{1}{x}\,(-x\cos x + \operatorname{sen} x + k) = \frac{k}{x} - \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.$$

**Esempio** 3 : Risolviamo l'equazione lineare non omogenea $y' + 2x\,y = x^3$ .
Applicando la formula generale per la soluzione avremo:

$$y(x) = e^{-\int 2x\,dx}\left(\int x^3\,e^{\int 2x\,dx}\,dx + k\right) = e^{-x^2}\left[\int x^3\,e^{x^2}\,dx + k\right] =$$

$= e^{-x^2}\left[\int x^2\left(x\,e^{x^2}\right)dx + k\right] = e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}\,x^2\,e^{x^2} - \int 2x\,\frac{1}{2}\,e^{x^2}\,dx + k\right]$ e quindi:

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}\,x^2\,e^{x^2} - \frac{1}{2}\,e^{x^2} + k\right) = k\,e^{-x^2} + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,.$$

## EQUAZIONI DI BERNOULLI

Sono equazioni del primo ordine rappresentabili nella forma: $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^\alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ , $\alpha \neq 1$ , casi già trattati come equazione lineare.
Per risolvere una equazione di questo tipo basta porre: $y^{1-\alpha} = w$, ovvero operare per sostituzione un cambio di variabile. Otteniamo allora:

$$y = w^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\alpha}\,w^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\,w' = \frac{1}{1-\alpha}\,w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,w'\,.$$

Sostituendo nell'equazione originaria avremo:

$\frac{1}{1-\alpha}\, w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, w' + p(x)\, w^{\frac{1}{1-\alpha}} = q(x)\, w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

e dividendo per $\frac{1}{1-\alpha}\, w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ si ottiene infine:

$w' + (1-\alpha)\, p(x)\, w^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-\alpha)\, q(x)$ ovvero:

$w' + (1-\alpha)\, p(x)\, w = (1-\alpha)\, q(x)$

che è un'equazione lineare e si integra mediante la formula generale.

Si ricava infine $y = w^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

**Esempio** 4 : Risolviamo l'equazione $y' + \frac{1}{x}\, y = \frac{\operatorname{sen} x}{y} = \operatorname{sen} x \cdot y^{-1}$ .

In questo caso $y^\alpha = y^{-1}$ e quindi $\alpha = -1$. Posto $y^{1-(-1)} = y^2 = w$ da cui $y = \sqrt{w}$ e $y' = \frac{1}{2\sqrt{w}}\, w'$ , sostituendo, si ha:

$\frac{1}{2\sqrt{w}}\, w' + \frac{1}{x}\sqrt{w} = \operatorname{sen} x\, \frac{1}{\sqrt{w}}$ . Moltiplicando tutto per $2\sqrt{w}$ si ha:

$w' + \frac{2}{x}\, w = 2 \operatorname{sen} x$ dalla quale, integrando, otteniamo:

$w(x) = e^{-\int \frac{2}{x}\, dx} \left( \int 2 \operatorname{sen} x\, e^{\int \frac{2}{x}\, dx}\, dx + k \right) = e^{-2\log x} \left[ \int 2 \operatorname{sen} x\, e^{2\log x}\, dx + k \right] =$

$= \frac{1}{x^2} \left( \int 2\, x^2 \operatorname{sen} x\, dx + k \right)$ . Essendo:

$= \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx =$

$= -x^2 \cos x + 2\left( x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx \right) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x$ , avremo:

$w(x) = \frac{1}{x^2} \left( 4\cos x + 4x \operatorname{sen} x - 2x^2 \cos x + k \right) = \frac{4\cos x}{x^2} + \frac{4 \operatorname{sen} x}{x} - 2\cos x + \frac{k}{x^2}$ .

Da $y = \sqrt{w}$ si ha infine $y = \sqrt{\frac{4\cos x}{x^2} + \frac{4\operatorname{sen} x}{x} - 2\cos x + \frac{k}{x^2}}$ .

La scelta $y = -\sqrt{w}$ genera la stessa equazione lineare con uguale soluzione generale per $w$. La soluzione generale per $y$ sarà la precedente ovviamente cambiata di segno.

**Esempio** 5 : Risolviamo l'equazione $y' + 2xy = x^3\, y^2$ .

Ponendo $y^{1-2} = y^{-1} = w$ si ha: $y = \frac{1}{w}$ da cui $y' = -\frac{1}{w^2}\, w'$ dalla quale, sostituendo:

$-\frac{1}{w^2}\, w' + 2x\, \frac{1}{w} = x^3\, \frac{1}{w^2}$ . Moltiplicando per $(-w^2)$ otteniamo:

$w' - 2x\, w = -x^3$ ed integrando otteniamo:

$w(x) = e^{\int 2x\, dx} \left( \int -x^3\, e^{-\int 2x\, dx}\, dx + k \right) = e^{x^2} \left[ -\int x^3\, e^{-x^2}\, dx + k \right]$ .

Essendo $\int x^3\, e^{-x^2}\, dx = \int x^2 \left( x\, e^{-x^2} \right) dx = -\frac{1}{2}\, x^2\, e^{-x^2} + \int \frac{1}{2}\, 2x\, e^{-x^2}\, dx =$

$= -\frac{1}{2}\, x^2\, e^{-x^2} - \frac{1}{2}\, e^{-x^2}$ si ottiene: $w(x) = e^{x^2} \left( \frac{1}{2}\, x^2\, e^{-x^2} + \frac{1}{2}\, e^{-x^2} + k \right)$ ovvero:

$w(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{2} + k\, e^{x^2}$ ed essendo $y = \frac{1}{w}$ abbiamo infine:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2} + k\,e^{x^2}}\,.$$

**EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI**

Sono equazioni della forma: $f_1(x)\,g_1(y)\,y' = f_2(x)\,g_2(y)$, dove $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni della sola variabile $x$ mentre $g_1(y)$ e $g_2(y)$ sono funzioni della sola variabile $y$.

Posto $f_1(x) \neq 0$ e $g_2(y) \neq 0$, separando le variabili otteniamo:

$\dfrac{g_1(y)}{g_2(y)}\,y' = \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$ dalla quale, integrando rispetto ad $x$, ed essendo $y'\,dx = dy$, otteniamo:

$\displaystyle\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,y'\,dx = \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\,dx + k$ e quindi, dette $G(y)$ e $F(x)$ le primitive di $\dfrac{g_1(y)}{g_2(y)}$ e $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$, risulta: $G(y) = F(x) + k$ dalla quale poi, se $G(y)$ è invertibile, otteniamo: $y(x) = G^{-1}(F(x) + k)$.

Imporre $f_1(x) \neq 0$ comporta di escludere dal campo d'esistenza dell'equazione differenziale eventuali rette verticali $x = x_0$ con $f_1(x_0) = 0$.

Imporre invece $g_2(y) \neq 0$ porta ad escludere funzioni costanti $y = y_0$, con $g_2(y_0) = 0$, che, se soddisfano l'equazione differenziale, andranno comunque aggiunte alla soluzione generale, controllando se siano ottenibili da questa per un particolare valore, anche infinito, della costante arbitraria. Saranno allora soluzioni particolari. Se non fossero ottenibili dalla soluzione generale per nessun valore, finito o infinito, della costante arbitraria verranno dette **soluzioni singolari**.

Esamineremo questo caso negli esempi presentati nel seguito.

**Esempio** 6 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = y^2 + 1$.

Risulta $y^2 + 1 \neq 0,\ \forall\,y$. Separando le variabili ed integrando otteniamo:

$\displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int 1\,dx + k \Rightarrow \operatorname{arctg} y = x + k \Rightarrow y = \operatorname{tg}(x+k)$, che è la soluzione generale dell'equazione. Se dovessimo risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ basterà imporre: $\operatorname{tg}(0+k) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} k = 1 \Rightarrow k = \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow k = \dfrac{\pi}{4}$ che ci porta la soluzione particolare $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, avendo scelto l'intervallo $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ per invertire la funzione tangente.

**Esempio** 7 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = \left(y^2 - y\right)x$.

Risulta $y^2 - y \neq 0$ per $y \neq 0$ e per $y \neq 1$. Separando le variabili e integrando si ha:

$\displaystyle\int \frac{1}{y^2 - y}\,dy = \int x\,dx + k$. Essendo $\displaystyle\int x\,dx + k = \frac{1}{2}\,x^2 + k$ ed inoltre:

$\displaystyle\int \frac{1}{y^2-y}\,dy = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,dy = \log|y-1| - \log|y| = \log\left|\frac{y-1}{y}\right|$, avremo:

$\log\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = \dfrac{1}{2}\,x^2 + k \Rightarrow \left|\dfrac{y-1}{y}\right| = e^{\frac{1}{2}x^2 + k} \Rightarrow \dfrac{y-1}{y} = m\,e^{\frac{1}{2}x^2}$ da cui infine:

$y = \dfrac{1}{1 - m\,e^{\frac{1}{2}x^2}}$, con $m \in \mathbb{R}$.

Si verifica poi che $y = 0$ è soluzione particolare, in quanto ottenibile per $m \to \infty$, ed anche $y = 1$ è soluzione particolare, in quanto ottenibile per $m = 0$.

**Esempio** 8 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = y^{\frac{n}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Posto $y > 0$ si ha:

$\int y^{-\frac{n}{n+1}}\,dy = \int 1\,dx + k \Rightarrow \dfrac{1}{1-\dfrac{n}{n+1}}\,y^{1-\frac{n}{n+1}} = (n+1)\,y^{\frac{1}{n+1}} = x + k$ da cui:

$y = \left(\dfrac{x+k}{n+1}\right)^{n+1}$. La funzione $y = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale data, ma non è soluzione particolare in quanto non è ottenibile per nessun valore, finito o infinito, del parametro $k$. Dato che l'esponente $\dfrac{n}{n+1}$ è minore di 1, la funzione $f(x,y) = y^{\frac{n}{n+1}}$ non è derivabile rispetto a $y$ nei punti $y = 0$. Non sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Cauchy, ovvero, più precisamente, non vale in un intorno dei punti $y = 0$ la condizione di Lipschitz. La soluzione esiste, ma non è unica. Infatti, se $k = 0$ sia la soluzione $y = 0$ che la soluzione $y = \left(\dfrac{x+k}{n+1}\right)^{n+1}$ soddisfano alla condizione $y(0) = 0$, e questa mancanza di unicità di soluzione si può realizzare imponendo il passaggio per un qualunque punto dell'asse $x$. La soluzione $y = 0$ infine è una soluzione singolare.

**Esempio** 9 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = x^2\sqrt{1-y^2}$.
Dobbiamo imporre non solo $1 - y^2 \neq 0$ ma pure $1 - y^2 > 0$, ovvero $-1 < y < 1$. Separando le variabili ed integrando otteniamo:
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int x^2\,dx + k \Rightarrow \text{arcsen}\,y = \dfrac{1}{3}\,x^3 + k$ e da questa infine:
$y = \text{sen}\left(\dfrac{1}{3}\,x^3 + k\right)$. Le funzioni $y = -1$ e $y = 1$ si verifica, sostituendo, che sono soluzioni dell'equazione differenziale, ma non si ottengono per nessun valore di $k$. Sono quindi soluzioni singolari, e si nota che esse costituiscono la frontiera del campo d'esistenza dell'equazione differenziale.

**Esempio** 10 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = \cos x\,\sqrt{y-1}$. Posto $y > 1$ si ha:
$\int \dfrac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy = \int \cos x\,dx + k \Rightarrow 2\sqrt{y-1} = \text{sen}\,x + k$ e da questa infine:
$y = 1 + \dfrac{1}{4}\,(\text{sen}\,x + k)^2$. La funzione $y = 1$ è soluzione singolare, in quanto non ottenibile per nessun valore di $k$, e giace tutta sulla frontiera del campo d'esistenza dell'equazione differenziale.

**EQUAZIONI DEL TIPO $y' = f(ax+by)$**
Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si pone $ax + by = w \Rightarrow y = \dfrac{1}{b}\,w - \dfrac{a}{b}\,x$ da cui $y' = \dfrac{1}{b}\,w' - \dfrac{a}{b}$ e sostituendo otteniamo: $\dfrac{1}{b}\,w' - \dfrac{a}{b} = f(w) \Rightarrow w' = b\,f(w) + a$ che risulta a variabili separabili, per cui:
$\int \dfrac{1}{b\,f(w)+a}\,dw = \int 1\,dx + k \Rightarrow F(w) = x + k \Rightarrow w = F^{-1}(x+k)$
se $F(w)$, primitiva di $\dfrac{1}{b\,f(w)+a}$, è determinabile e risulta invertibile, da cui infine:
$y = \dfrac{1}{b}\,F^{-1}(x+k) - \dfrac{a}{b}\,x$ risulta la soluzione generale.

**Esempio** 11 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = (x-y)^2$. Posto $x - y = w$ si ha:
$y = x - w \Rightarrow y' = 1 - w'$ e quindi sostituendo:
$1 - w' = w^2 \Rightarrow w' = 1 - w^2$, che risulta a variabili separabili, per cui integrando:

$\int \frac{1}{1-w^2}\,dw = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-w}+\frac{1}{1+w}\right)dw = \int 1\,dx + k$ da cui poi:
$\frac{1}{2}\left(\log|1+w| - \log|1-w|\right) = x+k \Rightarrow \log\sqrt{\left|\frac{1+w}{1-w}\right|} = x+k \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{\left|\frac{1+w}{1-w}\right|} = e^{x+k} = m\,e^{x} \Rightarrow \frac{1+w}{1-w} = h\,e^{2x}$, avendo sostituito $m^2$ con $h \in \mathbb{R}$, da cui poi $w = \frac{h\,e^{2x}-1}{h\,e^{2x}+1}$ ed infine $y = x - \frac{h\,e^{2x}-1}{h\,e^{2x}+1}$.
Avendo imposto $1-w^2 \neq 0$, considerate le due funzioni $w = -1$ e $w = 1$, si vede che queste sono soluzioni della $w' = 1-w^2$; sono però soluzioni particolari in quanto si ottengono dalla $w = \frac{h\,e^{2x}-1}{h\,e^{2x}+1}$ rispettivamente per $h \to -\infty$ e per $h \to +\infty$. Da queste deduciamo le due soluzioni $y = x+1$ e $y = x-1$, ottenibili per gli stessi valori di $h$ dalla soluzione generale.

**Esempio** 12 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = (x+y)^2 + 2(x+y)$.
Posto $x+y = w \Rightarrow y = w-x$ e $y' = w'-1$, sostituendo si ha:
$w'-1 = w^2+2w \Rightarrow w' = (w+1)^2$ e passando ad integrare, posto $w \neq -1$:
$\int \frac{1}{(w+1)^2}\,dw = -\frac{1}{w+1} = \int 1\,dx + k = x+k$ e quindi:
$w+1 = -\frac{1}{x+k} \Rightarrow w = -\frac{1}{x+k} - 1$ e quindi $y = -\frac{1}{x+k} - 1 - x$.
Essendo $w = -1$ soluzione della $w' = (w+1)^2$ ottenibile per $k \to \infty$ dalla soluzione generale, si ottiene anche la soluzione particolare $y = -1-x$.

**Esempio** 13 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = e^{x+y}$.
Posto $x+y = w \Rightarrow y = w-x$ e $y' = w'-1$, sostituendo si ha:
$w'-1 = e^{w} \Rightarrow w' = e^{w}+1 \neq 0\,\forall\, w$. Passando ad integrare:
$\int \frac{1}{e^{w}+1}\,dw = \int \frac{1}{\frac{1}{e^{-w}}+1}\,dw = \int \frac{e^{-w}}{e^{-w}+1}\,dw = -\log\left(e^{-w}+1\right) = x+k$ da cui:
$e^{-w}+1 = e^{-x-k} = m\,e^{-x} \Rightarrow e^{-w} = m\,e^{-x}-1$ e quindi:
$w = \log\left(\frac{1}{m\,e^{-x}-1}\right)$ da cui poi $y = \log\left(\frac{1}{m\,e^{-x}-1}\right) - x$.

**EQUAZIONI OMOGENEE (DI GRADO 0) O DELLA FORMA $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$**

Una funzione $f(x,y)$ si dice omogenea di grado $\alpha$ se $f(kx,ky) = k^{\alpha} f(x,y)$. Si dirà quindi omogenea di grado 0 se $f(kx,ky) = f(x,y)$. Essendo $f\left(\frac{k\,y}{k\,x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ecco spiegata l'altra espressione equivalente per tali equazioni.
Posto $\frac{y}{x} = w$ si ha $y = w\,x \Rightarrow y' = w'\,x + w$ dalla quale sostituendo otteniamo:
$w'\,x + w = f(w) \Rightarrow w'\,x = f(w) - w$ che risulta a variabili separabili, per cui:
$\int \frac{1}{f(w)-w}\,dw = \int \frac{1}{x}\,dx + k$ e quindi: $F(w) = \log|x| + k$.
Se $F(w)$, primitiva di $\frac{1}{f(w)-w}$, è determinabile e risulta invertibile, otteniamo:
$w = F^{-1}(\log|x|+k)$ e quindi infine $y = x \cdot F^{-1}(\log|x|+k)$.

**Esempio** 14 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = 1 - \dfrac{y}{x}$.
Posto $\dfrac{y}{x} = w$ si ottiene $y = w\,x \Rightarrow y' = w'\,x + w$ da cui sostituendo:
$w'\,x + w = 1 - w \Rightarrow w'\,x = 1 - 2w$. Separando le variabili e integrando:
$\displaystyle\int \frac{1}{1-2w}\,dw = \int \frac{1}{x}\,dx + k \Rightarrow\ -\frac{1}{2}\log|1-2w| = \log|x| + k$ da cui:
$\log \dfrac{1}{\sqrt{|1-2w|}} = \log\left(e^k\,|x|\right) \Rightarrow 1 - 2w = \dfrac{1}{m\,x^2}, m \in \mathbb{R}$, per cui:
$w = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{m\,x^2}\right)$ ed infine $y = \dfrac{1}{2}\,x\left(1 - \dfrac{1}{m\,x^2}\right)$.
Avendo posto, per la $w'\,x = 1 - 2w$, $w \neq \dfrac{1}{2}$, si ottiene da questa la soluzione $y = \dfrac{1}{2}\,x$, che è soluzione particolare in quanto ottenibile per $m \to \infty$.

**Esempio** 15 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$.
Posto $\dfrac{y}{x} = w$ si ottiene $y = w\,x \Rightarrow y' = w'\,x + w$ da cui sostituendo:
$w'\,x + w = \dfrac{w^2\,x^2}{x^2} = w^2 \Rightarrow w'\,x = w^2 - w$. Separando le variabili e integrando:
$\displaystyle\int \frac{1}{w^2-w}\,dw = \int \frac{1}{w-1} - \frac{1}{w}\,dw = \int \frac{1}{x}\,dx + k$ da cui
$\log|w-1| - \log|w| = \log\left|\dfrac{w-1}{w}\right| = \log|x| + k = \log\left(e^k\,|x|\right)$ e quindi:
$\dfrac{w-1}{w} = m\,x, m \in \mathbb{R} \Rightarrow w = \dfrac{1}{1-mx}$ e quindi $y = \dfrac{x}{1-mx}$.
Le funzioni $w = 0$ e $w = 1$, che sono soluzioni particolari della $w'\,x = w^2 - w$, generano le soluzioni particolari $y = 0$ e $y = x$, ottenibili dalla soluzione generale per $m \to \infty$ e per $m \to 0$.

**Esempio** 16 : Risolviamo l'equazione differenziale $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{x\,y}$.

Essendo $\dfrac{x^2+2y^2}{x\,y} = \dfrac{1 + 2\,\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{y}{x}}$, posto $\dfrac{y}{x} = w \Rightarrow y = w\,x$ si ottiene $y' = w'\,x + w$ da cui sostituendo: $w'\,x + w = \dfrac{1+2w^2}{w} \Rightarrow w'\,x = \dfrac{1+2w^2}{w} - w = \dfrac{1+w^2}{w}$. Integrando:
$\displaystyle\int \frac{w}{1+w^2}\,dw = \int \frac{1}{x}\,dx + k \Rightarrow \frac{1}{2}\log\left(1+w^2\right) = \log\left(e^k\,|x|\right)$ da cui:
$1 + w^2 = m\,x^2 \Rightarrow w = \pm\sqrt{m\,x^2 - 1}$ e quindi $y = \pm\,x\,\sqrt{m\,x^2 - 1}$.

**EQUAZIONI IN FORMA NORMALE DI ORDINE SUPERIORE**
Non si conoscono in generale, salvo alcuni casi particolari, tipi di equazioni di ordine superiore al primo con una specifica procedura di integrazione. Ci limitiamo a presentare un caso particolare, ovvero quello dell'equazione $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ nella quale, come si vede, mancano la $y$ e tutte le sue derivate fino all'ordine $n-2$.

Ponendo $y^{(n-1)} = w$ si ottiene $y^{(n)} = w' = f(x, w)$. Se questa è risolvibile, trovata $w$, con $n-1$ integrazioni successive si ottiene la soluzione generale $y$.

**Esempio** 17 : Risolviamo l'equazione differenziale $y''' = \dfrac{1}{x}\, y''$.

Posto $y'' = w \Rightarrow y''' = w'$ si ha $w' = \dfrac{1}{x}\, w$, equazione a variabili separabili, ed integrando:

$$\int \frac{1}{w}\, dw = \int \frac{1}{x}\, dx + k \Rightarrow \log|w| = \log|x| + k = \log\left(|x|\, e^k\right) \Rightarrow w = c_1\, x,\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione particolare $w = 0$ si ottiene per $c_1 = 0$.

Da $y'' = w$ segue $y' = \displaystyle\int w\, dx + c_2 = c_1\, \frac{x^2}{2} + c_2$ ed infine:

$$y = \int y'\, dx + c_3 = \int c_1\, \frac{x^2}{2} + c_2\, dx + c_3 = c_1\, \frac{x^3}{6} + c_2\, x + c_3 = k_1\, x^3 + k_2\, x + k_3 .$$

Per quanto riguarda il Teorema di esistenza ed unicità di Cauchy ci limitiamo ad enunciarlo nel caso dell'equazione in forma normale di ordine $n$: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ :

**Teorema** 3 : Sia $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ continua in un intervallo di $\mathbb{R}^{n+1}$; siano continue in tale intervallo le funzioni derivate parziali di $f$ fatte rispetto alle variabili $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$.

Allora esiste ed è unica la soluzione dell'equazione $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ che soddisfa alle $n$ condizioni $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$.

Si noti come, nell'enunciato del Teorema, la funzione $y$ e le sue derivate successive vengano considerate alla stregua di variabili indipendenti. La soluzione generale di una tale equazione differenziale dipenderà infine da $n$ costanti arbitrarie.

Vediamo ora come ogni equazione differenziale di ordine $n$ possa essere portata alla forma di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Il viceversa è altrettanto vero e lo vedremo nella parte relativa ai sistemi di equazioni differenziali.

Data allora l'equazione di ordine $n$ : $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ poniamo:

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y'_1 = y_2 \\ y'' = y'_2 = y_3 \\ y''' = y'_3 = y_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = y'_{n-1} = y_n \\ y^{(n)} = y'_n = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \end{cases}.$$

Le $n$ equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = y_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \end{cases}$$

nelle $n$ funzioni incognite $(y_1, y_2, ..., y_n)$ costituiscono un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Nella sua forma più generale un sistema di equazioni differenziali del primo ordine viene rappresentato come: $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .................... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$.

Ogni equazione è del primo ordine in forma normale; trovare una soluzione significa trovare una $n$-upla di funzioni $(y_1, y_2, ..., y_n)$ che soddisfa ciascuna delle equazioni date.

Il problema di Cauchy viene completato con le condizioni iniziali $\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^0 \\ y_2(x_0) = y_2^0 \\ .................... \\ y_n(x_0) = y_n^0 \end{cases}$.

Se le funzioni $f_i$ sono continue con derivate continue allora è unica la soluzione del problema di Cauchy.

Passiamo ora a trattare un tipo di equazioni differenziali per le quali vale una consistente teoria e che, in taluni casi, hanno una metodologia nota di soluzione.
Queste sono le equazioni differenziali lineari.

**EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE $n$**

Le equazioni differenziali lineari sono quelle esprimibili nella forma:
$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$
dove $a_i(x)$ e $b(x)$ sono funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che supponiamo continue.
Se $b(x) = 0$ l'equazione è detta **omogenea**, altrimenti non omogenea.
Possiamo esprimere queste equazioni differenziali usando l'operatore:
$\mathcal{L} = \mathcal{D}^n + a_{n-1}(x)\, \mathcal{D}^{n-1} + a_{n-2}(x)\, \mathcal{D}^{n-2} + ... + a_1(x)\, \mathcal{D} + a_0(x)$
dove $\mathcal{D}$ indica l'operatore di derivazione. Avremo quindi:
$\mathcal{L}(y) = \big(\mathcal{D}^n + a_{n-1}(x)\, \mathcal{D}^{n-1} + a_{n-2}(x)\, \mathcal{D}^{n-2} + ... + a_1(x)\, \mathcal{D} + a_0(x)\big)(y) = b(x)$
come forma alternativa per rappresentare l'equazione differenziale.
Come facilmente si verifica, l'operatore $\mathcal{L}$ è lineare (e anche da questo dipende il nome di tali equazioni) ovvero:
$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) \\ \mathcal{L}(\alpha\, y) = \alpha\, \mathcal{L}(y),\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$, equivalenti alla:
$\mathcal{L}(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, \mathcal{L}(y_1) + \beta\, \mathcal{L}(y_2),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Studiamo anzitutto il caso dell'equazione lineare omogenea $\mathcal{L}(y) = 0$, dimostrando il
**Teorema** 4 : Le soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea formano uno spazio vettoriale, avente dimensione pari all'ordine dell'equazione.
**Dimostrazione**: Siano per ipotesi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione omogenea.
Quindi $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$.
Da $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$ segue $\mathcal{L}(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, \mathcal{L}(y_1) + \beta\, \mathcal{L}(y_2) = 0 + 0 = 0$, per cui le soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea formano uno spazio vettoriale.
Viste le proprietà degli spazi vettoriali, per generare tutti gli elementi di tale spazio (ovvero tutte le soluzioni) occorre conoscere la dimensione dello spazio e disporre di una base, dato che ogni elemento, ovvero ogni soluzione dell'equazione lineare omogenea, è esprimibile in uno ed un solo modo come combinazione lineare degli elementi della base scelta.
Per il Teorema 3 di esistenza ed unicità di Cauchy, fissata la $n$-upla $\left(y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$, dalla continuità dei coefficienti $a_i(x)$ segue che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema e quindi esiste, uni-

ca, la soluzione che soddisfa alle $n$ condizioni date. Ma queste condizioni costituiscono un vettore di $\mathbb{R}^n$, e quindi lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^n$, per cui la sua dimensione è pari a $n$.
Una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea è quindi costituita da $n$ soluzioni che siano linearmente indipendenti.

Vediamo allora come si esprimono dipendenza ed indipendenza lineare in uno spazio i cui elementi sono delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e non dei vettori di $\mathbb{R}^n$.
**Definizione** 1 : Siano $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $n$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea.
Esse si dicono **linearmente indipendenti** se $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + ... + c_n\, y_n(x) = 0$ se e solo se $c_1 = c_2 = c_n = 0$. Altrimenti le $n$ soluzioni si dicono **linearmente dipendenti**.
Consideriamo allora l'espressione:
$c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + ... + c_n\, y_n(x) = 0$; derivandola otteniamo:
$c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x) + ... + c_n\, y_n'(x) = 0$; derivando ancora:
$c_1\, y_1''(x) + c_2\, y_2''(x) + ... + c_n\, y_n''(x) = 0$ e dopo $n-1$ derivazioni avremo infine:
$c_1\, y_1^{(n-1)}(x) + c_2\, y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n\, y_n^{(n-1)}(x) = 0$.
Queste $n$ equazioni possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{matrix}\right\| = \mathbb{O}.$$

Considerando $c_1, c_2, ..., c_n$ come un vettore di incognite, questo sistema lineare omogeneo a matrice quadrata per il Teorema di Cramer avrà solo la soluzione nulla $c_1 = c_2 = c_n = 0$ se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è diverso da zero.

La condizione: $|\mathbb{W}| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$ è la condizione necessaria e sufficiente per garantire che le $n$ soluzioni $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ siano linearmente indipendenti.
La matrice $\mathbb{W}$ prende il nome di matrice Wronskiana.

Vale un Teorema, che qui non dimostriamo, secondo il quale il Wronskiano (ovvero il determinante della matrice Wronskiana) di $n$ soluzioni di una equazione lineare omogenea o è sempre nullo oppure è sempre diverso da zero. Per vedere quindi se $n$ soluzioni di una equazione lineare omogenea sono indipendenti e quindi costituiscono una base basta calcolare il determinante della loro matrice Wronskiana e vedere se questa è non singolare.
Se lo è, le $n$ soluzioni costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni e quindi ogni altra soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea sarà esprimibile nella forma:
$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + ... + c_n\, y_n(x)$, che quindi rappresenta la soluzione generale dell'equazione. In teoria quindi conosciamo tutto riguardo alle soluzioni dell'omogenea. Purtroppo nella pratica non si conoscono, salvo pochi casi, metodi pratici per trovare una base, e quindi la maggior parte di queste equazioni rimangono irrisolte.
Vedremo nel seguito un caso importante, quando i coefficienti $a_i(x)$ sono costanti, per il quale invece esiste una metodologia che consente, in molti casi, di trovare una base.

Prima di esaminare questo caso, però, occupiamoci delle soluzioni dell'equazione lineare non omogenea.

**EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE**

Sia $\mathcal{L}(y) = \big(\mathcal{D}^n + a_{n-1}(x)\,\mathcal{D}^{n-1} + a_{n-2}(x)\,\mathcal{D}^{n-2} + ... + a_1(x)\,\mathcal{D} + a_0(x)\big)(y) = b(x)$ una equazione differenziale lineare non omogenea.
Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due sue soluzioni, risulta:
$\mathcal{L}(\alpha\,y_1 + \beta\,y_2) = \alpha\,b(x) + \beta\,b(x) = (\alpha+\beta)\,b(x) \neq b(x)$, tolto il caso $\alpha + \beta = 1$.
Quindi le soluzioni della non omogenea non formano uno spazio vettoriale.
Vale però il seguente:
**Teorema** 5 : Ogni soluzione $\overline{y}(x)$ dell'equazione lineare non omogenea è esprimibile come somma della soluzione generale dell'omogenea con una soluzione particolare $y_0(x)$ della non omogenea.
**Dimostrazione**: Sia $\overline{y}(x) = y_0(x) + c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + ... + c_n\,y_n(x)$. Allora:
$\mathcal{L}(\overline{y}) = \mathcal{L}(y_0(x) + c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + ... + c_n\,y_n(x)) =$
$= \mathcal{L}(y_0(x)) + \mathcal{L}(c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + ... + c_n\,y_n(x)) = b(x) + 0 = b(x)..$
Quindi $\overline{y}(x)$ è soluzione dell'equazione lineare non omogenea.
Viceversa, siano ora $\overline{y}(x)$ e $y_0(x)$ due soluzioni dell'equazione lineare non omogenea.
Risulta $\mathcal{L}(\overline{y}(x) - y_0(x)) = \mathcal{L}(\overline{y}(x)) - \mathcal{L}(y_0(x)) = b(x) - b(x) = 0$ e quindi $\overline{y}(x) - y_0(x)$ è soluzione dell'equazione lineare omogenea, quindi:
$\overline{y}(x) - y_0(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + ... + c_n\,y_n(x)$ per una $n$-upla $(c_1, c_2, ..., c_n)$, da cui:
$\overline{y}(x) = y_0(x) + c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + ... + c_n\,y_n(x)$.

Alle difficoltà per trovare una base si aggiungono quelle per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Questi problemi saranno risolti per buona parte delle equazioni lineari a coefficienti costanti.

**EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI**

Sono equazioni della forma: $y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + a_{n-2}\,y^{(n-2)} + ... + a_1\,y' + a_0\,y = b(x)$, con $a_i \in \mathbb{R}$ e $b(x)$ funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Anche ora iniziamo trattando il caso dell'equazione omogenea; sia allora $b(x) = 0$.
Supponiamo che una funzione del tipo $y = e^{\lambda x}$ sia una soluzione di tale equazione, e determiniamo se esistono valori del parametro $\lambda$ che rendono vero questo. Risulta:
$y' = \lambda\,e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2\,e^{\lambda x}$,..., $y^{(n)} = \lambda^n\,e^{\lambda x}$ e quindi, sostituendo nell'equazione differenziale dovrà risultare:
$\lambda^n\,e^{\lambda x} + a_{n-1}\,\lambda^{n-1}\,e^{\lambda x} + a_{n-2}\,\lambda^{n-2}\,e^{\lambda x} + ... + a_1\,\lambda\,e^{\lambda x} + a_0\,e^{\lambda x} = 0$ ovvero
$e^{\lambda x}\,\big(\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + a_{n-2}\,\lambda^{n-2} + ... + a_1\,\lambda + a_0\big) = 0$.
Dato che $e^{\lambda x} \neq 0$, affinchè $y = e^{\lambda x}$ sia una soluzione, il valore di $\lambda$ deve risultare una radice del polinomio, detto **polinomio caratteristico**:
$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + a_{n-2}\,\lambda^{n-2} + ... + a_1\,\lambda + a_0 = 0$ .
Dal Teorema fondamentale dell'Algebra sappiamo che ogni polinomio di grado $n$ ammette esattamente $n$ radici, che possono essere reali o complesse, semplici o multiple.
Essendo i coefficienti $a_i$ reali, le eventuali radici complesse sono sempre in numero pari; infatti la presenza della soluzione $a + ib$ implica quella della sua coniugata $a - ib$.
Iniziamo esaminando per brevità il caso dell'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine, e da questo vedremo come costruire una base per lo spazio delle soluzioni di una equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di qualunque ordine.

**Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti omogenee**
Sono equazioni della forma $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ che hanno per polinomio caratteristico $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = 0$. Possono verificarsi tre casi.

<u>Caso di radici reali e distinte:</u> il discriminante risulta $\triangle = a_1^2 - 4a_0 > 0$.
Il polinomio caratteristico ammette due radici reali e distinte $\lambda = a$ e $\lambda = b$. Avremo quindi:
$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = (\lambda - a)\,(\lambda - b) = \lambda^2 - (a+b)\,\lambda + ab = 0$.
L'equazione differenziale ha la forma $y'' - (a+b)\,y' + ab\,y = 0$.
Per quanto visto in precedenza, l'equazione differenziale avrà tra le sue soluzioni le due funzioni $y = e^{ax}$ e $y = e^{bx}$.
Verifichiamo anzitutto che esse risultano linearmente indipendenti con il Wronskiano:
$\begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ a\,e^{ax} & b\,e^{bx} \end{vmatrix} = (b-a)\,e^{(a+b)x} \neq 0$ in quanto $a \neq b$. Le due soluzioni quindi costituiscono una base, per cui ogni soluzione dell'equazione $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ sarà esprimibile come $y(x) = c_1\,e^{ax} + c_2\,e^{bx}$, con $c_1$ e $c_2$ costanti arbitrarie.
Quindi $y(x) = c_1\,e^{ax} + c_2\,e^{bx}$ è la soluzione generale dell'equazione data.

<u>Caso di radici reali e coincidenti:</u> il discriminante risulta $\triangle = a_1^2 - 4a_0 = 0$.
Il polinomio caratteristico ammette la radice reale doppia $\lambda = a$. Avremo quindi:
$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = (\lambda - a)^2 = \lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2 = 0$.
L'equazione differenziale ha la forma $y'' - 2a\,y' + a^2\,y = 0$.
Una soluzione sarà la $y = e^{ax}$. Per l'altra soluzione proviamo la $y = x\,e^{ax}$.
Risulta $y' = e^{ax} + a\,x\,e^{ax}$ ; $y'' = 2a\,e^{ax} + a^2\,x\,e^{ax}$. Sostituendo avremo:
$2a\,e^{ax} + a^2\,x\,e^{ax} - 2a\,(e^{ax} + a\,x\,e^{ax}) + a^2\,x\,e^{ax} = 0$, l'equazione è soddisfatta e $y = x\,e^{ax}$ è un'altra soluzione.
Verifichiamo infine che $y = e^{ax}$ e $y = x\,e^{ax}$ sono soluzioni linearmente indipendenti usando il Wronskiano. Avremo:
$\begin{vmatrix} e^{ax} & x\,e^{ax} \\ a\,e^{ax} & e^{ax} + a\,x\,e^{ax} \end{vmatrix} = e^{2ax} + ax\,e^{2ax} - axe^{2ax} = e^{2ax} \neq 0$.
Le due soluzioni quindi costituiscono una base, per cui ogni soluzione dell'equazione $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$ sarà esprimibile come $y(x) = c_1\,e^{ax} + c_2\,x\,e^{ax}$, con $c_1$ e $c_2$ costanti arbitrarie. Quindi $y(x) = c_1\,e^{ax} + c_2\,x\,e^{ax}$ è la soluzione generale dell'equazione data.

Prima di passare a trattare il caso delle radici complesse, prendiamo spunto da quanto appena visto e generalizziamo il caso di un polinomio caratteristico con radici reali di molteplicità anche maggiore di due.
L'equazione del terzo ordine: $y''' - 3a\,y'' + 3a^2\,y' - a^3\,y = 0$ ammette la radice reale tripla $\lambda = a$. Omettendo le verifiche analoghe a quelle del caso precedente, si verifica che tre sue soluzioni linearmente indipendenti sono $y = e^{ax}$, $y = x\,e^{ax}$ e $y = x^2\,e^{ax}$. Quindi la soluzione generale avrà la forma $y(x) = c_1\,e^{ax} + c_2\,x\,e^{ax} + c_3\,x^2\,e^{ax}$.

Notiamo anche come un'equazione differenziale lineare possa essere scritta in altra forma, sfruttando le proprietà dell'operatore $\mathcal{L}$. Avremo infatti:
$y'' - (a+b)\,y' + ab\,y = \mathcal{L}(y) = \big(\mathcal{D}^2 - (a+b)\mathcal{D} + ab\big)(y) = (\mathcal{D} - a)(\mathcal{D} - b)(y) = 0$;
$y'' - 2a\,y' + a^2\,y = \mathcal{L}(y) = \big(\mathcal{D}^2 - 2a\,\mathcal{D} + a^2\big)(y) = (\mathcal{D} - a)^2(y) = 0$;
$y''' - 3a\,y'' + 3a^2\,y' - a^3\,y = \mathcal{L}(y) = \big(\mathcal{D}^3 - 3a\,\mathcal{D}^2 + 3a^2\,\mathcal{D} - a^3\big)(y) = (\mathcal{D} - a)^3(y) = 0$.
Ovvero $\mathcal{L}(y)$ può essere fattorizzato mediante prodotto di fattori la cui struttura è analoga a quella che si ottiene fattorizzando il suo polinomio caratteristico.

Se un'equazione lineare ammette la radice reale $\lambda = a$ di molteplicità pari a $n$, l'equazione sarà fattorizzabile nella forma $\mathcal{L}(y) = (\mathcal{D} - a)^n(y) = 0$, avrà le $n$ soluzioni indipendenti:
$y = e^{ax}$, $y = x\,e^{ax}$, $y = x^2\,e^{ax}$,..., $y = x^{n-1}\,e^{ax}$ e la sua soluzione generale avrà la forma:
$y(x) = c_1\,e^{ax} + c_2\,x\,e^{ax} + c_3\,x^2\,e^{ax} + ... + c_n\,x^{n-1}\,e^{ax}$ o anche:
$y(x) = e^{ax}\left(c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + ... + c_n\,x^{n-1}\right)$, ovvero sarà esprimibile come prodotto della funzione esponenziale $y(x) = e^{ax}$, con $a$ unica radice reale del polinomio caratteristico, per un generico polinomio di grado $n-1$ : $y(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + ... + c_n\,x^{n-1}$.

<u>Caso di radici complesse e coniugate:</u> il discriminante risulta $\triangle = a_1^2 - 4a_0 < 0$.
Il polinomio caratteristico ammette le radici complesse coniugate $\lambda = a + ib$ e $\lambda = a - ib$.
Risulta allora:
$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 = (\lambda - (a + ib))(\lambda - (a - ib)) = \lambda^2 - 2a\,\lambda + \left(a^2 + b^2\right) = 0$.
L'equazione differenziale ha la forma $y'' - 2a\,y' + \left(a^2 + b^2\right)y = 0$.
La soluzione $y(x) = e^{\lambda x}$, con $\lambda = a + ib$ porta, vista la definizione di esponenziale complessa, alla soluzione $e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}\,e^{ibx} = e^{ax}\,(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx)$, che è però una funzione complessa della variabile $x$.
Se consideriamo però la parte reale $y(x) = e^{ax}\cos bx$ e la parte immaginaria $y(x) = e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$, vediamo, sostituendole nell'equazione differenziale, che ambedue le funzioni sono sue soluzioni.
Da $y(x) = e^{ax}\cos bx$ segue $y'(x) = a\,e^{ax}\cos bx - b\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$ e da questa:
$y''(x) = a^2\,e^{ax}\cos bx - 2ab\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx - b^2\,e^{ax}\cos bx$ per cui avremo:
$y''(x) - 2a\,y' + \left(a^2 + b^2\right)y = \left(a^2 - b^2\right)e^{ax}\cos bx - 2ab\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx - 2a^2\,e^{ax}\cos bx +$
$+ 2ab\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + \left(a^2 + b^2\right)e^{ax}\cos bx = 0$.
Quindi $y(x) = e^{ax}\cos bx$ è soluzione dell'equazione differenziale data.
Similmente, da $y(x) = e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$ segue $y'(x) = a\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + b\,e^{ax}\cos bx$ e da questa:
$y''(x) = a^2\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + 2ab\,e^{ax}\cos bx - b^2\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$ per cui avremo:
$y''(x) - 2a\,y' + \left(a^2 + b^2\right)y = \left(a^2 - b^2\right)e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + 2ab\,e^{ax}\cos bx - 2a^2\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx +$
$- 2ab\,e^{ax}\cos bx + \left(a^2 + b^2\right)e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx = 0$.
Quindi anche la $y(x) = e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$ è soluzione dell'equazione differenziale data.
Vediamo infine, usando il Wronskiano, che tali soluzioni sono indipendenti:
$$\begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx \\ e^{ax}\,(a\cos bx - b\,\mathrm{sen}\,bx) & e^{ax}\,(a\,\mathrm{sen}\,bx + b\cos bx) \end{vmatrix} =$$
$= e^{2ax}\left(a\,\mathrm{sen}\,bx\cos bx + b\cos^2 bx\right) - e^{2ax}\left(a\,\mathrm{sen}\,bx\cos bx - b\,\mathrm{sen}^2\,bx\right) =$
$= b\,e^{2ax}\left(\cos^2 bx + \mathrm{sen}^2\,bx\right) = b\,e^{2ax} \neq 0$ in quanto le soluzioni sono complesse e quindi $b \neq 0$. Dato che le due soluzioni sono indipendenti, esse costituiscono una base e quindi la soluzione generale sarà: $y(x) = c_1\,e^{ax}\cos bx + c_2\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx = e^{ax}\,(c_1\cos bx + c_2\,\mathrm{sen}\,bx)$.

Tornando alla fattorizzazione dell'operatore $\mathcal{L}$, nel caso di radici complesse e coniugate avremo un fattore del tipo $\left(\mathcal{D}^2 + \alpha\mathcal{D} + \beta\right)(y) = 0$, con $\alpha^2 - 4\beta < 0$. Soluzioni complesse e multiple provengono allora da fattori del tipo $\left(\mathcal{D}^2 + \alpha\mathcal{D} + \beta\right)^m(y) = 0$, con $\alpha^2 - 4\beta < 0$.
Per trovare una base in caso di soluzioni complesse multiple vale la stessa procedura vista per le soluzioni reali e multiple, ovvero basta moltiplicare la soluzione del caso semplice, $y(x) = c_1\,e^{ax}\cos bx + c_2\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx = e^{ax}\,(c_1\cos bx + c_2\,\mathrm{sen}\,bx)$ per un generico polinomio il cui grado sia inferiore di uno alla molteplicità $n$ delle radici. Avremo quindi, nel caso di soluzione complessa di molteplicità pari a $n$:
$y(x) = c_1\,e^{ax}\cos bx + c_2\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + c_3\,x\,e^{ax}\cos bx + c_4\,x\,e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx + ...$
$+ c_{2n-3}x^{n-2}e^{ax}\cos bx + c_{2n-2}x^{n-2}e^{ax}\mathrm{sen}\,bx + c_{2n-1}x^{n-1}e^{ax}\cos bx + c_{2n}x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$
o anche:

$y(x) = e^{ax}\left(c_1 + c_3\,x + ... + c_{2n-3}x^{n-2} + c_{2n-1}x^{n-1}\right)\cos bx +$
$+\, e^{ax}\left(c_2 + c_4\,x + ... + c_{2n-2}x^{n-2} + c_{2n}x^{n-1}\right)\operatorname{sen} bx\,.$

**Equazioni lineari di ordine $n$ a coefficienti costanti omogenee**
Supponiamo ora che l'equazione differenziale lineare omogenea abbia radici dei vari tipi: reali e complesse, semplici e multiple. Abbiamo visto nei casi precedenti che l'operatore $\mathcal{L}$ può essere fattorizzato mediante prodotto di fattori dei vari tipi, ovvero fattori del tipo $(\mathcal{D}-\lambda)$ per la soluzione reale $\lambda$ semplice, del tipo $(\mathcal{D}-\lambda)^m$ per la soluzione reale $\lambda$ multipla di molteplicità $m$, oppure fattori del tipo $\left(\mathcal{D}^2+\alpha\mathcal{D}+\beta\right)$ o $\left(\mathcal{D}^2+\alpha\mathcal{D}+\beta\right)^m$, con $\alpha^2-4\beta<0$, per soluzioni complesse semplici o di molteplicità $m$.
Per avere una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea basta prendere le soluzioni relative a ciascun fattore, come visto nei casi precedenti, e costruire, con le costanti arbitrarie, una combinazione lineare di tutte queste. Questa sarà la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.
Vediamo alcuni esempi.

**Esempio** 18 : Risolviamo l'equazione differenziale $y''' - 3y'' = 0\,.$
Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-3) = 0$, che ammette la radice reale e semplice $\lambda = 3$ e la radice reale e doppia $\lambda = 0$. La soluzione generale dell'equazione sarà allora $y(x) = c_1\,e^{0x} + c_2\,x\,e^{0x} + c_3\,e^{3x} = c_1 + c_2\,x + c_3\,e^{3x}\,.$

**Esempio** 19 : Risolviamo l'equazione differenziale $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0\,.$
Il polinomio caratteristico $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$ ammette la soluzione $\lambda = -1\,.$
Dividendo con Ruffini otteniamo $\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 5 = (\lambda+1)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right) = 0\,.$
L'equazione $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ ammette le radici complesse coniugate $\lambda_1 = 1 + 2i$ e $\lambda_1 = 1 - 2i$. La soluzione generale sarà $y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{x}\operatorname{sen} 2x + c_3\,e^{x}\cos 2x\,.$

**Esempio** 20 : Risolviamo l'equazione differenziale $y^{(4)} + 4y = 0\,.$
Il polinomio caratteristico è $\lambda^4 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^4 = -4 \Rightarrow \lambda = \sqrt[4]{-4}\,.$
Passando alla forma trigonometrica dei numeri complessi avremo: $-4 = 4(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$ da cui poi $\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\right)\right), 0 \le k \le 3$, che ci porta alle quattro soluzioni complesse $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ e $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$. La soluzione generale sarà allora:
$y(x) = c_1\,e^{x}\operatorname{sen} x + c_2\,e^{x}\cos x + c_3\,e^{-x}\operatorname{sen} x + c_4\,e^{-x}\cos x\,.$

**Esempio** 21 : Risolviamo l'equazione differenziale $y^{(5)} = 0\,.$
Il polinomio caratteristico è $\lambda^5 = 0$ che ammette la radice reale $\lambda = 0$ di molteplicità pari a 5.
La soluzione generale sarà allora: $y(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + c_4\,x^3 + c_5\,x^4\,.$

**Equazioni lineari a coefficienti costanti non omogenee**
Abbiamo visto con il Teorema 5 che la soluzione generale di una equazione lineare non omogenea si ottiene sommando una soluzione particolare della non omogenea alla soluzione generale dell'omogenea; abbiamo poi visto in quale modo ottenere la soluzione generale dell'equazione omogenea. Rimangono quindi da stabilire opportune metodologie che consentano di determinare una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea. Cominciamo descrivendo il metodo più generale, quello cioè che può essere applicato ad ogni equazione lineare non omogenea. Gli altri metodi saranno applicabili solo in certi casi particolari, dove però consentiranno un numero di calcoli solitamente più contenuto rispetto al metodo generale.

Metodo della variazione delle costanti

Questo metodo è la generalizzazione di quanto già fatto nel caso dell'equazione lineare non omogenea del primo ordine.

La soluzione generale dell'equazione omogenea è esprimibile nella forma:

$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + ... + c_n\, y_n(x)$, dove $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sono le $n$ soluzioni che costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni.

Supponiamo ora che $c_1, c_2, ..., c_n$ non siano costanti arbitrarie, ma siano anch'esse funzioni della variabile $x$: $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$.

Vediamo se è possibile determinare una $n$-upla di funzioni $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ in modo che $y_0(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + ... + c_n(x)\, y_n(x)$ sia una soluzione particolare dell'equazione lineare non omogenea. Possiamo scrivere:

$c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + ... + c_n(x)\, y_n(x) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}$, con $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Y}$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}$ è quindi il prodotto scalare dei due vettori $\mathbb{C}(x)$ e $\mathbb{Y}(x)$.

Consideriamo allora la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y_0(x) = \mathbb{C}(x) \cdot \mathbb{Y}(x)$. Abbreviando: $y_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}$.

Dato che a noi basta trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, possiamo anche imporre sulla soluzione $y_0$ condizioni particolari che semplifichino i calcoli.

Da $y_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}$ si ha $y_0' = \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y} + \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}'$; poniamo $\mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y} = 0$, per cui $y_0' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}'$;

da $y_0' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}'$ si ha $y_0'' = \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}' + \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}''$; poniamo $\mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}' = 0$, per cui $y_0'' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}''$;

da $y_0'' = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}''$ si ha $y_0''' = \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}'' + \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}'''$; poniamo $\mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}'' = 0$;

e così proseguendo, derivando $n$ volte $y_0$ :

da $y_0^{(n-1)} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}^{(n-1)}$ si ha $y_0^{(n)} = \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}^{(n-1)} + \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}^{(n)}$; poniamo $\mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}^{(n-1)} = b(x)$, dove $b(x)$ è il termine noto dell'equazione lineare non omogenea.

Vediamo anzitutto che la funzione $y_0$, in base alle condizioni che su essa sono state imposte, risulta soluzione dell'equazione lineare non omogenea:

$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + ... + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$. Sostituendo avremo:

$$b(x) + \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}^{(n)} + a_{n-1}\, \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}^{(n-1)} + ... + a_2\, \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}'' + a_1\, \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y}' + a_0\, \mathbb{C} \cdot \mathbb{Y} =$$
$$= \mathbb{C} \cdot \left(\mathbb{Y}^{(n)} + a_{n-1}\, \mathbb{Y}^{(n-1)} + ... + a_2\, \mathbb{Y}'' + a_1\, \mathbb{Y}' + a_0\, \mathbb{Y}\right) + b(x) = 0 + b(x) = b(x).$$

Infatti il termine dentro parentesi è nullo, essendo $\mathbb{Y}$ la soluzione generale dell'equazione omogenea. Quindi $y_0$ è soluzione dell'equazione lineare non omogenea.

Vediamo infine come ricavare esplicitamente $y_0$, e per questo utilizziamo le $n$ condizioni particolari che abbiamo via via imposto: $\begin{cases} \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y} = 0 \\ \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}^{(n-2)} = 0 \\ \mathbb{C}' \cdot \mathbb{Y}^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$.

Queste possono essere scritte in forma matriciale, usando la matrice Wronskiana $\mathbb{W}$ della soluzione generale $\mathbb{Y}$, posto $\mathbb{C}' = (c_1', c_2', ..., c_n')$, nel seguente modo:

$$\left\|\begin{matrix} \mathbb{Y} \\ \mathbb{Y}' \\ \dots \\ \mathbb{Y}^{(n-2)} \\ \mathbb{Y}^{(n)} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} c_1' \\ c_2' \\ \dots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(x) \end{matrix}\right\| \Rightarrow \mathbb{W} \cdot \mathbb{C}' = \left\|\begin{matrix} \mathbb{O} \\ b(x) \end{matrix}\right\|,$$

dove $\left\|\begin{matrix} \mathbb{O} \\ b(x) \end{matrix}\right\|$ rappresenta un vettore colonna con tutte le componenti nulle eccettuata l'ultima uguale a $b(x)$.

La matrice Wronskiana $\mathbb{W}$ è non singolare, in quanto $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sono indipendenti. Quindi esiste l'inversa $\mathbb{W}^{-1}$ e dalla $\mathbb{W} \cdot \mathbb{C}' = \left\|\begin{matrix} \mathbb{O} \\ b(x) \end{matrix}\right\|$ avremo:

$\mathbb{C}' = \mathbb{W}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbb{O} \\ b(x) \end{Vmatrix}$ da cui poi: $\mathbb{C} = \int \mathbb{W}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbb{O} \\ b(x) \end{Vmatrix} dx$, che permette di ricavare il vettore di funzioni $\mathbb{C} = (c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x))$. Non occorre inserire costanti additive nell'integrale, in quanto ci basta trovare una soluzione particolare. Se l'integrale indefinito non fosse esplicitabile, qualcuna delle $c_i(x)$ rimarrà espressa sotto forma d'integrale. Questo metodo è applicabile qualunque sia il termine noto $b(x)$.

**Esempio** 22 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
Il polinomio caratteristico dell'omogenea è $\lambda^2 + 1 = 0$ che ha le radici complesse $\lambda = \pm i$, per cui la soluzione generale dell'omogenea risulta $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$.
Per trovare una soluzione particolare della non omogenea, con $b(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, usiamo il metodo della variazione delle costanti.
Sarà $\mathbb{W}(x) = \begin{Vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{Vmatrix}$ da cui $|\mathbb{W}(x)| = -1$ e $\mathbb{W}^{-1}(x) = \begin{Vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{Vmatrix}$.
Avremo poi $\begin{Vmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{Vmatrix} = \int \begin{Vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{Vmatrix} dx = \int \begin{Vmatrix} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ -1 \end{Vmatrix} dx$ e quindi:
$\begin{Vmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \log|\operatorname{sen} x| \\ -x \end{Vmatrix}$ per cui la soluzione particolare della non omogenea sarà:
$\overline{y} = \log|\operatorname{sen} x| \cdot \operatorname{sen} x - x \cos x$ e la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà:
$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \log|\operatorname{sen} x| \cdot \operatorname{sen} x - x \cos x$.

**Esempio** 23 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - y' = x + e^x$.
Da $y'' - y' = 0$ ricaviamo $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ e $\lambda = 1$.
Quindi la soluzione generale dell'omogenea risulta $y(x) = c_1 + c_2 e^x$.
Avremo poi $\mathbb{W}(x) = \begin{Vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{Vmatrix}$ da cui $|\mathbb{W}(x)| = e^x$ e $\mathbb{W}^{-1}(x) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & e^{-x} \end{Vmatrix}$.
Sarà allora $\begin{Vmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{Vmatrix} = \int \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & e^{-x} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ x + e^x \end{Vmatrix} dx = \int \begin{Vmatrix} -x - e^x \\ x e^{-x} + 1 \end{Vmatrix} dx$ e quindi:
$\begin{Vmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{x^2}{2} - e^x \\ -x e^{-x} - e^{-x} + x \end{Vmatrix}$ per cui la soluzione particolare della non omogenea sarà:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + \left(-\frac{x^2}{2} - e^x\right) \cdot 1 + (-x e^{-x} - e^{-x} + x) e^x \text{ ovvero}$$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^2}{2} - e^x - x - 1 + x e^x \text{ o anche}$$

$y(x) = k_1 + k_2 e^x - x - \dfrac{x^2}{2} + x e^x$, avendo posto per brevità $k_1 = c_1 - 1$ e $k_2 = c_2 - 1$.

Metodo delle integrazioni successive

Questo metodo per la ricerca della soluzione particolare dell'equazione non omogenea è utilizzabile quando le radici del polinomio caratteristico sono tutte reali, semplici o multiple. Non è utilizzabile se il polinomio caratteristico presenta radici complesse. Il metodo consiste nell'eseguire l'integrazione di equazioni lineari non omogenee del primo ordine, le uniche per le quali esiste una procedura risolutiva.
Supponiamo, per semplicità, di avere un'equazione del secondo ordine, il cui polinomio caratteristico abbia le due soluzioni reali $\alpha$ e $\beta$, non necessariamente diverse tra loro.

Possiamo allora fattorizzare l'equazione differenziale come:
$\mathcal{L}(y) = [(\mathcal{D}-\alpha)(\mathcal{D}-\beta)](y) = b(x)$.
Posto $(\mathcal{D}-\beta)(y) = w$, si ha $(\mathcal{D}-\alpha)(w) = b(x)$ ovvero: $w' - \alpha\, w = b(x)$. Troviamo una soluzione di questa, che sappiamo essere della forma: $w(x) = e^{\int \alpha\, dx}\left(\int b(x)\, e^{-\int \alpha\, dx}\, dx + k\right)$
ovvero: $w(x) = e^{\alpha\, x}\left(\int b(x)\, e^{-\alpha\, x}\, dx\right)$. Non aggiungiamo la costante additiva all'integrale in quanto vogliamo una soluzione particolare e non la soluzione generale. Ottenuta $w(x)$ avremo poi: $(\mathcal{D}-\beta)(y) = y' - \beta\, y = w(x)$, che è lineare del primo ordine, e risolvendola avremo:
$y_0(x) = e^{\int \beta\, dx}\left(\int w(x)\, e^{-\int \beta\, dx}\, dx\right) = e^{\beta\, x}\left(\int w(x)\, e^{-\beta\, x}\, dx\right) = h(x)$
che è la soluzione particolare cercata. Se l'equazione originaria fosse di grado superiore al secondo ci vorranno tante integrazioni successive quanto è l'ordine dell'equazione.

**Esempio** 24 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - y = x - e^x$.
Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ e quindi l'equazione omogenea ha per soluzione generale $y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$. Fattorizzando possiamo scrivere l'equazione come:
$\left(\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}\right)(y) = (\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}+1)(y) = x - e^x$. Poniamo $(\mathcal{D}+1)(y) = w$ da cui avremo:
$(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}+1)(y) = (\mathcal{D}-1)(w) = w' - w = x - e^x$. Passando alla risoluzione:
$w(x) = e^x \int e^{-x}\,(x - e^x)\, dx = e^x \int x\, e^{-x} - 1\, dx = e^x\,(-x\, e^{-x} - e^{-x} - x)$ e quindi:
$w(x) = -x - 1 - x\, e^x$. Ma $(\mathcal{D}+1)(y) = y' + y = w = -x - 1 - x\, e^x$ e risolvendo:
$y_0(x) = e^{-x} \int e^x\,(-x - 1 - x\, e^x)\, dx = e^{-x} \int -x\, e^x - e^x - x\, e^{2x}\, dx$ e quindi:
$y_0(x) = e^{-x}\left(-x\, e^x + e^x - e^x - \frac{1}{2}\, x\, e^{2x} + \frac{1}{4}\, e^{2x}\right) = -x - \frac{1}{2}\, x\, e^x + \frac{1}{4}\, e^x$ che è quindi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. La soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà allora:
$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} - x - \frac{1}{2}\, x\, e^x + \frac{1}{4}\, e^x = k_1\, e^x + c_2\, e^{-x} - x - \frac{1}{2}\, x\, e^x$, avendo posto, per brevità, $k_1 = c_1 + \frac{1}{4}$.

**Esempio** 25 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.
Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = -1$ e quindi l'equazione omogenea ha per soluzione generale $y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x}$.
Fattorizzando possiamo scrivere l'equazione come:
$\left(\mathcal{D}^2 - \mathcal{D} - 2\right)(y) = (\mathcal{D}-2)(\mathcal{D}+1)(y) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$. Poniamo $(\mathcal{D}+1)(y) = w$ da cui avremo: $(\mathcal{D}-2)(\mathcal{D}+1)(y) = (\mathcal{D}-2)(w) = w' - 2w = 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.
Risolvendo: $w(x) = e^{2x} \int e^{-2x}\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx =$
$= e^{2x} \int 2e^{-2x} - \frac{1}{x}\, 2e^{-2x} + \frac{1}{x^2}\, e^{-2x} + \frac{2}{x^3}\, e^{-2x}\, dx =$
$= e^{2x}\left(-e^{-2x} + \frac{1}{x}\, e^{-2x} + \int \frac{1}{x^2}\, e^{-2x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, e^{-2x} + \frac{2}{x^3}\, e^{-2x}\, dx\right) =$

$$= e^{2x}\left( - e^{-2x} + \frac{1}{x}\, e^{-2x} + \int \frac{2}{x^2}\, e^{-2x}\, dx + \int \frac{2}{x^3}\, e^{-2x}\, dx \right) =$$
$$= e^{2x}\left( - e^{-2x} + \frac{1}{x}\, e^{-2x} - \frac{1}{x^2}\, e^{-2x} - \int \frac{2}{x^3}\, e^{-2x}\, dx + \int \frac{2}{x^3}\, e^{-2x}\, dx \right) =$$
$$= e^{2x}\left( - e^{-2x} + \frac{1}{x}\, e^{-2x} - \frac{1}{x^2}\, e^{-2x} \right) = \, -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = w(x)\,.$$

Ma $(\mathcal{D}+1)(y) = y' + y = w = \, -1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ e risolvendo:

$$y_0(x) = e^{-x}\int e^{x}\left( -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = e^{-x}\int - e^{x} + \frac{1}{x}\, e^{x} - \frac{1}{x^2}\, e^{x}\, dx =$$
$$= e^{-x}\left( - e^{x} + \frac{1}{x}\, e^{x} + \int \frac{1}{x^2}\, e^{x}\, dx - \int \frac{1}{x^2}\, e^{x}\, dx \right) = e^{-x}\left( - e^{x} + \frac{1}{x}\, e^{x} \right) =$$

$= \dfrac{1}{x} - 1$ . Quindi $y_0(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

La soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà allora:

$$y(x) = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} + \frac{1}{x} - 1\,.$$

<u>Metodo degli annichilatori</u>

Questo metodo è sicuramente il più rapido nel consentire di trovare una soluzione particolare per l'equazione non omogenea, ma risulta applicabile solo se il termine noto $b(x)$ è una funzione del tipo di quelle che costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni di una equazione lineare omogenea, ovvero è una funzione del tipo:

$b(x) = \mathcal{P}_m(x)\, e^{\alpha x}\, (\operatorname{sen}\beta\, x + \cos\gamma\, x)$ , dove $\mathcal{P}_m(x)$ è un polinomio di grado $m$ nella variabile $x$, e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Qualcuno dei valori $m, \alpha, \beta, \gamma$ può anche essere nullo.

Il termine noto deve quindi essere annichilato, ovvero ridotto a 0, da uno dei fattori nei quali può essere fattorizzata un'equazione lineare omogenea.

**Esempio** 26 : $e^{\alpha x}$ è annichilato da $(\mathcal{D} - \alpha)$ ;

**Esempio** 27 : $x^2\, e^{\alpha x}$ è annichilato da $(\mathcal{D} - \alpha)^3$ ;

**Esempio** 28 : $e^{\alpha x}\, \operatorname{sen}\beta\, x$ è annichilato da $\left(\mathcal{D}^2 - 2\alpha\, \mathcal{D} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)$ ;

**Esempio** 29 : $e^{\alpha x}\, (\operatorname{sen}\beta\, x + \cos\gamma\, x)$ è annichilato da:
$\left(\mathcal{D}^2 - 2\alpha\, \mathcal{D} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right) \cdot \left(\mathcal{D}^2 - 2\alpha\, \mathcal{D} + \left(\alpha^2 + \gamma^2\right)\right)$ ;

**Esempio** 30 : $x^2\, e^{\alpha x} \cos\beta\, x$ è annichilato da $\left(\mathcal{D}^2 - 2\alpha\, \mathcal{D} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)^3$ ;

**Esempio** 31 : $a + bx + cx^2 + dx^3$ è annichilato da $\mathcal{D}^4$ .

Data allora l'equazione lineare non omogenea $\mathcal{L}(y) = b(x)$ , sia $\overline{\mathcal{L}}$ l'operatore che annichila $b(x)$.
Componendo gli operatori avremo: $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(y)) = \overline{\mathcal{L}}(b(x)) = 0$ .

Si trova allora la soluzione generale dell'equazione omogenea $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(y)) = 0$ e da questa, sostituendo nella $\mathcal{L}(y) = b(x)$ , si determinano le costanti arbitrarie in modo da trovare la soluzione particolare.

Ci sono alcune importanti osservazioni pratiche da tenere in considerazione.

Anzitutto il cosiddetto principio di sovrapposizione: se fosse $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ e se $b_1(x)$ e $b_2(x)$ fossero annichilati da due diversi operatori $\overline{\mathcal{L}}_1$ e $\overline{\mathcal{L}}_2$, si possono anche risolvere separatamente i due problemi, quello della ricerca della soluzione particolare per la $\overline{\mathcal{L}}_1(\mathcal{L}(y)) = 0$ e quello per la $\overline{\mathcal{L}}_2(\mathcal{L}(y)) = 0$ . La soluzione particolare per l'equazione globale sarà la somma delle due soluzioni particolari dei casi separati.

Occorre poi fare attenzione al caso in cui l'operatore che annichila $b(x)$ sia uno dei fattori che risulta dalla fattorizzazione dell'equazione omogenea; in questo caso occorrerà dare a tale fattore la sua giusta molteplicità, che è la somma delle due molteplicità trovate.
Come vedremo negli esempi che seguono, il metodo può sempre essere abbreviato con un notevole risparmio di calcoli.

**Esempio** 32 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = x - x^2$ .
Si ha $\mathcal{D}\big(x - x^2\big) = 1 - 2x, \mathcal{D}(1 - 2x) = -2, \mathcal{D}(-2) = 0$ e quindi il termine noto $b(x)$ è annichilato dall'operatore $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{D}^3$ .
Inoltre $y'' - y' - 2y = \mathcal{L}(y) = (\mathcal{D}+1)(\mathcal{D}-2)(y)$ e quindi avremo:
$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(y)) = \mathcal{D}^3(\mathcal{D}+1)(\mathcal{D}-2)(y) = 0$ che ha per soluzione generale:
$y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{2x} + c_3 + c_4\, x + c_5\, x^2$ . Sostituiamo questa nella $y'' - y' - 2y = x - x^2$ e troviamo i valori di $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ che la rendono vera. Avremo quindi:
$y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{2x} + c_3 + c_4\, x + c_5\, x^2$ ;
$y' = -c_1\, e^{-x} + 2\, c_2\, e^{2x} + c_4 + 2\, c_5\, x$ ;
$y'' = c_1\, e^{-x} + 4\, c_2\, e^{2x} + 2\, c_5$ per cui:
$y'' - y' - 2y = (c_1 + c_1 - 2c_1)\, e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2)\, e^{2x} + (2c_5 - c_4 - 2c_3) +$
$-(2c_5 + 2c_4)\, x - 2c_5 x^2 = (2c_5 - c_4 - 2c_3) + (-2c_5 - 2c_4)\, x + (-2c_5)\, x^2 = x - x^2$

per cui dovrà essere: $\begin{cases} -2c_5 = -1 \\ -2c_5 - 2c_4 = 1 \\ 2c_5 - c_4 - 2c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_5 = \dfrac{1}{2} \\ c_4 = \dfrac{1}{2}\,(-2c_5 - 1) = -1 \\ c_3 = \dfrac{1}{2}\,(2c_5 - c_4) = 1 \end{cases}$ .

Quindi la soluzione particolare per la non omogenea sarà data da $\overline{y} = 1 - x + \dfrac{1}{2}\, x^2$ .
Si noti come la parte $c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{2x}$ sia scomparsa una volta operata la sostituzione, coerentemente con l'essere soluzione generale dell'equazione omogenea. Si può allora risparmiare calcoli abbreviando la procedura in questo modo: dato che il termine noto $b(x)$ è un polinomio di III grado, ovvero è annichilato da $\mathcal{D}^3$, e dato che $\mathcal{D}$ non compare nella fattorizzazione dell'equazione omogenea, prendiamo un generico polinomio di II grado, $a + bx + c\, x^2$ , sostituiamolo nell'equazione non omogenea e troviamo i valori di $a, b$ e $c$ che la rendono soddisfatta; questi saranno i coefficienti della soluzione particolare. Quindi:
$\overline{y} = a + bx + c\, x^2$ ; $\overline{y}' = b + 2\, c\, x$ ; $\overline{y}'' = 2\, c$ e sostituendo:
$y'' - y' - 2y = 2c - b - 2cx - 2a - 2bx - 2cx^2 = x - x^2$ da cui:

$$\begin{cases} 2c - b - 2a = 0 \\ -2cx - 2bx = x \\ -2cx^2 = -x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c - b - 2a = 0 \\ -2c - 2b = 1 \\ -2c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2}\,(-2c - 1) = -1 \\ a = \dfrac{1}{2}\,(2c - b) = 1 \end{cases},$$

e quindi $\overline{y} = 1 - x + \dfrac{1}{2}\, x^2$ , esattamente come con il calcolo precedente.
La soluzione generale dell'equazione non omogenea $y'' - y' - 2y = x - x^2$ sarà allora:
$y(x) + \overline{y} = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{2x} + 1 - x + \dfrac{1}{2}\, x^2$ .

**Esempio** 33 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = x\, e^{3x}$ .

Ancora $y'' - y' - 2y = \mathcal{L}(y) = (\mathcal{D}+1)(\mathcal{D}-2)(y)$. Il termine noto $b(x)$ è annichilato dall'operatore $(\mathcal{D}-3)^2$, infatti:
$(\mathcal{D}-3)^2 = \mathcal{D}^2 - 6\,\mathcal{D} + 9$ ed essendo:
$\mathcal{D}\big(x\,e^{3x}\big) = e^{3x} + 3x\,e^{3x}$; $\mathcal{D}^2\big(x\,e^{3x}\big) = 6e^{3x} + 9x\,e^{3x}$, avremo:
$\big(\mathcal{D}^2 - 6\,\mathcal{D} + 9\big)\big(x\,e^{3x}\big) = 6e^{3x} + 9x\,e^{3x} - 6e^{3x} - 18x\,e^{3x} + 9x\,e^{3x} = 0$.
Dato che $(\mathcal{D}-3)^2$ non compare nella fattorizzazione dell'equazione omogenea, prendiamo la soluzione generale della $(\mathcal{D}-3)^2(y) = 0$ che sarà $y(x) = a\,e^{3x} + bx\,e^{3x}$.
Quindi $y' = 3a\,e^{3x} + b\,e^{3x} + 3bx\,e^{3x} = (3a+b)\,e^{3x} + 3bx\,e^{3x}$;
$y'' = 3(3a+b)\,e^{3x} + 3b\,e^{3x} + 9bx\,e^{3x} = (9a+6b)\,e^{3x} + 9bx\,e^{3x}$.
Sostituendo nella $y'' - y' - 2y = x\,e^{3x}$ avremo:
$(9a+6b)\,e^{3x} + 9bx\,e^{3x} - (3a+b)\,e^{3x} - 3bx\,e^{3x} - 2a\,e^{3x} - 2bx\,e^{3x} =$
$= (4a+5b)\,e^{3x} + 4bx\,e^{3x} = x\,e^{3x}$ da cui otteniamo:

$$\begin{cases} 4b = 1 \\ 4a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{4} \\ a = -\dfrac{5}{4}\,b = -\dfrac{5}{16} \end{cases}.$$

Quindi la soluzione particolare sarà data da $\overline{y} = -\dfrac{5}{16}\,e^{3x} + \dfrac{1}{4}\,x\,e^{3x}$, e la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà $y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{2x} - \dfrac{5}{16}\,e^{3x} + \dfrac{1}{4}\,x\,e^{3x}$.
Se come soluzione particolare avessimo ipotizzato solo la $\overline{y} = ax\,e^{3x}$, sostituendo, avremmo ottenuto: $5a\,e^{3x} + 4ax\,e^{3x} = x\,e^{3x}$ che, per essere soddisfatta, avrebbe richiesto $a = 0$ e $4a = 1$, chiaramente di impossibile soluzione. Questo per ribadire come nella ipotesi di soluzione vada messa la soluzione completa di $\overline{\mathcal{L}}(y) = 0$, in questo caso $\overline{y} = a\,e^{3x} + bx\,e^{3x}$.

**Esempio** 34 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 1 - x + 3e^x$.
Risolviamo l'equazione omogenea: $y'' - 3y' + 2y = (\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}-2)(y) = 0$ e quindi la soluzione generale sarà: $y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{2x}$.
Il termine noto $b(x) = 1 - x + 3e^x$ può essere visto, per il principio di sovrapposizione, come una somma $b_1(x) + b_2(x)$ dove $b_1(x) = 1 - x$ e $b_2(x) = 3e^x$.
Il termine $b_1(x) = 1 - x$ è annichilato dall'operatore $\mathcal{D}^2$.
Prendiamo un generico polinomio di I grado $\overline{y_1} = a + bx$ e sostituiamolo nell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 1 - x + 3e^x$. Si ha:

$$0 - 3b + 2a + 2bx = 1 - x \Rightarrow \begin{cases} 2b = -1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ da cui } \overline{y}_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,x.$$

Passiamo a $b_2(x) = 3e^x$. Esso viene annichilato dall'operatore $(\mathcal{D}-1)$, che però è già presente nella fattorizzazione dell'equazione omogenea, e quindi diviene di II grado: $(\mathcal{D}-1)^2$.
Dovremo allora considerare la soluzione $\overline{y}_2 = a\,e^x + bx\,e^x$, che corrisponde alla radice $\lambda = 1$ doppia. Sostituendo nell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 1 - x + 3e^x$ si ha:
$ae^x + 2be^x + bx\,e^x - 3ae^x - 3be^x - 3bx\,e^x + 2ae^x + 2bx\,e^x = 3e^x$ da cui:
$(a - 3a + 2a + 2b - 3b)\,e^x + (b - 3b + 2b)\,x\,e^x = 3e^x \Rightarrow -be^x = 3e^x \Rightarrow b = -3, \forall\, a$.
Avremo quindi $\overline{y}_2 = -3x\,e^x$ e da questa infine $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\,x - 3x\,e^x$.
Quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà:

$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,x - 3x\,e^x.$$

**Esempio** 35 : Risolviamo l'equazione differenziale $y'' + y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$.
Da $b(x) = \operatorname{sen} x + \cos 2x$ poniamo $b_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $b_2(x) = \cos 2x$ e troviamo separatamente una soluzione particolare per $\mathcal{L}(y) = b_1(x)$ e poi per $\mathcal{L}(y) = b_2(x)$.
Da $y'' + y = 0$ si ha $\big(\mathcal{D}^2 + 1\big)(y) = 0$ ovvero $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.
Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$.
Consideriamo $b_1(x) = \operatorname{sen} x$. Anch'esso è annichilato da $\big(\mathcal{D}^2 + 1\big)$, quindi occorre considerare la soluzione generale di $\big(\mathcal{D}^2 + 1\big)^2(y) = 0$ che sarà:
$\overline{y}_1 = k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x + k_3\, x \operatorname{sen} x + k_4\, x \cos x$. Derivando si ha:
$\overline{y}_1' = (k_1 + k_4) \cos x + (-k_2 + k_3) \operatorname{sen} x + k_3\, x \cos x - k_4\, x \operatorname{sen} x$;
$\overline{y}_1'' = (-k_1 - k_4 - k_4) \operatorname{sen} x + (-k_2 + k_3 + k_3) \cos x - k_3\, x \operatorname{sen} x - k_4\, x \cos x$ da cui poi:

$$\overline{y}_1'' + \overline{y}_1 = 2k_3 \cos x - 2k_4 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \Rightarrow \begin{cases} k_3 = 0 \\ k_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases},\ \forall\, k_1, k_2 .$$

Quindi la soluzione particolare relativa a $b_1(x)$ sarà: $\overline{y}_1 = -\dfrac{1}{2}\, x \cos x$.
Consideriamo ora $b_2(x) = \cos 2x$. Esso è annichilato da $\big(\mathcal{D}^2 + 4\big)$, e quindi consideriamo la soluzione generale di $\big(\mathcal{D}^2 + 4\big)(y) = 0$, dato che $\big(\mathcal{D}^2 + 4\big)$ non compare nella fattorizzazione dell'omogenea, ed avremo $\overline{y}_2 = k_5 \operatorname{sen} 2x + k_6 \cos 2x$.
Quindi $\overline{y}_2' = 2k_5 \cos 2x - 2k_6 \operatorname{sen} 2x$ e $\overline{y}_2'' = -4k_5 \operatorname{sen} 2x - 4k_6 \cos 2x$. Sostituendo:

$$\overline{y}_2'' + \overline{y}_2 = -3k_5 \operatorname{sen} 2x - 3k_6 \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} k_5 = 0 \\ k_6 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

, per cui la soluzione particolare relativa a $b_2(x)$ sarà: $\overline{y}_2 = -\dfrac{1}{3} \cos 2x$. La soluzione generale dell'equazione di partenza sarà infine: $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \dfrac{1}{2}\, x \cos x - \dfrac{1}{3} \cos 2x$.

Se avessimo dovuto risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen} x + \cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$, una volta trovata la soluzione generale $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \dfrac{1}{2}\, x \cos x - \dfrac{1}{3} \cos 2x$, basterà imporre le due condizioni per avere: $\begin{cases} 1 = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 - 0 - \dfrac{1}{3} \cdot 1 = 0 \\ 0 = 1 \cdot c_1 - 0 \cdot c_2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot 0 + \dfrac{1}{3} \cdot 0 \end{cases}$ da cui:

$\begin{cases} c_2 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \\ c_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ per ottenere la soluzione particolare:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{4}{3} \cos x - \frac{1}{2}\, x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x .$$

## SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL I ORDINE

Si considerino $n$ equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale, in $n$ funzioni incognite $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Tali equazioni formano un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine che possiamo scrivere come:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + ... + a_{1n-1}(x)\,y_{n-1} + a_{1n}(x)\,y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + ... + a_{2n-1}(x)\,y_{n-1} + a_{2n}(x)\,y_n + b_2(x) \\ \text{.........................................................................................................} \\ y_n' = a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + ... + a_{nn-1}(x)\,y_{n-1} + a_{nn}(x)\,y_n + b_n(x) \end{cases} .$$

Se $b_1(x) = b_2(x) = ... = b_n(x) = 0$ il sistema è detto omogeneo, altrimenti non omogeneo.
Le funzioni $a_{ij}(x)$ che costituiscono i coefficienti delle funzioni incognite $y_1, y_2, ..., y_n$ sono supposte continue in un intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Se $a_{ij}(x) = a_{ij} \in \mathbb{R}$ le equazioni lineari sono dette a coefficienti costanti. Sotto l'ipotesi di continuità sulle $a_{ij}(x)$ vale il seguente Teorema di esistenza ed unicità:
**Teorema** 6 : Se $a_{ij}(x) \in \mathcal{C}([a,b])$ e se $x_0 \in [a,b]$ per il sistema lineare esiste una ed una sola soluzione $(y_1(x),\ y_2(x), ..., y_n(x))$ tale che $(y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0)) = \left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0\right)$.
Posto $\mathbb{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^{\mathrm{T}}$, da cui $\mathbb{Y}' = (y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x))^{\mathrm{T}}$, sia $\mathbb{A}(x)$ la matrice:

$$\mathbb{A}_n(x) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & .... & .... & a_{in} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .... & .... & a_{nn} \end{Vmatrix} \text{ e sia } \mathbb{B}(x) = (b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x))^{\mathrm{T}} .$$

Il sistema può essere allora espresso nella forma: $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}(x) + \mathbb{B}(x)$, dove la trasposta indica che $\mathbb{Y}(x)$, $\mathbb{Y}'(x)$ e $\mathbb{B}(x)$ sono vettori colonna.
Se consideriamo il sistema omogeneo associato, si può vedere come le sue soluzioni formino uno spazio vettoriale di dimensione $n$, e quindi per avere la soluzione generale del sistema omogeneo basta conoscere una base di tale spazio, ovvero $n$ soluzioni linearmente indipendenti.
Infatti, se $\mathbb{Y}_1(x)$ e $\mathbb{Y}_2(x)$ sono due soluzioni del sistema omogeneo, risulta:
$\mathbb{A}(x) \cdot (\alpha \cdot \mathbb{Y}_1(x) + \beta \cdot \mathbb{Y}_2(x)) = \alpha \cdot \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}_1(x) + \beta \cdot \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}_1(x) =$
$= \alpha \cdot \mathbb{Y}_1'(x) + \beta \cdot \mathbb{Y}_2'(x) = (\alpha \cdot \mathbb{Y}_1(x) + \beta \cdot \mathbb{Y}_2(x))'$ e quindi anche $\alpha \cdot \mathbb{Y}_1(x) + \beta \cdot \mathbb{Y}_2(x)$ è una soluzione del sistema omogeneo.
Se $\mathbb{Y}_1(x), \mathbb{Y}_2(x), ..., \mathbb{Y}_n(x)$, con $\mathbb{Y}_i(x) = (y_{1i}(x), y_{2i}(x), ..., y_{ni}(x))$, sono $n$ soluzioni del sistema omogeneo, essere linearmente indipendenti significa che:
$c_1\,\mathbb{Y}_1 + c_2\,\mathbb{Y}_2 + ... + c_n\,\mathbb{Y}_n = 0$ se e solo se $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.
Formata la matrice $\mathbb{M}(x), n \times n$ avente $\mathbb{Y}_1(x), \mathbb{Y}_2(x), ..., \mathbb{Y}_n(x)$ come colonne, avremo che le $n$ soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se $|\mathbb{M}(x)| \neq 0$.

Passando al caso di un sistema lineare non omogeneo, vediamo come la sua soluzione generale si ottenga sommando una soluzione particolare del sistema non omogeneo alla soluzione generale del sistema omogeneo.
Sia $\mathbb{Y}(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{K}, \mathbb{K} \in \mathbb{R}^n$ la soluzione generale del sistema omogeneo, e sia $\overline{\mathbb{Y}}_0(x)$ una soluzione del sistema non omogeneo, per cui risulta:
$\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}(x)$ e $\overline{\mathbb{Y}}_0'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \overline{\mathbb{Y}}_0(x) + \mathbb{B}(x)$ .
Vediamo che $\mathbb{Y}(x) + \overline{\mathbb{Y}}_0(x)$ è soluzione del sistema non omogeneo. Infatti:
$\left(\mathbb{Y}(x) + \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\right)' = \mathbb{Y}'(x) + \overline{\mathbb{Y}}_0'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}(x) + \mathbb{A}(x) \cdot \overline{\mathbb{Y}}_0(x) + \mathbb{B}(x)$ per cui:
$\left(\mathbb{Y}(x) + \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\right)' = \mathbb{A}(x) \cdot \left(\mathbb{Y}(x) + \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\right) + \mathbb{B}(x)$ e quindi la tesi.

Supponendo ora che $\mathbb{Y}(x)$ e $\overline{\mathbb{Y}}_0(x)$ siano due soluzioni del sistema non omogeneo, vediamo che $\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x)$ risulta essere soluzione del sistema omogeneo.
Infatti, da $\left(\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\right)' = \mathbb{Y}'(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0'(x)$ segue:

$\mathbb{Y}'(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}(x) + \mathbb{B}(x) - \big(\mathbb{A}(x) \cdot \overline{\mathbb{Y}}_0(x) + \mathbb{B}(x)\big) = \mathbb{A}(x) \cdot \big(\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\big)$ cioè: $\big(\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\big)' = \mathbb{A}(x) \cdot \big(\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x)\big)$, ovvero $\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x)$ è soluzione del sistema omogeneo.
Sarà quindi $\mathbb{Y}(x) - \overline{\mathbb{Y}}_0(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{K}$ da cui infine $\mathbb{Y}(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{K} + \overline{\mathbb{Y}}_0(x)$ quale soluzione generale del sistema non omogeneo.

Vediamo infine come trovare una soluzione particolare per il sistema non omogeneo.
Poniamo $\mathbb{Y}(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}(x)$, con $\mathbb{C}(x) = (c_1(x), c_2(x), ...c_n(x))$ vettore colonna di dimensione $n$, ottenendo: $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{M}'(x) \cdot \mathbb{C}(x) + \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}'(x)$ dalla quale, sostituendo nell'equazione $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{Y}(x) + \mathbb{B}(x)$ si ha:
$\mathbb{M}'(x) \cdot \mathbb{C}(x) + \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}'(x) = \mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}(x) + \mathbb{B}(x)$.
Ma $\mathbb{A}(x) \cdot \mathbb{M}(x) = \mathbb{M}'(x)$ in quanto $\mathbb{M}(x)$ è formata da soluzioni del sistema omogeneo, e quindi: $\mathbb{M}'(x) \cdot \mathbb{C}(x) + \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}'(x) = \mathbb{M}'(x) \cdot \mathbb{C}(x) + \mathbb{B}(x)$ dalla quale poi
$\mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}'(x) = \mathbb{B}(x)$ e quindi infine $\mathbb{C}'(x) = \mathbb{M}^{-1}(x) \cdot \mathbb{B}(x)$.
L'esistenza di $\mathbb{M}^{-1}(x)$ è assicurata dall'essere $|\mathbb{M}(x)| \neq 0$.
Per avere una soluzione particolare del sistema non omogeneo, integrando si ha:
$\mathbb{C}(x) = \displaystyle\int \mathbb{M}^{-1}(x) \cdot \mathbb{B}(x)\, dx$ da cui otteniamo poi, avendo posto $\mathbb{Y}(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{C}(x)$:
$\mathbb{Y}(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \displaystyle\int \mathbb{M}^{-1}(x) \cdot \mathbb{B}(x)\, dx$.
Per avere invece la soluzione generale del sistema lineare non omogeneo, da:
$\mathbb{C}'(x) = \mathbb{M}^{-1}(x) \cdot \mathbb{B}(x)$ otteniamo $\mathbb{C}(x) = \displaystyle\int \mathbb{M}^{-1}(x) \cdot \mathbb{B}(x)\, dx + \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^n$ vettore di costanti arbitrarie, per avere infine $\mathbb{Y}(x) = \mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{K} + \mathbb{M}(x) \cdot \displaystyle\int \mathbb{M}^{-1}(x) \cdot \mathbb{B}(x)\, dx$.
Il termine $\mathbb{M}(x) \cdot \mathbb{K}$ rappresenta ovviamente la soluzione generale del sistema omogeneo.
Per i sistemi lineari non possiamo che ripetere, per quanto riguarda la loro esplicita risolvibilità, quanto già detto per le equazioni lineari: solo se i coefficienti $a_{ij}(x)$ sono costanti siamo in grado di trovare (quasi) sempre le $n$ soluzioni linearmente indipendenti.

**Sistemi di equazioni lineari del I ordine a coefficienti costanti**
Sono i sistemi esprimibili nella forma $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{Y}(x) + \mathbb{B}(x)$, dove $\mathbb{A}$ è una matrice $n \times n$ ad elementi reali costanti. Vari sono i metodi che si possono utilizzare per trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Iniziamo la trattazione dei sistemi lineari a coefficienti costanti esaminando il caso di sistemi di due equazioni in due incognite, per poi passare a trattare il caso dei sistemi di tre equazioni, e con questi concluderemo l'argomento.

<u>Sistemi di due equazioni lineari del I ordine a coefficienti costanti</u>
Adeguando la notazione, per brevità siano $x(t)$ e $y(t)$ le due funzioni incognite, avendo indicato con $t$ la variabile indipendente. Consideriamo un sistema lineare omogeneo:
$\begin{cases} x' = a_{11}\, x(t) + a_{12}\, y(t) \\ y' = a_{21}\, x(t) + a_{22}\, y(t) \end{cases}$, che scriviamo per brevità come $\begin{cases} x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y \\ y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y \end{cases}$.
Derivando la prima equazione otteniamo: $x'' = a_{11}\, x' + a_{12}\, y'$.
Dalla seconda equazione risulta $y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y$ per cui, sostituendo:
$x'' = a_{11}\, x' + a_{12}\,(a_{21}\, x + a_{22}\, y) \Rightarrow x'' = a_{11}\, x' + a_{12}\, a_{21}\, x + a_{12}\, a_{22}\, y$.
Dalla prima equazione si ricava $y$: $y = \dfrac{1}{a_{12}}\, x' - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}\, x$ per cui sostituendo si ha:

$x'' = a_{11}\, x' + a_{12}\, a_{21}\, x + a_{12}\, a_{22} \left( \dfrac{1}{a_{12}}\, x' - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}\, x \right)$ per avere infine:
$x'' - (a_{11} + a_{22})\, x' + (a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})\, x = 0$ esprimibile come:
$x'' - \mathrm{Tr}(\mathbb{A})\, x' + \mathrm{Det}(\mathbb{A})\, x = 0$, dove $\mathrm{Tr}(\mathbb{A})$ e $\mathrm{Det}(\mathbb{A})$ sono rispettivamente la Traccia ed il Determinante della matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$.
Si risolve questa equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine, trovando così la soluzione generale per $x(t)$, e dalla $y = \dfrac{1}{a_{12}}\, x' - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}\, x$ si ricava infine la soluzione generale per $y(t)$.
Questa procedura non è valida se fosse $a_{12} = 0$, nel qual caso però l'equazione $x' = a_{11}\, x$ è di immediata soluzione: $x(t) = e^{a_{11}\, t}$, e sostituendo nella $y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y$ si ricava la $y(t)$.

**Esempio** 36 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = \, -3x + 5y \end{cases}$.
Derivando la prima equazione abbiamo: $x'' = x' + y' = x' + 5y - 3x$; ma $y = x' - x$, per cui $x'' = x' + 5x' - 5x - 3x \Rightarrow x'' - 6x' + 8x = 0$. Passando al polinomio caratteristico avremo $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$ e quindi $x = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{4t}$. Ma $y = x' - x$ per cui $y = 2c_1\, e^{2t} + 4c_2\, e^{4t} - c_1\, e^{2t} - c_2\, e^{4t} = c_1\, e^{2t} + 3c_2\, e^{4t}$. Avremo poi:
$|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & 3e^{4t} \end{vmatrix} = 2e^{6t} \neq 0,\ \forall\, t$, e quindi le due soluzioni $(e^{2t}, e^{2t})$ e $\left(e^{4t}, 3e^{4t}\right)$ costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni di questo sistema lineare omogeneo.

**Esempio** 37 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$.
Derivando la prima equazione abbiamo: $x'' = 3x' - y' = 3x' - x - y$; ma $y = 3x - x'$, per cui $x'' = 3x' - x - 3x + x' \Rightarrow x'' - 4x' + 4x = 0$. Passando al polinomio caratteristico avremo $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ e quindi $x = c_1\, e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t}$, essendo $\lambda = 2$ soluzione doppia. Ma $y = 3x - x'$ per cui:
$y = 3c_1\, e^{2t} + 3c_2\, t\, e^{2t} - 2c_1\, e^{2t} - c_2\, e^{2t} - 2c_2\, t\, e^{2t} = c_1\, e^{2t} + c_2(t-1)\, e^{2t}$.
Avremo poi: $|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^{2t} & t\, e^{2t} \\ e^{2t} & (t-1)\, e^{2t} \end{vmatrix} = \, -e^{4t} \neq 0,\ \forall\, t$, e quindi le due soluzioni $(e^{2t}, e^{2t})$ e $(t\, e^{2t}, (t-1)\, e^{2t})$ costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni di questo sistema lineare omogeneo.

**Esempio** 38 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = \, -x + y \end{cases}$.
Derivando la prima equazione si ha: $x'' = 3x' + 2y' = 3x' - 2x + 2y$; ma $y = \dfrac{1}{2}\, x' - \dfrac{3}{2}\, x$, per cui $x'' = 3x' - 2x + x' - 3x \Rightarrow x'' - 4x' + 5x = 0$. Passando al polinomio caratteristico avremo $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ che ha le radici complesse $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ e quindi da queste otteniamo:
$x = c_1\, e^{2t}\, \mathrm{sen}\, t + c_2\, e^{2t} \cos t$. Ma $y = \dfrac{1}{2}\, x' - \dfrac{3}{2}\, x$ per cui, sostituendo, si ottiene:
$y = \dfrac{1}{2}\, c_1\, e^{2t}\, (\cos t - \mathrm{sen}\, t) - \dfrac{1}{2}\, c_2\, e^{2t}\, (\cos t + \mathrm{sen}\, t)$. Avremo poi:

$|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t & e^{2t}\cos t \\ \dfrac{1}{2}\,e^{2t}\,(\cos t - \mathrm{sen}\,t) & -\dfrac{1}{2}\,e^{2t}\,(\cos t + \mathrm{sen}\,t) \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}\,e^{4t} \neq 0,\ \forall\, t$, e quindi le due soluzioni $\left(e^{2t}\,\mathrm{sen}\,t, \dfrac{1}{2}\,e^{2t}\,(\cos t - \mathrm{sen}\,t)\right)$ e $\left(e^{2t}\cos t,\ -\dfrac{1}{2}\,e^{2t}\,(\cos t + \mathrm{sen}\,t)\right)$ costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni di questo sistema lineare omogeneo.

**Esempio** 39 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x - y \end{cases}$.
Non si può seguire la stessa procedura dei casi precedenti in quanto $a_{12} = 0$. Da $x' = 2x$ si ricava $(\mathcal{D} - 2)(x) = 0$ che ha per soluzione generale $x = c_1\,e^{2t}$. Allora $y' + y = c_1\,e^{2t}$ per cui avremo, integrando:
$y = e^{-t}\left(\displaystyle\int c_1\,e^{2t} \cdot e^t dt + c_2\right) = e^{-t}\left(\dfrac{1}{3}\,c_1\,e^{3t} + c_2\right) = \dfrac{1}{3}\,c_1\,e^{2t} + c_2\,e^{-t}$. Avremo poi:
$|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ \dfrac{1}{3}\,e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} = e^t \neq 0,\ \forall\, t$, e quindi le due soluzioni $\left(e^{2t}, \dfrac{1}{3}\,e^{2t}\right)$ e $\left(0, e^{-t}\right)$ costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni di questo sistema lineare omogeneo.
Oppure, derivando la seconda equazione si ha: $y'' = x' - y' = 2x - y' = y' + 2y$ ovvero:
$y'' - y' - 2y = (\mathcal{D} - 2)(\mathcal{D} + 1)(y) = 0$ e quindi $y = k_1\,e^{2t} + k_2\,e^{-t}$. Infine:
$x = y' + y = 2k_1\,e^{2t} - k_2\,e^{-t} + k_1\,e^{2t} + k_2\,e^{-t} = 3k_1\,e^{2t}$.
Le soluzioni trovate sono le stesse di prima, basta porre $c_1 = 3k_1$.

Risolviamo ora i sistemi precedenti usando una diversa metodologia.
Dato il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y \\ y' = a_{21}\,x + a_{22}\,y \end{cases}$, scriviamolo in forma matriciale come:
$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$.
Ipotizziamo che esso ammetta, visto che le equazioni sono lineari, una soluzione del tipo:
$(x(t), y(t)) = \left(a\,e^{\lambda t}, b\,e^{\lambda t}\right)$, con $a, b, \lambda$ valori opportuni da determinare. Sostituendo avremo:
$\begin{Vmatrix} a\lambda\,e^{\lambda t} \\ b\lambda\,e^{\lambda t} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a\,e^{\lambda t} \\ b\,e^{\lambda t} \end{Vmatrix}$ che può riscriversi come:
$\begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a\,e^{\lambda t} \\ b\,e^{\lambda t} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} \cdot e^{\lambda t} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$.
Quindi il problema può essere ricondotto alla determinazione degli autovalori della matrice $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$. Una volta trovati gli autovalori, sostituendoli in $\|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}\|$, si passa alla determinazione delle costanti $a$ e $b$.

**Esempio** 36 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$.
Essendo $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{Vmatrix}$ avremo $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$.
Quindi gli autovalori sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$.
Per $\lambda = 2$ si ha: $\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b$;

Per $\lambda = 4$ si ha: $\left\|\begin{matrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\| = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 3a\,.$

Si hanno quindi le soluzioni $\left(c_1\, e^{2t}, c_1\, e^{2t}\right)$ e $\left(c_2\, e^{4t}, 3c_2\, e^{4t}\right)$, ovvero le stesse trovate in precedenza.

Si poteva anche porre $x = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{4t}$ e ricavarsi la $y$ come fatto in precedenza.

**Esempio** 37 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}.$

Essendo $\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$ avremo $\left|\begin{matrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{matrix}\right| = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0\,.$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\,.$

Per $\lambda = 2$ si ha: $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\| = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b\,.$

Quindi si è trovata la soluzione $\left(c_1\, e^{2t}, c_1\, e^{2t}\right)$. Per determinare la seconda soluzione della base, bisogna ipotizzarla nella forma $((\alpha_1 + \beta_1 t)\, e^{2t}, (\alpha_2 + \beta_2 t)\, e^{2t})$. Non basta, cioè, come per le equazioni lineari, moltiplicare per $t$, ma occorre moltiplicare la parte esponenziale, in questo caso $e^{2t}$, per un polinomio completo di I grado: $\alpha + \beta\, t$. Sostituendo queste espressioni nel sistema di equazioni differenziali, dividendo per $e^{2t}$ si trova:

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1\, t = 3\alpha_1 + 3\beta_1\, t - \alpha_2 - \beta_2\, t \\ \beta_2 + 2\alpha_2 + 2\beta_2\, t = \alpha_1 + \beta_1\, t + \alpha_2 + \beta_2\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\alpha_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 \\ 2\beta_1 = 3\beta_1 - \beta_2 \\ \beta_2 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\beta_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases} \text{ e quindi:}$$

$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$. Se scegliamo $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -1$ si ottengono le soluzioni:

$\begin{cases} x = t\, e^{2t} \\ y = (t-1)\, e^{2t} \end{cases}$ trovate con la precedente procedura.

**Esempio** 38 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases}.$

Essendo $\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right\|$ avremo $\left|\begin{matrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{matrix}\right| = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ che ha le radici complesse $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Per $\lambda = 2 + i$ si ha:

$\left\|\begin{matrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\| = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} (1-i)\, a + 2b = 0 \\ -a - (1+i)\, b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \dfrac{i-1}{2}\, a\,.$

Avremo allora $e^{(2+i)\,t} = e^{2t}\,(\cos t + i \operatorname{sen} t) = \left(e^{2t} \cos t\right) + i\left(e^{2t} \operatorname{sen} t\right)$;

$$\frac{i-1}{2}\, e^{(2+i)\,t} = \left(-\frac{1}{2}\, e^{2t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\, e^{2t} \cos t\right) + i\left(\frac{1}{2}\, e^{2t} \cos t - \frac{1}{2}\, e^{2t} \operatorname{sen} t\right).$$

Se prendiamo i due coefficienti delle parti immaginarie e poi i due coefficienti delle parti reali, riotteniamo le soluzioni trovate con l'altra procedura.

**Esempio** 39 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x - y \end{cases}.$

Da $\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\|$ avremo $\left|\begin{matrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{matrix}\right| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ che ha le radici $\lambda = -1$ e $\lambda = 2\,.$

Per $\lambda = -1$ si ha: $\left\|\begin{matrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\| = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, \forall\, b\,.$

Per $\lambda = 2$ si ha: $\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\| = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \dfrac{1}{3}\, a$.

Abbiamo le due soluzioni già trovate $\left(0, c_2\, e^{-t}\right)$ e $\left(c_1\, e^{2t}, \dfrac{1}{3}\, c_1\, e^{2t}\right)$.

Da un primo sommario esame comparativo la riduzione ad una equazione lineare del secondo ordine sembra un metodo preferibile se le equazioni sono due, mentre la ricerca degli autovalori sembrerebbe preferibile quando il numero delle equazioni è maggiore, almeno che casi particolari, come quello dell'Esempio 39, non indirizzino verso altre, più rapide, metodologie.
Comunque ambedue le metodologie hanno portato alla ricerca delle radici dello stesso polinomio $x'' - \text{Tr}(\mathbb{A})\, x' + \text{Det}(\mathbb{A})\, x = 0$, e questa circostanza non è assolutamente casuale.

Vediamo infine una terza metodologia di risoluzione, magari debole dal punto di vista della giustificazione teorica, ma molto utile dal punto di vista pratico e applicabile, in caso di bisogno, anche a sistemi non del primo ordine, sia omogenei che non omogenei.

Riprendiamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y \\ y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y \end{cases}$ che scriviamo ora come:
$\begin{cases} x' - a_{11}\, x - a_{12}\, y = 0 \\ -a_{21}\, x + y' - a_{22}\, y = 0 \end{cases}$ e quindi come: $\begin{cases} (\mathcal{D} - a_{11})\,(x) - a_{12}\, y = 0 \\ -a_{21}\, x + (\mathcal{D} - a_{22})\,(y) = 0 \end{cases}$.
Consideriamo, in analogia al caso dei sistemi lineari, la matrice $\left\| \begin{matrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{matrix} \right\|$ come la matrice dei coefficienti delle incognite.
Se, essendo il sistema omogeneo, risolvessimo mediante la Regola di Cramer, avremmo:
$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix}}$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & 0 \\ -a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix}}$, che equivalgono a porre:
$\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix} \cdot x = 0$ e $\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix} \cdot y = 0$, dalle quali otteniamo:
$((\mathcal{D} - a_{11})(\mathcal{D} - a_{22}) - a_{12}a_{21})(x) = \left(\mathcal{D}^2 - \text{Tr}(\mathbb{A})\, \mathcal{D} + \text{Det}(\mathbb{A})\right)(x) = 0$ e analogamente per la $y$: $((\mathcal{D} - a_{11})(\mathcal{D} - a_{22}) - a_{12}a_{21})(y) = \left(\mathcal{D}^2 - \text{Tr}(\mathbb{A})\, \mathcal{D} + \text{Det}(\mathbb{A})\right)(y) = 0$.
Come si vede si riporta il problema alla stessa equazione del secondo ordine che avremmo trovato con le metodologie precedenti, quella della riduzione a equazione di ordine superiore e quella degli autovalori.
Si può trovare così la soluzione per $x(t)$ e da questa calcolarsi quella per $y(t)$, oppure, come nel prossimo esempio, seguire anche una strada alternativa.

**Esempio** 40 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$ che può essere riscritto come $\begin{cases} (\mathcal{D} - 1)(x) - 3y = 0 \\ -x + (\mathcal{D} + 1)(y) = 0 \end{cases}$. Quindi:
$\begin{vmatrix} \mathcal{D} - 1 & -3 \\ -1 & \mathcal{D} + 1 \end{vmatrix}(x) = \left(\mathcal{D}^2 - 4\right)(x) = (\mathcal{D} - 2)(\mathcal{D} + 2)(x) = 0$. Otteniamo quindi:
$x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-2t}$. In maniera analoga otteniamo anche $y(t) = k_1\, e^{2t} + k_2\, e^{-2t}$, dato che l'equazione del II ordine non può che risultare la stessa. Per avere la soluzione del sistema occorre stabilire il legame che intercorre tra le costanti $c_1$ e $c_2$ e le costanti $k_1$ e $k_2$.

Per fare questo sostituiamo, ad esempio nella prima equazione $x' = x + 3y$ ed avremo:
$2c_1\, e^{2t} - 2c_2\, e^{-2t} = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-2t} + 3k_1\, e^{2t} + 3k_2\, e^{-2t}$, che comporta $\begin{cases} c_1 = 3k_1 \\ -3c_2 = 3k_2 \end{cases}$ da cui quindi $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{3}\, c_1 \\ k_2 = -\, c_2 \end{cases}$. La soluzione del sistema sarà quindi $\begin{cases} x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2\, e^{-2t} \\ y(t) = \frac{1}{3}\, c_1\, e^{2t} - c_2\, e^{-2t} \end{cases}$.

Controlliamo: $|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ \frac{1}{3}\, e^{2t} & -\, e^{-2t} \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \neq 0,\ \forall\, t$.

**Sistemi di equazioni lineari del I ordine a coefficienti costanti non omogenei**
Rimanendo nell'ambito dei sistemi di due equazioni avremo, scrivendo il sistema in forma matriciale: $\left\|\begin{matrix} x'(t) \\ y'(t) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{matrix}\right\|$.
Se $\mathbb{M} = \left\|\begin{matrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{matrix}\right\|$ è la matrice avente per colonne una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato, abbiamo già visto in precedenza come la soluzione del sistema non omogeneo possa essere ricavata mediante la formula:

$$\mathbb{Y}(t) = \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{K} + \mathbb{M}(t) \cdot \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t)\, dt$$

che ora riscriviamo come:

$$\left\|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{matrix}\right\| \cdot \int \left\|\begin{matrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{matrix}\right\|^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{matrix}\right\| dt.$$

Questa procedura vale ovviamente anche per sistemi con più di due equazioni.

**Esempio** 41 : Risolviamo il sistema lineare non omogeneo $\begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = 4x - 3y + e^{-t} \end{cases}$.

Risolviamo anzitutto il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ con il metodo degli autovalori.

Essendo $\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{matrix}\right\|$ avremo:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0\,.$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Avremo allora $x(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-2t}$.
Dalla prima equazione $y = 2x - x'$ e quindi $y(t) = c_1\, e^t + 4c_2\, e^{-2t}$.
Passiamo alla soluzione del sistema lineare non omogeneo.
Sarà $\mathbb{M}(t) = \left\|\begin{matrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{matrix}\right\|$ da cui $|\mathbb{M}(t)| = 3\, e^{-t} \neq 0,\ \forall\, t$ per avere infine:

$\mathbb{M}^{-1}(t) = \left\|\begin{matrix} \frac{4}{3}\, e^{-t} & -\frac{1}{3}\, e^{-t} \\ -\frac{1}{3}\, e^{2t} & \frac{1}{3}\, e^{2t} \end{matrix}\right\|$. Per trovare una soluzione particolare avremo:

$$\mathbb{M}(t) \cdot \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t)\, dt = \left\|\begin{matrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{matrix}\right\| \cdot \int \left\|\begin{matrix} \frac{4}{3}\, e^{-t} & -\frac{1}{3}\, e^{-t} \\ -\frac{1}{3}\, e^{2t} & \frac{1}{3}\, e^{2t} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} e^t \\ e^{-t} \end{matrix}\right\| dt =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{matrix} \right\| \cdot \int \left\| \begin{matrix} \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\, e^{-2t} \\ -\dfrac{1}{3}\, e^{3t} + \dfrac{1}{3}\, e^t \end{matrix} \right\| dt = \left\| \begin{matrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{4}{3}\, t + \dfrac{1}{6}\, e^{-2t} \\ -\dfrac{1}{9}\, e^{3t} + \dfrac{1}{3}\, e^t \end{matrix} \right\| =$$

$= \left\| \begin{matrix} \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{-t} - \dfrac{1}{9}\, e^t \\ \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{3}{2}\, e^{-t} - \dfrac{4}{9}\, e^t \end{matrix} \right\|$, per cui la soluzione generale del sistema lineare non omogeneo sarà data da: $\begin{cases} x(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{-t} - \dfrac{1}{9}\, e^t \\ y(t) = c_1\, e^t + 4c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{3}{2}\, e^{-t} - \dfrac{4}{9}\, e^t \end{cases}$ che si può riscrivere come: $\begin{cases} x(t) = \left(c_1 - \dfrac{1}{9}\right) e^t + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{-t} \\ y(t) = \left(c_1 - \dfrac{4}{9}\right) e^t + 4c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{3}{2}\, e^{-t} \end{cases}$ oppure, posto $c_1 - \dfrac{1}{9} = k_1$, come:

$$\begin{cases} x(t) = k_1\, e^t + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{-t} \\ y(t) = \left(k_1 - \dfrac{1}{3}\right) e^t + 4c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{3}{2}\, e^{-t} \end{cases}.$$

Risolviamo nuovamente questo sistema non omogeneo usando un'altra metodologia. Per introdurla, torniamo al sistema espresso come:

$$\begin{cases} x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y + b_1(t) \\ y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y + b_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{D} - a_{11})\, x - a_{12}\, y = b_1(t) \\ -a_{21}\, x + (\mathcal{D} - a_{22})\, y = b_2(t) \end{cases}.$$

Applicando formalmente la Regola di Cramer avremo:

$x(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1(t) & -a_{12} \\ b_2(t) & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix}}$ e $y(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & b_1(t) \\ -a_{21} & b_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix}}$ che riscriviamo come:

$\begin{cases} \begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix} \cdot (x) = \begin{vmatrix} b_1(t) & -a_{12} \\ b_2(t) & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \mathcal{D} - a_{22} \end{vmatrix} \cdot (y) = \begin{vmatrix} \mathcal{D} - a_{11} & b_1(t) \\ -a_{21} & b_2(t) \end{vmatrix} \end{cases}$ che, sviluppate, portano a due equazioni non omogenee del II ordine, risolvendo le quali otteniamo la soluzione generale del sistema lineare non omogeneo.

Applichiamo questa procedura al sistema non omogeneo risolto in precedenza nell'Esempio 41, ed avremo:

$\begin{vmatrix} \mathcal{D} - 2 & 1 \\ -4 & \mathcal{D} + 3 \end{vmatrix} \cdot (x) = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ e^{-t} & \mathcal{D} + 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(\mathcal{D}^2 + \mathcal{D} - 2\right)(x) = (\mathcal{D} + 3)\, e^t - e^{-t}$ da cui:

$x'' + x' - 2x = 4e^t - e^{-t}$. L'equazione omogenea ha soluzione generale $x = c_1\, e^t + c_2\, e^{-2t}$.
Il termine noto $4e^t - e^{-t}$ è annichilato da $(\mathcal{D} + 1)(\mathcal{D} - 1)$, ed il fattore $(\mathcal{D} - 1)$ è presente anche nell'equazione omogenea.
Dobbiamo formulare allora una soluzione particolare del tipo: $\overline{x} = a\, e^t + bt\, e^t + c\, e^{-t}$.
Sarà $\overline{x}' = a\, e^t + b\, e^t + bt\, e^t - c\, e^{-t} = (a + b)\, e^t + bt\, e^t - c\, e^{-t}$ ed inoltre:
$\overline{x}'' = (a + b)\, e^t + b\, e^t + bt\, e^t + c\, e^{-t} = (a + 2b)\, e^t + bt\, e^t + c\, e^{-t}$. Sostituendo avremo:
$(a + 2b)\, e^t + bt\, e^t + c\, e^{-t} + (a + b)\, e^t + bt\, e^t - c\, e^{-t} - 2a\, e^t - 2bt\, e^t - 2c\, e^{-t} =$

$= 4e^t - e^{-t}$ da cui otteniamo: $\begin{cases} 3b\, e^t = 4e^t \\ -2c\, e^{-t} = -e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{3} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

per cui la soluzione particolare sarà $\overline{x} = \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{-t}$, e la soluzione generale sarà data da:

$x(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{-t}$.

Passando alla $y$ possiamo analogamente utilizzare l'uguaglianza:

$\begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & 1 \\ -4 & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix} \cdot (y) = \begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & e^t \\ -4 & e^{-t} \end{vmatrix}$ che porta all'equazione non omogenea del II ordine:

$y'' + y' - 2y = 4e^t - 3e^{-t}$. Risolvendola, avremo la soluzione generale:

$y(t) = k_1\, e^t + k_2\, e^{-2t} + \dfrac{4}{3}\, t\, e^t + \dfrac{3}{2}\, e^{-t}$.

Sostituendo nella prima equazione si vede che deve risultare:

$\begin{cases} k_1 = c_1 - \dfrac{1}{3} \\ k_2 = 4c_2 \end{cases}$, cosicchè si ritrova la soluzione già trovata con l'altra procedura.

**Esempio** 42 : Risolviamo il sistema lineare non omogeneo $\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = -4x + 4y + 2t \end{cases}$.

Risolviamo con la $\begin{vmatrix} \mathcal{D} & -1 \\ 4 & \mathcal{D}-4 \end{vmatrix} \cdot (x) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2t & \mathcal{D}-4 \end{vmatrix}$ da cui:

$\left(\mathcal{D}^2 - 4\mathcal{D} + 4\right)(x) = (\mathcal{D}-4)(-2) + 2t = 0 + 8 + 2t \Rightarrow x'' - 4x' + 4x = 2t + 8$.

Essendo $\left(\mathcal{D}^2 - 4\mathcal{D} + 4\right) = (\mathcal{D}-2)^2$, sarà $x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2 t\, e^{2t}$ la soluzione generale dell'omogenea. Come soluzione particolare per la non omogenea prendiamo $\overline{x} = at + b$, da cui sostituendo abbiamo: $0 - 4a + 4at + 4b = 2t + 8$ da cui ricaviamo $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} \end{cases}$, per cui la soluzione per la $x$ sarà $x(t) = c_1\, e^{2t} + c_2 t\, e^{2t} + \dfrac{1}{2}\, t + \dfrac{5}{2}$.

Per ricavare la soluzione relativa alla $y$ usiamo la prima equazione, che ci da:

$y(t) = x' + 2 = 2c_1\, e^{2t} + c_2(1+2t)\, e^{2t} + \dfrac{5}{2}$.

**Sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti di tre o più equazioni**

Scriviamo un sistema lineare non omogeneo di tre equazioni nella forma:

$$\begin{cases} x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + b_1(t) \\ y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + b_2(t) \\ z' = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + b_3(t) \end{cases}$$

nelle tre funzioni incognite $x(t), y(t)$ e $z(t)$.

In analogia al caso del sistema di due equazioni, si dovrà anzitutto procedere alla risoluzione del sistema omogeneo associato:

$\begin{cases} x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z \\ y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z \\ z' = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z \end{cases}$ che riscriviamo come: $\begin{cases} x' = f_1(x,y,z) \\ y' = g_1(x,y,z) \\ z' = h_1(x,y,z) \end{cases}$.

La prima metodologia di risoluzione consiste nel ricavare dal sistema, derivando e sostituendo, una equazione lineare del terzo ordine nell'incognita $x(t)$ (oppure $y(t)$ o $z(t)$).

Descriviamo questa procedura.

Derivando le prime due equazioni otteniamo: $\begin{cases} x'' = f_2(x', y', z') \\ y'' = g_2(x', y', z') \end{cases}$.

Mediante l'equazione $z' = h_1(x, y, z)$ sostituiamo $z'$ ed otteniamo: $\begin{cases} x'' = f_3(x', y', x, y, z) \\ y'' = g_3(x', y', x, y, z) \end{cases}$.

Se $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, dalle prime due equazioni originarie possiamo ricavare $y$ e $z$ ottenendo: $\begin{cases} y = h(x', y', x) \\ z = k(x', y', x) \end{cases}$.

Sostituendo otteniamo $\begin{cases} x'' = f_4(x', y', x) \\ y'' = g_4(x', y', x) \end{cases}$.

Derivando la prima di queste due equazioni otteniamo: $x''' = f_5(x'', y'', x')$.
Sostituiamo $y''$ dalla $y'' = g_4(x', y', x)$ ottenendo $x''' = f_6(x'', x', y', x)$.
Ricaviamo $y'$ dalla $x'' = f_4(x', y', x)$ ottenendo $y' = g_5(x'', x', x)$ e sostituendo otteniamo: $x''' = f_7(x'', x', x)$ che è l'equazione lineare del terzo ordine con cui si ricava la soluzione generale per $x(t)$. Trovata questa, dalla $y' = g_5(x'', x', x)$ ricavo, sostituendo e poi integrando, la soluzione generale relativa a $y(t)$. Infine, dalla $z = k(x', y', x)$, si ricava direttamente la soluzione generale relativa a $z(t)$.
Se il sistema lineare è non omogeneo, una volta trovata la soluzione generale dell'omogeneo associato, vale la:
$\begin{Vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Vmatrix} = \mathbb{M} \cdot \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Vmatrix} + \mathbb{M} \cdot \int \mathbb{M}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{Vmatrix} dt$, che ci fornisce la soluzione generale del sistema non omogeneo. $\mathbb{M}$ è la matrice $\begin{Vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \end{Vmatrix}$ avente per colonne le soluzioni che formano una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo, e $c_1, c_2$ e $c_3$ sono tre costanti arbitrarie.

**Esempio** 43 : Risolviamo il sistema lineare $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z + e^t \\ y' = 3y - 2z + 1 \\ z' = 3x + y - 3z + e^{-t} \end{cases}$.

Iniziamo risolvendo il sistema omogeneo $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z \\ y' = 3y - 2z \\ z' = 3x + y - 3z \end{cases}$, portando tutto ad una equazione lineare del III ordine nell'incognita $x(t)$.
Eseguendo la procedura sopra descritta avremo:
$\begin{cases} x'' = 2x' + y' - 2z' \\ y'' = 3y' - 2z' \end{cases}$, ma $z' = 3x + y - 3z$ da cui: $\begin{cases} x'' = 2x' + y' - 6x - 2y + 6z \\ y'' = 3y' - 6x - 2y + 6z \end{cases}$.

Dalla I e dalla II equazione si ricava $\begin{cases} y - 2z = x' - 2x \\ 3y - 2z = y' \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} y - 3y + y' = x' - 2x \\ 2z = 3y - y' \end{cases}$

da cui $\begin{cases} 2y = y' - x' + 2x \\ 2z = 3y - y' \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\, y' - \dfrac{1}{2}\, x' + x \\ z = \dfrac{1}{4}\, y' - \dfrac{3}{4}\, x' + \dfrac{3}{2}\, x \end{cases}$ e sostituendo abbiamo:

$\begin{cases} x'' = -\dfrac{3}{2}\,x' + \dfrac{3}{2}\,y' + x \\ y'' = -\dfrac{7}{2}\,x' + \dfrac{7}{2}\,y' + x \end{cases}$. Deriviamo la prima di queste due equazioni ed otteniamo:

$x''' = -\dfrac{3}{2}x'' + \dfrac{3}{2}y'' + x'$; sostituendo $y''$ abbiamo:

$x''' = -\dfrac{3}{2}x'' + \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{7}{2}x' + \dfrac{7}{2}y' + x\right) + x' = -\dfrac{3}{2}x'' - \dfrac{17}{4}x' + \dfrac{21}{4}y' + \dfrac{3}{2}x$.

Dalla $x'' = -\dfrac{3}{2}x' + \dfrac{3}{2}y' + x$ ricaviamo $y' = \dfrac{2}{3}x'' + x' - \dfrac{2}{3}x$, e sostituendo otteniamo infine: $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$. Il suo polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ che ha le radici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$, per cui la soluzione generale per $x(t)$ sarà:

$x(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} + c_3\,e^{2t}$.

Dalla $y' = \dfrac{2}{3}x'' + x' - \dfrac{2}{3}x$ otteniamo $y' = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} + 4c_3\,e^{2t}$ da cui, integrando:

$y(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} + 2c_3\,e^{2t}$ (occorrono solo 3 costanti arbitrarie).

Infine, dalla seconda equazione del sistema $y' = 3y - 2z$ otteniamo $z = \dfrac{1}{2}(3y - y')$ e quindi $z(t) = c_1\,e^t + 2c_2\,e^{-t} + c_3\,e^{2t}$.

Le soluzioni $\begin{cases} (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (e^t, e^{-t}, e^{2t}) \\ (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = (e^t, e^{-t}, 2e^{2t}) \\ (z_1(t), z_2(t), z_3(t)) = (e^t, 2e^{-t}, e^{2t}) \end{cases}$ consentono di realizzare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo, infatti:

$|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix} = -e^{2t}(2-1) = -e^{2t} \neq 0, \ \forall\, t$, e quindi le soluzioni trovate sono linearmente indipendenti.

Da $\mathbb{M}(t) = \left\|\begin{matrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \end{matrix}\right\|$ troviamo l'Aggiunta $\mathbb{M}^*(t) = \left\|\begin{matrix} -3e^t & e^{3t} & 1 \\ e^t & 0 & -1 \\ e^t & -e^{3t} & 0 \end{matrix}\right\|$, facciamone la trasposta $(\mathbb{M}^*(t))^{\mathrm{T}} = \left\|\begin{matrix} -3e^t & e^t & e^t \\ e^{3t} & 0 & -e^{3t} \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|$ ed avremo infine l'inversa:

$(\mathbb{M}(t))^{-1} = \left\|\begin{matrix} 3e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 0 & e^t \\ -e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \end{matrix}\right\|$. Passiamo quindi alla soluzione del sistema non omogeneo, che otterremo mediante la formula vista in precedenza:

$\left\|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}\right\| = \mathbb{M}(t) \cdot \left\|\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}\right\| + \mathbb{M}(t) \cdot \displaystyle\int \mathbb{M}(t)^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{matrix}\right\| dt$, per cui avremo:

$$\int \mathbb{M}(t)^{-1} \cdot \left\|\begin{matrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{matrix}\right\| dt = \int \left\|\begin{matrix} 3e^{-t} & -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 0 & e^t \\ -e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} e^t \\ 1 \\ e^{-t} \end{matrix}\right\| dt =$$

$$= \int \begin{Vmatrix} 3 - e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{2t} + 1 \\ -e^{-t} + e^{-2t} \end{Vmatrix} dt = \begin{Vmatrix} 3t + e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}\, e^{2t} + t \\ e^{-t} - \frac{1}{2}\, e^{-2t} \end{Vmatrix} .$$

Eseguendo il prodotto $\mathbb{M}(t) \cdot \int \mathbb{M}(t)^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{Vmatrix} dt$ otteniamo:

$$\begin{Vmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3t + e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}\, e^{2t} + t \\ e^{-t} - \frac{1}{2}\, e^{-2t} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3t\, e^t + t\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^t + \frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{2} \\ 3t\, e^t + t\, e^{-t} + \frac{3}{2}\, e^t + \frac{1}{2}\, e^{-t} \\ 3t\, e^t + 2t\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^{-t} + \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$$

che rappresenta la soluzione particolare del sistema non omogeneo.
La soluzione generale del sistema non omogeneo sarà allora:

$$\begin{cases} x(t) = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right) e^t + \left(c_2 + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + c_3\, e^{2t} + 3t\, e^t + t\, e^{-t} + \frac{1}{2} \\ y(t) = \left(c_1 + \frac{3}{2}\right) e^t + \left(c_2 + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + 2c_3\, e^{2t} + 3t\, e^t + t\, e^{-t} \\ z(t) = c_1\, e^t + \left(2c_2 + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + c_3\, e^{2t} + 3t\, e^t + 2t\, e^{-t} + \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Si poteva trovare la soluzione del sistema non omogeneo $\begin{cases} x' = 2x + y - 2z + e^t \\ y' = 3y - 2z + 1 \\ z' = 3x + y - 3z + e^{-t} \end{cases}$ seguendo la procedura basata sugli autovalori della matrice $\mathbb{A}$. Il sistema può scriversi come:

$\begin{Vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} e^t \\ 1 \\ e^{-t} \end{Vmatrix}$. Calcoliamo gli autovalori di $\mathbb{A}$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 3 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-(3-\lambda)(3+\lambda) + 2) + 3(-2 + 2(3-\lambda)) =$$

$= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0$, e quindi si hanno gli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.
Da questo si ricava $x(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + c_3\, e^{2t}$.
(Oppure la $c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + c_3\, e^{2t}$ viene assunta come soluzione per $y(t)$ o per $z(t)$)
Da questa, come fatto in precedenza, si ricavano le soluzioni per $y(t)$ e poi per $z(t)$, usando la stessa procedura infine per trovare le soluzione particolare del sistema non omogeneo e quindi la soluzione generale del sistema.

Possiamo seguire infine una terza procedura, con la quale si può risolvere il sistema omogeneo oppure, direttamente, quello non omogeneo. Scriviamo il sistema non omogeneo come:

$$\begin{cases} x' - 2x - y + 2z = e^t \\ y' - 3y + 2z = 1 \\ -3x - y + z' + 3z = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{D} - 2)x - y + 2z = e^t \\ 0\, x + (\mathcal{D} - 3)y + 2z = 1 \\ -3x - y + (\mathcal{D} + 3)z = e^{-t} \end{cases} .$$

Per risolvere il sistema omogeneo imponiamo $\begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathcal{D}-3 & 2 \\ -3 & -1 & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix}(x) = 0$. Da questa si ha:
$[(\mathcal{D}-2)((\mathcal{D}-3)(\mathcal{D}+3)+2) - 3(-2-2(\mathcal{D}-3))](x) = 0$ che ci porta ancora alla:
$[(\mathcal{D}+2)(\mathcal{D}-1)(\mathcal{D}+1)](x) = 0$ e quindi alla soluzione $x(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + c_3\, e^{2t}$.
Con le solite procedure si ricavano $y(t)$ e $z(t)$.
Con questa procedura, legata al Teorema di Cramer, si può comunque risolvere direttamente il sistema non omogeneo. Possiamo porre infatti:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathcal{D}-3 & 2 \\ -3 & -1 & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} e^t & -1 & 2 \\ 1 & \mathcal{D}-3 & 2 \\ e^{-t} & -1 & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathcal{D}-3 & 2 \\ -3 & -1 & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix}(y) = \begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & e^t & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & e^{-t} & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathcal{D}-3 & 2 \\ -3 & -1 & \mathcal{D}+3 \end{vmatrix}(z) = \begin{vmatrix} \mathcal{D}-2 & -1 & e^t \\ 0 & \mathcal{D}-3 & 1 \\ -3 & -1 & e^{-t} \end{vmatrix}$$

dalle quali, sviluppati i calcoli, arriviamo a 3 equazioni del III ordine:

$$\begin{cases} x''' - 2x'' - x' + 2x = -6e^t + 6e^{-t} + 1 \\ y''' - 2y'' - y' + 2y = -6e^t + 6e^{-t} \\ z''' - 2z'' - z' + 2z = -6e^t + 12e^{-t} + 1 \end{cases}$$ , le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + c_3\, e^{2t} + 3t\, e^t + t\, e^{-t} + \dfrac{1}{2} \\ y(t) = k_1\, e^t + k_2\, e^{-t} + k_3\, e^{2t} + 3t\, e^t + t\, e^{-t} \\ z(t) = h_1\, e^t + h_2\, e^{-t} + h_3\, e^{2t} + 3t\, e^t + 2t\, e^{-t} + \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Sostituendo queste nelle equazioni del sistema (basta farlo per la parte con le costanti, ovvero la soluzione generale dell'omogeneo), si trovano le relazioni che permettono di ricavare $(k_1, k_2, k_3)$ e $(h_1, h_2, h_3)$ in funzione di $(c_1, c_2, c_3)$. Oppure si procede nel solito modo: una volta trovata $x(t)$ si ricavano dalle equazioni del sistema $y(t)$ e $z(t)$.

**Esempio** 44 : Risolviamo il sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x' = y \\ 2y' = -3x + 6y - z \\ z' = -x + y + z \end{cases}$.

Anche se il sistema non è in forma normale (a causa di $2y'$) scriviamolo come:

$$\begin{cases} (\mathcal{D})\, x - y + 0\, z = 0 \\ 3x + (2\mathcal{D}-6)y + z = 0 \\ x - y + (\mathcal{D}-1)z = 0 \end{cases}.$$

Imponiamo $\begin{vmatrix} \mathcal{D} & -1 & 0 \\ 3 & 2\mathcal{D}-6 & 1 \\ 1 & -1 & \mathcal{D}-1 \end{vmatrix}(x) = 0$ da cui abbiamo:
$[\mathcal{D}((2\mathcal{D}-6)(\mathcal{D}-1)+1) + 1\,(3(\mathcal{D}-1)-1)](x) = 0$ da cui
$\left(2\,\mathcal{D}^3 - 8\,\mathcal{D}^2 + 10\,\mathcal{D} - 4\right)(x) = 0$ dalla quale, passando al polinomio caratteristico:
$2\lambda^3 - 8\lambda^2 + 10\lambda - 4 = 0$ ovvero $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ che si vede facilmente avere le radici $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Avremo allora $x(t) = c_1\, e^t + c_2 t\, e^t + c_3\, e^{2t}$.
Dalla prima equazione $y = x'$ abbiamo $y(t) = c_1\, e^t + c_2(1+t)\, e^t + 2c_3\, e^{2t}$.
Dalla seconda equazione si ottiene $z = 6y - 3x - 2y'$ e quindi

$z(t) = c_1 \, e^t + c_2(2+t) \, e^t + c_3 \, e^{2t}$ .

Infine $|\mathbb{M}(t)| = \begin{vmatrix} e^t & t\,e^t & e^{2t} \\ e^t & (1+t)\,e^t & 2e^{2t} \\ e^t & (2+t)\,e^t & e^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & t\,e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 2e^t & 0 \end{vmatrix} = -\,2\,e^{4t} \neq 0, \, \forall\, t\,.$

Quindi le funzioni:

$(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = \left(e^t, e^t, e^t\right)$ ,

$(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = \left(t\,e^t, (1+t)\,e^t, (2+t)\,e^t\right)$

$(x_3(t), y_3(t), z_3(t)) = \left(e^{2t}, 2e^{2t}, e^{2t}\right)$

costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo, mentre:

$\begin{cases} x(t) = c_1 \, e^t + c_2 t \, e^t + c_3 \, e^{2t} \\ y(t) = c_1 \, e^t + c_2(1+t) \, e^t + 2c_3 \, e^{2t} \\ z(t) = c_1 \, e^t + c_2(2+t) \, e^t + c_3 \, e^{2t} \end{cases}$ rappresenta la soluzione generale del sistema.