UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di MATEMATICA GENERALE

INTEGRALI

AA. 2024/25

INDICE

Integrale definito

Integrale indefinito

Integrali generalizzati

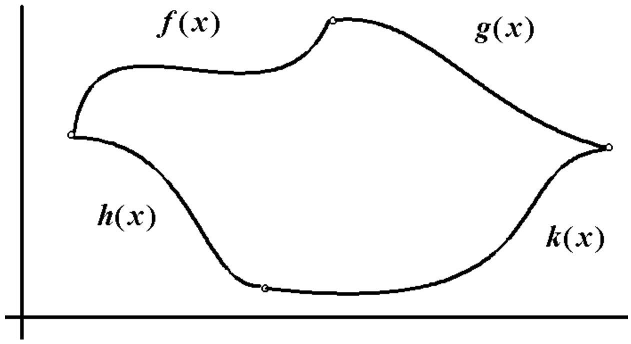
INTRODUZIONE AL CONCETTO D'INTEGRALE

La teoria dell'integrazione verrà sviluppata secondo due filoni inizialmente separati, quello relativo all'integrale definito e quello dell'integrale indefinito; l'integrale definito è collegabile con il problema della ricerca dell'area di una figura piana, mentre quello indefinito può essere collegato all'inversione dell'operazione di derivazione.
I due filoni, generati da problemi di natura diversa, troveranno un punto di raccordo nel cosiddetto Teorema fondamentale del calcolo integrale.
Verrà infine trattata una importante estensione dell'integrale definito, ovvero gli integrali impropri o generalizzati.

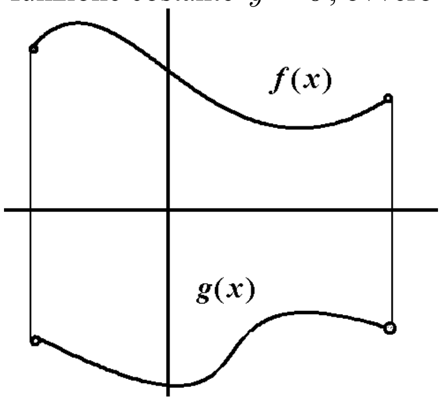
INTEGRALE DEFINITO

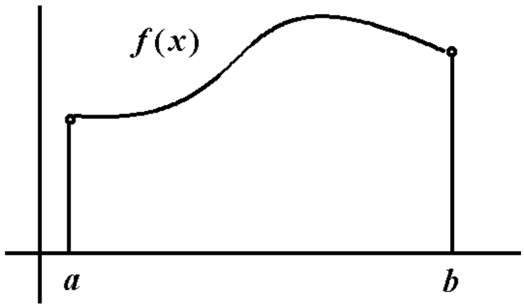
1.1 INTEGRALE DEFINITO COME RICERCA DELL'AREA

Un problema molto antico è quello del calcolo dell'area di una figura piana. Possiamo vedere una generica figura piana chiusa come la parte di piano compresa tra i grafici di opportune funzioni.
I punti evidenziati nella figura rappresentano l'inizio e la fine dei corrispondenti grafici.



Semplificando, possiamo limitarci all'area della parte di piano compresa tra i grafici di due sole funzioni, una superiore ed una inferiore, e semplificando ancora, possiamo prendere una funzione qualunque, per il momento positiva, come funzione superiore e per funzione inferiore la funzione costante $y = 0$, ovvero l'asse delle x.





Ovvero, scelto un intervallo $[a, b]$ nel quale sia definita una funzione $f(x)$, possiamo ricondurre il problema alla determinazione dell'area della parte di piano compresa tra l'asse delle x, il grafico della funzione $f(x)$ e le due rette verticali $x = a$ e $x = b$.

1.2 DEFINIZIONE DI FUNZIONE INTEGRABILE

Occorre ora precisare mediante un'opportuna definizione che cosa matematicamente si intenda quando affermiamo che una data funzione è integrabile. Possiamo anche dire, per ora, che

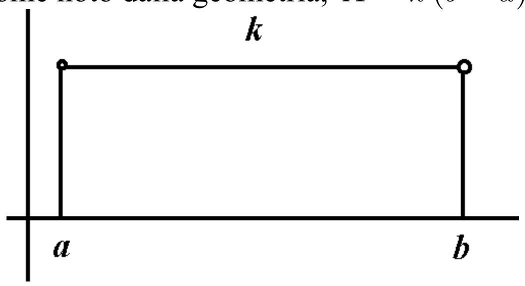
funzione integrabile sarà una funzione al di sotto della quale è calcolabile l'area, nel senso che prima illustravamo.
E' bene precisare che quella che tratteremo, dovuta a Riemann e a Cauchy, non è l'unica definizione di funzione integrabile, dato che questo concetto è stato poi rifondato nel cosiddetto integrale di Lebesgue, con il quale possono risultare integrabili anche funzioni che non lo sono in base alla definizione di Riemann.

1.3 SOMME NEL DISCRETO

Se una figura piana può essere scomposta mediante più figure, che non abbiano parti in comune, e che, unite, ci ridiano la figura di partenza, noi diciamo di aver fatto una partizione della figura.
L'area della figura piana è allora uguale alla somma delle aree delle figure che compongono la partizione, ovvero $A = \sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + ... + A_n$, dove A rappresenta l'area della figura piana e $A_1, A_2, ..., A_n$ sono le aree delle figure della partizione.
Iniziamo allora a costruire classi di funzioni integrabili, dando la definizione anzitutto per funzioni costanti e, da questa, per funzioni costanti a tratti.

1.4 INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI COSTANTI

Data una funzione costante $f(x) = k, k > 0$, scegliamo un intervallo $[a, b]$, con $b > a$, e definiamo l'integrale come l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle x, il grafico della funzione $f(x)$ e le due rette verticali $x = a$ e $x = b$. Si tratta semplicemente, come illustrato in figura, di calcolare l'area di un rettangolo, avente altezza pari a k e base uguale a $b - a$, e quindi avremo, come noto dalla geometria, $A = k\,(b - a)$.

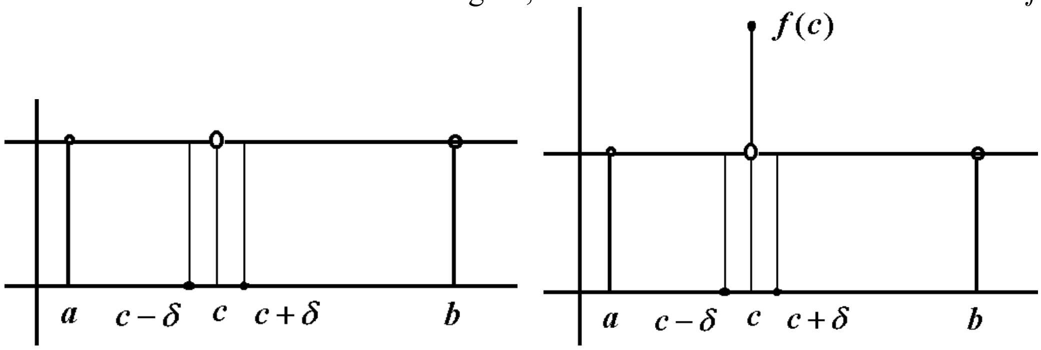


Introducendo quello che sarà il simbolo generale, diamo la
Definizione 1 : $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b k\,\mathrm{d}x = k\,(b - a)$,
che si legge "integrale definito tra a e b della funzione $f(x) = k$ in dx".
Se la costante k è negativa, la definizione di integrale rimane la stessa, e quindi il valore $A = \int_a^b k\,\mathrm{d}x = k\,(b - a)$ diviene ora negativo. Le funzioni costanti risultano quindi integrabili, ed il valore del loro integrale è espresso dalla formula precedente. Tutto è coerente con il concetto classico di area se la costante k è positiva, mentre per $k < 0$ otteniamo, come visto, un valore negativo.
Area intesa in senso tradizionale ed integrale definito prendono due strade diverse; possiamo in un caso come questo dire che l'integrale definito esprime un'area, però con segno, che per una funzione costante sarà quello della costante stessa.

1.5 INTEGRABILITA' DI FUNZIONI COSTANTI CON UN NUMERO FINITO DI DISCONTINUITA'

Supponiamo ora che la funzione $f(x) = k$ presenti una discontinuità di III^ specie in un punto c interno all'intervallo $[a, b]$.

La situazione è una delle due mostrate in figura, a seconda che esista o meno il valore $f(c)$.



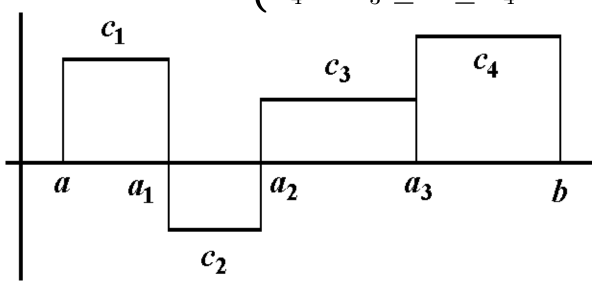
In ogni caso per il calcolo dell'area ci troviamo ancora di fronte ad un rettangolo, privato di un segmento che lo attraversa.
Essendo nulla l'area del segmento, viene naturale porre la

Definizione 2 : $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k\,(b-a)$, dove $f(x)$ indica la funzione costante con un punto di discontinuità di III^ specie.

Possiamo più correttamente giustificare questo risultato "isolando" il punto di discontinuità c mediante un intorno di ampiezza δ, come illustrato nella figura precedente; la parte di area mancante è strettamente contenuta dentro il rettangolo avente per base l'intervallo $[c-\delta, c+\delta]$, la cui area vale $2\,k\,\delta$.
L'area da togliere sarà quindi minore di $2\,k\,\delta$, $\forall\,\delta > 0$, il chè significa, come già detto, che essa è nulla.
Ripetendo più volte il ragionamento, un numero, per quanto grande ma finito, di discontinuità di III^ specie priva il rettangolo di un altrettanto numero finito di segmenti, la cui area è nulla, e quindi vale ancora la $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k\,(b-a)$.

1.6 INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI COSTANTI A TRATTI

Passiamo a considerare una funzione costante a tratti (detta anche funzione a scala o funzione semplice); sia questa per esempio $f(x) = \begin{cases} c_1\colon & a_0 \le x < a_1 \\ c_2\colon & a_1 \le x < a_2 \\ c_3\colon & a_2 \le x < a_3 \\ c_4\colon & a_3 \le x \le a_4 \end{cases}$, con $a = a_0$ e $b = a_4$.



Questa volta l'area è quella di quattro rettangoli, aventi per altezze i valori c_i e per basi i valori $a_i - a_{i-1}$, $1 \le i \le 4$.
Ciascuno di questi rettangoli, eccettuato l'ultimo, è privo di un lato, precisamente dell'altezza di destra, ma, per l'osservazione precedentemente fatta sulla discontinuità di III^ specie, venendo a mancare solo l'area di un segmento, poniamo per definizione:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{4} c_i\,(a_i - a_{i-1}).$$

Notiamo allora che una, e quindi, generalizzando, anche un numero finito di discontinuità di I^ specie, non impediscono l'esistenza dell'integrale. Si noti però che non è lecito pervenire alla stessa conclusione se le discontinuità fossero in numero infinito.
Ovviamente questa definizione si generalizza immediatamente al caso di una funzione a scala non con quattro ma con n generici tratti: $y = c_i,\, a_{i-1} \le x < a_i,\, 1 \le i \le n,\, a_0 = a,\, a_n = b$, e quindi avremo la

Definizione 3 : $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(a_i - a_{i-1})$.

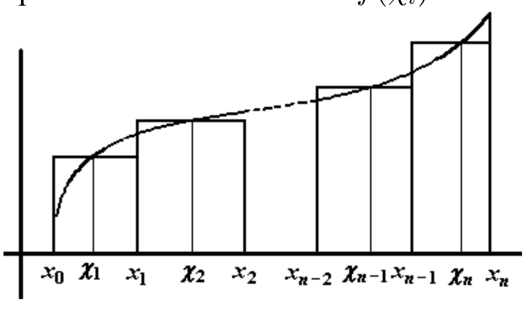
Questa definizione comporta un ulteriore allontanamento tra l'integrale definito ed il concetto tradizionale di area. Ove tutte le costanti c_i fossero dello stesso segno, il valore A potrebbe ancora rappresentare un'area (di segno eventualmente negativo se le costanti fossero tutte negative), altrimenti il valore trovato sarà solo una differenza tra le aree positive e quelle negative, venendo così a perdersi non solo il segno ma anche il valore numerico dell'estensione della superficie.

1.7 INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI LIMITATE - SOMME INTEGRALI

E' giunto il momento di dare la definizione di funzione integrabile per una funzione qualunque, ovvero per funzioni più generali delle costanti e delle costanti a tratti. Per fare ciò non potremo che utilizzare le funzioni integrabili finora introdotte, ovvero le funzioni costanti a tratti.
Si consideri allora una generica funzione $f(x)$, alla quale si chiede per il momento, e vedremo in seguito quanto la richiesta sia importante, di essere una funzione limitata nell'intervallo $[a, b]$, ovvero tale da aversi $|f(x)| <$ M, $\forall x \in [a, b]$, con M valore reale opportuno.
Operiamo come primo passo una partizione dell'intervallo $[a, b]$, scegliendo n generici punti $x_i \in [a, b]$, $0 \le i \le n$, tali che: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
Non ci sono particolari accorgimenti nè condizioni da rispettare nella scelta di questi punti, quali ad esempio l'equidistanza tra i punti x_i. Così facendo, l'intervallo $[a, b]$ viene diviso in n sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$, che hanno in comune solo un estremo e la cui unione dà tutto l'intervallo $[a, b]$.
In ciascuno di questi intervalli scegliamo un punto, diciamolo χ_i, nel quale la funzione sia definita, ovvero esista il valore $f(\chi_i)$.

Consideriamo allora l'espressione $\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})$.

Essa viene detta somma integrale relativa alla partizione scelta, e rappresenta l'integrale di una funzione a scala avente per ordinate i valori scelti $f(\chi_i)$.



1.8 DEFINIZIONE DI FUNZIONE INTEGRABILE SECONDO CAUCHY

Sia ora $\delta = \mathrm{Max}\{(x_i - x_{i-1})\}$, ovvero δ rappresenti la massima delle ampiezze degli intervalli della partizione. Possiamo dare la:

Definizione 4 (di funzione integrabile secondo Cauchy): La funzione $f(x)$ si dice integrabile nell'intervallo $[a,b]$ se $\lim_{\delta\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})\right]$ esiste finito, nel qual caso si pone:
$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})\right]$; altrimenti si dirà che la funzione $f(x)$ non è integrabile nell'intervallo dato.
Vediamo il significato operativo di questa definizione. E' molto importante il ruolo del $\lim_{\delta\to 0}$; dire che $\delta \to 0$ significa che il sottointervallo più lungo ha una lunghezza infinitesima, e quindi saranno tali anche le lunghezze di tutti gli altri sottointervalli. Eseguire questo passaggio al limite implica quindi di non limitarsi ad una sola partizione: se ne devono considerare infinite, prendendo le ampiezze $x_i - x_{i-1}$ sempre più piccole, e questo significa operare partizioni sempre più fini, ovvero formate da un numero sempre maggiore di punti x_i, da inserire ovunque all'interno dell'intervallo $[a,b]$.

1.9 SOMME SUPERIORI ED INFERIORI

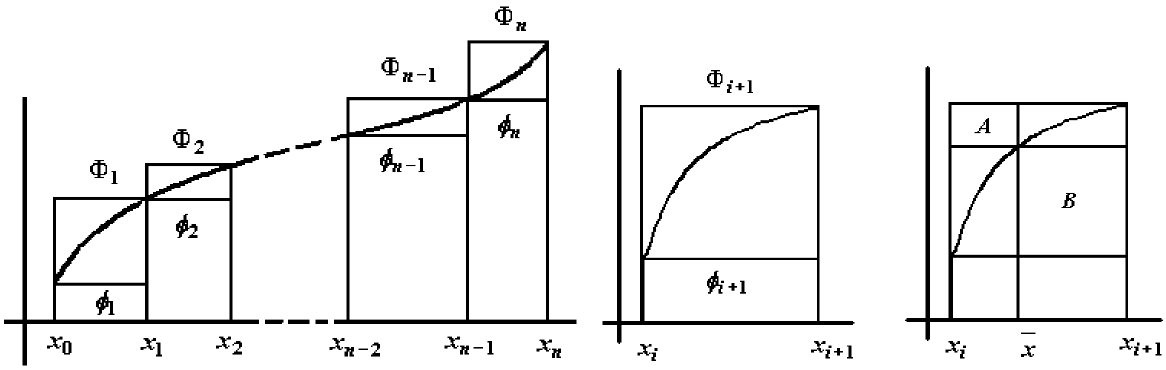
Vediamo anche un'altra versione della definizione di funzione integrabile.
Si consideri ancora una generica funzione $f(x)$, limitata nell'intervallo $[a,b]$, e quindi dotata di estremo superiore ed estremo inferiore ambedue finiti.
Nuovamente operiamo una partizione dell'intervallo $[a,b]$, scegliendo n punti $x_i \in [a,b]$, $0 \le i \le n$, tali che: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
Non ci sono neppure questa volta particolari accorgimenti nè condizioni da rispettare nella scelta di questi punti. Gli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ formano una partizione dell'intervallo $[a,b]$.
Essendo la funzione limitata in $[a,b]$, essa sarà limitata anche in ognuno degli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$, e quindi, in ognuno di questi, essa ammetterà estremo superiore ed estremo inferiore ambedue finiti. Indichiamo con Φ_i e ϕ_i gli estremi superiore ed inferiore della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$.
Mediante i valori Φ_i e ϕ_i costruiamo due funzioni a scala: y_{sup} e y_{inf}, definite come segue:
$y_{\text{sup}} = \Phi_i,\, x \in [x_{i-1}, x_i[\,,\, 1 \le i \le n$ e
$y_{\text{inf}} = \phi_i,\, x \in [x_{i-1}, x_i[\,,\, 1 \le i \le n$.
Ovviamente avremo che $y_{\text{inf}} \le f(x) \le y_{\text{sup}}$, $\forall\, x \in [a,b]$.
Per questo motivo la funzione y_{sup} è detta una maggiorante della $f(x)$ e la y_{inf} una minorante.
Diciamo allora somma superiore relativa alla partizione data l'espressione:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\,(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b y_{\text{sup}}\,\mathrm{d}x$$

e analogamente somma inferiore relativa alla stessa partizione l'espressione:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_i\,(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b y_{\text{inf}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ovviamente sarà $S_n \ge s_n$, ovvero, relativamente ad una stessa partizione, la somma superiore è sempre non minore della somma inferiore.



Vediamo cosa accade se da una partizione si passa ad una partizione più fine. Al minimo, aggiungiamo agli $n+1$ punti x_i un nuovo punto, sia esso $\overline{x}$, che venga inserito tra i punti x_i e x_{i+1}.
Come illustrato in figura, l'intervallo $[x_i, x_{i+1}[$ viene diviso in due sottointervalli, $[x_i, \overline{x}[$ e $[\overline{x}, x_{i+1}[$, con la conseguenza che la nuova somma superiore viene a perdere l'area del rettangolo A, mentre invece la nuova somma inferiore acquista quella del rettangolo B.

Quanto visto con l'introduzione di un nuovo punto vale ovviamente a maggior ragione per l'introduzione di un numero qualunque, purchè finito, di nuovi punti. Quindi, prendendo partizioni dell'intervallo $[a, b]$ sempre più fini, abbiamo che le somme inferiori formano una successione non decrescente, mentre le somme superiori formano una successione non crescente. Inoltre abbiamo osservato che la somma superiore relativa ad una partizione è sempre maggiore di quella inferiore, per cui avremo che:
$s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_{n-1} \leq s_n \leq ... \leq S_n \leq S_{n-1} \leq ... \leq S_2 \leq S_1$.
Si vede allora che somme inferiori e somme superiori formano due classi, quando si vadano a considerare tutte le possibili partizioni, sempre più fini, dell'intervallo $[a, b]$.

1.10 DEFINIZIONE DI FUNZIONE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN

Veniamo allora alla definizione di funzione integrabile secondo Riemann.
Definizione 5 (di funzione integrabile secondo Riemann): Diremo che una funzione limitata $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se le sue somme superiori ed inferiori formano due classi contigue.
Se tali classi sono contigue, per l'assioma di completezza dei numeri reali hanno un unico elemento separatore, diciamolo A, e porremo $A = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.
Sappiamo che due classi si dicono contigue se $\forall \varepsilon > 0$ esistono due elementi, s_n e S_n, uno della prima ed uno della seconda classe, tali che $S_n - s_n < \varepsilon$.
Possiamo allora enunciare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann con il seguente:
Teorema 1 : Data una funzione $f(x)$ limitata nell'intervallo $[a, b]$, essa risulta integrabile se $\forall \varepsilon > 0$ esiste una partizione dell'intervallo $[a, b]$ tale che, dette S_n e s_n le somme superiore ed inferiore relative a detta partizione, risulta $|S_n - s_n| < \varepsilon$. Ovvero dovrà essere:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \Phi_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \phi_i (x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (\Phi_i - \phi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon .$$

Di quest'ultima quantità è possibile dare una interessante interpretazione geometrica.
Come si vede nella penultima figura, le quantità $\sum_{i=1}^{n} (\Phi_i - \phi_i)(x_i - x_{i-1})$ rappresentano l'area di n rettangoli che ricoprono il grafico della funzione, per cui vale il:

Teorema 2 : Condizione necessaria e sufficiente (di Riemann) affinchè una funzione $f(x)$ limitata nell'intervallo $[a, b]$ risulti integrabile è che il suo grafico sia ricopribile con un opportuno numero finito di rettangoli la cui somma delle aree si può rendere piccola a piacere.
Si può poi dimostrare che la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann coincide con quella delle funzioni integrabili secondo Cauchy, ovvero le due definizioni di funzione integrabile individuano esattamente la stessa classe di funzioni.

Esempio 1 : Per dare un esempio di funzione limitata che non risulti integrabile, consideriamo la funzione: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Vediamo perchè non esiste $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Qualunque sia la partizione che facciamo dell'intervallo $[a, b]$, in ciascuno dei sottointervalli che la costituiscono avremo:
$y_{\text{sup}} = \Phi_i = 2, x \in [x_{i-1}, x_i[\ , 1 \le i \le n$ e
$y_{\text{inf}} = \phi_i = 1, x \in [x_{i-1}, x_i[\ , 1 \le i \le n$.
Quindi, per le corrispondenti somme integrali, otteniamo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 2\,(x_i - x_{i-1}) = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 2\,(b-a)$$

mentre invece:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_i\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (b-a)\,.$$

Tutte le somme superiori sono quindi uguali a $2\,(b-a)$ mentre tutte le inferiori sono uguali a $(b-a)$. Le due classi non sono contigue e quindi la funzione data non è integrabile.

1.11 SOMME NEL CONTINUO

Riprendendo la definizione secondo Cauchy, abbiamo detto che una funzione $f(x)$ risulta integrabile se $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})\right]$, valore finito.
Vediamo allora di interpretare il simbolo che è stato usato per indicare l'integrale definito.
Si deve operare un passaggio al limite, per $\delta \to 0$, e questo significa prendere partizioni sempre più fini, rendendo infinitesima l'ampiezza di tutti i sottointervalli della partizione considerata.
Una volta operato il limite, al posto di $\sum_{i=1}^{n}$ abbiamo $\int_a^b$, ed il cambio del simbolo sta ad indicare che una somma di n termini (somma nel discreto) si è trasformata in una somma nel continuo.
Al posto poi di $f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ abbiamo $f(x)\,\mathrm{d}x$, ovvero alle aree dei rettangoli della funzione costante a tratti si sostituisce il prodotto di una generica altezza, l'ordinata $f(x)$, per una base, rappresentata dall'elemento infinitesimo $\mathrm{d}x$, che prende il posto delle lunghezze finite $(x_i - x_{i-1})$.
Il simbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ va quindi letto come una somma, però nel continuo, di basi infinitesime per altezze: le ordinate della funzione. Per quanto suggestiva, l'immagine di tanti sottili rettangoli, con basi ridottissime, uno accanto all'altro, non coincide con la realtà effettiva. Per quanto piccole si possano raffigurare le basi, avremmo sempre un rettangolo dopo l'altro, ovvero una situazione di tipo discreto, mentre invece rileviamo un'ultima volta la principale conseguenza del limite, ovvero il passaggio da una situazione nel discreto ad una nel continuo.

1.12 INTEGRALE ED AREA

Anche se l'integrale definito è stato pensato inizialmente per risolvere il problema dell'area, abbiamo visto via via nei passaggi precedenti quanto integrale definito e area intesa in senso tradizionale si discostino tra loro. I due concetti coincidono esattamente nel caso, e solo in questo, in cui si determini l'area al di sotto del grafico di una funzione non negativa. Ove la funzione fosse non positiva, anche se con un cambiamento di segno, l'integrale ci dà ancora una quantità che coincide con l'area cercata. Quando infine la funzione cambia di segno all'interno dell'intervallo di integrazione, l'integrale ci dà una differenza tra le aree positive e quelle negative, e quindi si perde anche il valore della quantità della superficie.

1.13 AREA CON SEGNO

Nelle due definizioni di funzione integrabile abbiamo usato sempre, per rappresentare le basi dei rettangoli delle funzioni a scala, le quantità $(x_i - x_{i-1})$, che sono sempre quantità positive in quanto, per costruzione, $x_i > x_{i-1}$. Questo significa leggere le ascisse sempre e soltanto in modo crescente, scorrendo da sinistra verso destra, nel senso appunto dei valori della x crescenti.
Questo non sarebbe obbligatorio, e quindi si potrebbero utilizzare, come basi, anche le lunghezze $(x_{i-1} - x_i)$, ottenendo così delle lunghezze di base negative, che corrispondono a percorrere l'intervallo d'integrazione in senso inverso. Vedremo in seguito una conseguenza di questa possibile scelta.

1.14 CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI

Essendo abbastanza complicato, per ovvii motivi, verificare l'integrabilità di una qualunque funzione basandosi sulle due definizioni, occorrono strumenti pratici che ci consentano di vedere, per altra via, se una data funzione sia integrabile in un assegnato intervallo. A questo scopo determineremo alcune classi di funzioni integrabili, ovvero formuleremo delle condizioni sufficienti a garantire per una data funzione l'esistenza dell'integrale definito in un assegnato intervallo.

1.15 INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI CONTINUE

La prima proprietà sufficiente a garantire l'integrabilità è la continuità.
Vale infatti il seguente Teorema:

Teorema 3 : Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora esiste $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Dimostrazione: Usiamo la definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Essendo la funzione $f(x)$ continua in un intervallo limitato e chiuso, essa sarà, per il Teorema di Heine-Cantor, uniformemente continua. Quindi, $\forall \varepsilon > 0$, si potrà determinare un $\delta(\varepsilon)$ tale che, se $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.
Fissato allora $\varepsilon > 0$, si potranno determinare in corrispondenza un $\delta(\varepsilon)$ e una partizione dell'intervallo $[a, b]$ abbastanza fine da aversi per ogni sottointervallo $|x_i - x_{i-1}| < \delta(\varepsilon)$, da cui segue $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$. Ma allora sarà anche $|\Phi_i - \phi_i| \leq \varepsilon$ e quindi avremo che:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (\Phi_i - \phi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\,(x_i - x_{i-1})\right| = \varepsilon \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\right| \leq \varepsilon\,|b - a|$$

ed essendo quest'ultima una quantità che si può rendere piccola a piacere, il Teorema è dimostrato.

1.16 INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI DISCONTINUE

Il precedente Teorema afferma che se una funzione è continua allora è integrabile. Quindi la continuità è condizione sufficiente per l'integrabilità, e non è certo necessaria, in quanto già

nell'esaminare l'integrabilità delle funzioni costanti e costanti a tratti abbiamo visto che un numero finito di discontinuità di I^ e III^ specie non impedisce l'esistenza dell'integrale.
Occorrerebbero strumenti più sofisticati, quali la teoria della misura e il concetto di insieme a misura nulla, per descrivere esattamente la situazione.
Qui ci limitiamo ad affermare il seguente:
Teorema 4 : Una funzione limitata è sicuramente integrabile quando ammette un numero finito di discontinuità di I^ e III^ specie.
Osserviamo comunque che questa non è la più ampia classe di funzioni integrabili.
Osserviamo anche come non siano state trattate le discontinuità di II^ specie, specialmente quelle infinite. In queste discontinuità viene a cadere l'ipotesi di partenza, ovvero che la funzione sia limitata, e per questo problema si dovrà ricorrere ad una estensione del concetto d'integrale, ovvero alla definizione di integrale generalizzato.

1.17 PROPRIETA' DELL'INTEGRALE DEFINITO

Vediamo una rassegna delle principali proprietà di cui gode l'integrale definito, la maggior parte delle quali discende dalla definizione di funzione integrabile e quindi dalle proprietà dell'operazione di passaggio al limite.

1.18 PROPRIETA' DI LINEARITA'

Teorema 5 : Date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, integrabili nell'intervallo $[a, b]$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, risulta:

$$\int_a^b \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

ovvero l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è uguale alla combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, degli integrali delle due funzioni.
Verifichiamo questa proprietà vedendola come composizione di due proprietà più semplici. Vale anzitutto il
Teorema 6 : Sia data una funzione $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a, b]$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora si ha che: $\displaystyle\int_a^b \alpha\, f(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.
Questa proprietà si esprime solitamente dicendo che una costante moltiplicativa si può portare fuori dal segno d'integrale. Vale poi il
Teorema 7 : Siano date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, integrabili nell'intervallo $[a, b]$. Allora si ha che: $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$,
ovvero l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali.
Dimostrazione: Per verificare queste proprietà, usiamo la definizione di funzione integrabile dovuta a Cauchy.
Vediamo anzitutto che $\displaystyle\int_a^b \alpha\, f(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. Essendo $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a, b]$, esiste finito il $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\, (x_i - x_{i-1}) \right]$. Se formiamo le somme integrali della funzione $\alpha\, f(x)$, otterremo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha\, f(\chi_i)\, (x_i - x_{i-1})$, e passando al limite avremo:

$$\int_a^b \alpha\, f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha\, f(\chi_i)\, (x_i - x_{i-1}) \right] = \lim_{\delta \to 0} \left(\alpha \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\, (x_i - x_{i-1}) \right] \right) =$$

$$= \alpha \cdot \lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right] = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vediamo poi che $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Essendo per ipotesi $f(x)$ e $g(x)$ integrabili nell'intervallo $[a,b]$, esistono finiti:

$\lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} g(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right] = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Avremo allora:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} (f(\chi_i) + g(\chi_i))\,(x_i - x_{i-1}) \right] =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right] =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right] + \lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} g(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right] =$$

$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, ovvero la tesi.

Componendo le due proprietà, abbiamo quella di linearità, in quanto:

$$\int_a^b \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \beta\, g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La formula $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x$ contiene un errore di ortografia matematica. La sua esatta scrittura dovrebbe essere $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x$ ma è ormai da tutti accettata, anche se scorretta, la prima forma.

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ integrabili nell'intervallo $[a,b]$, con $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a,b]$, se vogliamo calcolare l'area della parte di piano compresa tra i grafici delle due funzioni, dovremo calcolare:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ che, per la proprietà di linearità, è uguale a:

$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$, ovvero all'area al di sotto del grafico della funzione differenza.

1.19 PROPRIETA' DI ISOTONIA

Teorema 8 : Sia $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a,b]$ e sia $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Allora si ha che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Ovvero l'integrale mantiene il segno della funzione.

Dimostrazione: Nel $\lim_{\delta \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \right]$ le quantità $\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ sono sicuramente non negative, in quanto le $(x_i - x_{i-1})$ lo sono per costruzione, e le $f(\chi_i)$ lo sono

per ipotesi. Per il Teorema inverso della permanenza del segno, dato che il limite per ipotesi esiste ed è uguale a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, esso non può essere negativo, da cui la tesi.
Come conseguenza, abbiamo anche il seguente:
Teorema 9 : Siano date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, integrabili nell'intervallo $[a,b]$, e sia poi $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Allora $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Dimostrazione: Basta considerare che $f(x) - g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, e che l'integrale di una differenza è uguale alla differenza degli integrali.
L'integrale quindi mantiene l'ordine, ovvero a funzione maggiore corrisponde integrale maggiore.

1.20 INTEGRALE E VALORE ASSOLUTO

Teorema 10 : Sia data una funzione $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a,b]$. Allora risulta:

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Ovvero l'integrale del valore assoluto è non minore del valore assoluto dell'integrale.
Dimostrazione: Vediamo anzitutto che l'integrabilità di $f(x)$ implica quella di $|f(x)|$, ovvero che l'esistenza di $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ implica quella di $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Facciamo una partizione dell'intervallo $[a,b]$ e formiamo le somme superiori ed inferiori delle funzioni $f(x)$ e $|f(x)|$; dette queste, rispettivamente, S_n e s_n, $\overline{S}_n$ e $\overline{s}_n$, vale la relazione: $\overline{S}_n - \overline{s}_n \leq S_n - s_n$, in quanto:

$$\left|\sup_{x\,\in\,[a,b]} |f(x)| - \inf_{x\,\in\,[a,b]} |f(x)|\right| \leq \left|\sup_{x\,\in\,[a,b]} f(x) - \inf_{x\,\in\,[a,b]} f(x)\right|,$$

per cui se le S_n e le s_n formano due classi contigue, altrettanto faranno le $\overline{S}_n$ e le $\overline{s}_n$.
Passando al Teorema, una prima rapida giustificazione della tesi l'otteniamo considerando la relazione, trattata in precedenza, tra area ed integrale.
In $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ abbiamo una funzione non negativa, cosa che non è detto in generale avvenga in $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$, dove il valore assoluto rende positivo solamente il risultato finale. Se la funzione $f(x)$ cambia di segno nell'intervallo $[a,b]$, il calcolo di $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ darà luogo ad una differenza tra aree positive e negative, cosa che invece non accade in $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Avremo quindi che $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ se e solo se la funzione $f(x)$ non cambia mai di segno nell'intervallo $[a,b]$, mentre per le altre funzioni varrà la stretta disequazione.
Un altro modo per verificare la proprietà consiste nel partire dalla cosidetta disuguaglianza triangolare: $|a+b| \leq |a| + |b|$. Presa una somma integrale $\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ della funzione $f(x)$, avremo, per la disuguaglianza triangolare applicata alla somma di n termini:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\chi_i)\,(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(\chi_i)|\,(x_i - x_{i-1})$$

in quanto le $(x_i - x_{i-1})$ sono tutte positive. Dato che l'ultimo termine è una somma integrale della funzione $|f(x)|$, passando ai due limiti, che per ipotesi esistono, otteniamo la proprietà. Quindi la disuguaglianza triangolare, stabilita per le somme nel discreto, vale anche per quelle nel continuo.

1.21 PROPRIETA' DI ADDITIVITA'

Dopo le proprietà dell'integrale derivanti da proprietà della funzione integranda, vediamone ora due che legano l'integrale all'intervallo d'integrazione. Per questo occorrono due definizioni preliminari.
Vale anzitutto la

Definizione 6 : $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$

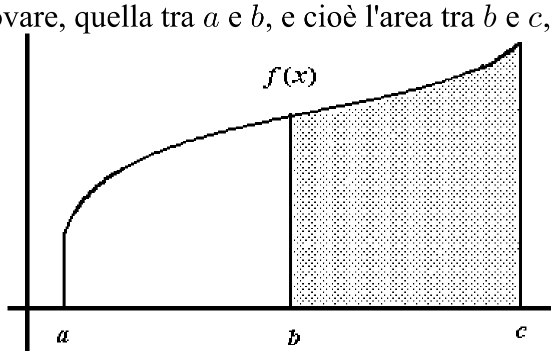
La definizione si giustifica intuitivamente, in quanto ci troviamo a calcolare l'area di un segmento.
E diamo poi la

Definizione 7 : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Vediamo quale possa essere il senso di questa seconda definizione.
In $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ intendiamo "percorrere" l'intervallo di integrazione $[a,b]$ nel senso tradizionale delle ascisse crescenti, per cui, come osservato in precedenza, le quantità $(x_i - x_{i-1})$, che determinano le basi nelle somme integrali, risulteranno sempre positive. In $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ conveniamo invece di percorrere al contrario l'intervallo d'integrazione, quindi le basi saranno date dalle quantità $(x_{i-1} - x_i)$, che risulteranno sempre negative. A parità di altezze $f(x)$, ecco giustificato il cambiamento di segno del risultato.
Possiamo ora enunciare il:

Teorema 11 : Sia data una funzione $f(x)$ integrabile in un intervallo e siano a, b e c tre punti di questo intervallo.
Vale l'uguaglianza: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Dimostrazione: La proprietà si reputa evidente nel caso in cui $a \le c \le b$: basta inserire il punto c tra i punti della partizione ed usare le proprietà della somma tra numeri.
Se fosse invece, ad esempio, $a \le b \le c$, per la precedente proprietà avremo:
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, ovvero si toglie all'area tra a e c l'eccedenza rispetto all'area che si vuole trovare, quella tra a e b, e cioè l'area tra b e c, come illustrato in figura.



Come conseguenza di questo Teorema, vale anche il seguente:

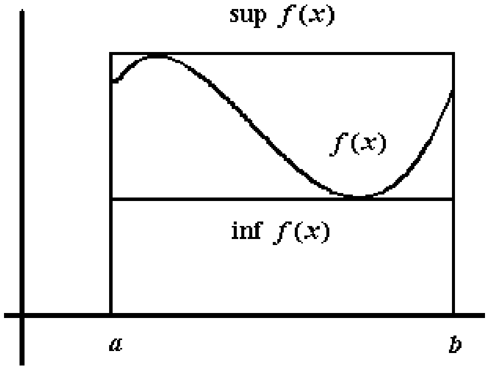
Teorema 12 : Sia $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a, b]$, sia $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, e sia inoltre $[a_1,b_1] \subset [a, b]$. Risulta allora $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Ovvero, a parità di funzione positiva, ad intervallo d'integrazione maggiore corrisponde un integrale maggiore. Non vale questa proprietà per funzioni di segno variabile in $[a, b]$ oppure di segno negativo.
L'uguaglianza ovviamente vale se e solo se $f(x)$ è nulla in $[a, b] \setminus [a_1,b_1]$.

1.22 TEOREMI DELLA MEDIA

Passiamo ora ad enunciare un Teorema, solitamente fornito in due versioni; una, di applicazione più generale, che vale per le funzioni integrabili e da questa ne ricaveremo l'altra, che vale per le funzioni continue. Quest'ultima verrà messa in relazione con il Teorema della Media per le funzioni derivabili, o Teorema di Lagrange, e vedremo che addirittura si tratta dello stesso Teorema, opportunamente applicato a funzioni diverse.

1.23 TEOREMA DELLA MEDIA PER FUNZIONI INTEGRABILI

La prima versione del Teorema, applicabile ad una classe più ampia di funzioni, vale nella sola ipotesi che una data funzione sia integrabile. Vale il seguente:
Teorema 13 (della Media per funzioni integrabili): Sia $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a, b]$ e siano ϕ e Φ, rispettivamente, l'estremo inferiore e superiore della funzione $f(x)$ in $[a, b]$.
Allora si ha che: $\phi\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \Phi\,(b-a)$, o anche: $\phi \leq \dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} \leq \Phi$.
Dimostrazione: Dato che $f(x)$ è limitata nell'intervallo $[a, b]$, esistono finiti ϕ e Φ, estremo inferiore e superiore della funzione in $[a, b]$. Essendo per ipotesi la funzione integrabile, esiste il valore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Possiamo osservare, come in figura nel caso di una funzione non negativa, che $\phi\,(b-a)$ e $\Phi\,(b-a)$ rappresentano le aree di due rettangoli, uno minore e uno maggiore dell'area al di sotto della funzione.



Possiamo dire che $\phi\,(b-a)$ e $\Phi\,(b-a)$ rappresentano la somma inferiore e superiore di una partizione dell'intervallo $[a, b]$ costituita da un solo sottointervallo, l'intervallo $[a, b]$ stesso, e quindi non possono che essere, rispettivamente, non superiore e non inferiore al valore dell'integrale.
Il Teorema fornisce disequazioni non strette: per una funzione costante $f(x) = k$ avremo: $\phi\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi\,(b-a) = k\,(b-a)$, mentre per una funzione costante avente

in $[a,b]$ una discontinuità di III^ specie nel punto $x=c$, ad esempio con $f(c)<k$, si avrà:

$$f(c)=\phi \le \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} = \Phi = k\,.$$

1.24 TEOREMA DELLA MEDIA PER FUNZIONI CONTINUE

Restringendo le ipotesi, vediamo come si trasforma il Teorema della Media nel caso di una funzione continua. Vale il seguente:

Teorema 14 (della Media per funzioni continue): Sia $f(x)$ continua nell'intervallo $[a,b]$. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che: $f(x_0) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)}$.

Dimostrazione: Essendo la funzione continua in $[a,b]$, essa è integrabile, e per il Teorema di Weierstrass abbiamo che ϕ e Φ sono ora rispettivamente il minimo ed il massimo di $f(x)$ in $[a,b]$. Essendo, per il Teorema precedente: $\phi \le \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} \le \Phi$, il termine centrale, detto anche Valor medio, viene ad essere un qualunque valore compreso tra il minimo ed il massimo della funzione $f(x)$. Allora, per il Teorema di Darboux (o dei valori intermedi), esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ che ha per immagine il Valor medio, ovvero la tesi.

Si può anche affermare, nel caso di funzioni continue e non negative, che esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ per il quale $f(x_0)\,(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ovvero l'area sotto al grafico della funzione è uguale a quella di un rettangolo avente la stessa base $(b-a)$ ed altezza opportuna, il valore $f(x_0)$, valore effettivamente assunto dalla funzione.

Posto, per brevità, $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} = f(x_0) = \alpha$, l'equazione $f(x_0)=\alpha$ avrà una e una sola soluzione $x_0 = f^{-1}(\alpha)$ se e solo se la funzione $f(x)$ è invertibile nell'intervallo $[a,b]$, ovvero, essendo continua, se essa è strettamente monotòna.

INTEGRALE INDEFINITO

2.1 LA FUNZIONE INTEGRALE

Mediante l'integrale definito possiamo ora costruire una nuova classe di funzioni, chiamate funzioni integrali in quanto utilizzano appunto l'integrale per ottenere il valore della variabile dipendente.

L'importanza di queste nuove funzioni è dovuta principalmente a motivi di tipo teorico e la loro introduzione consentirà, mediante il Teorema fondamentale, di stabilire una importante relazione tra derivazione ed integrazione, nonchè, come ulteriore conseguenza, la più importante regola pratica per il calcolo degli integrali definiti.

2.2 DEFINIZIONE DI FUNZIONE INTEGRALE

Consideriamo una funzione $f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a,b]$. Sappiamo che per essere integrabile è sufficiente che la funzione abbia in $[a,b]$ un numero finito di discontinuità di I^ e III^ specie, e l'integrabilità di $f(x)$ in $[a,b]$ garantisce l'integrabilità in ogni sottointervallo $[a_1,b_1] \subset [a,b]$.

Consideriamo allora la seguente espressione: $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ x \in [a,b]\,.$

Essa esprime l'integrale della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,x]\,.$

Il ruolo che solitamente riserviamo alla variabile x, che ora troviamo anche nell'estremo superiore d'integrazione, e cioè quello di variabile indipendente, dovrebbe sufficientemente chiarire il senso dell'espressione. La funzione $f(x)$ è assegnata una volta per tutte ed il suo grafico contribuisce a delimitare la figura di integrazione; il valore a rappresenta l'estremo inferiore dell'intervallo di base; conosciamo dalla definizione di funzione integrabile il ruolo di $f(x)\,\mathrm{d}x$, rimane solo da notare che non si fissa il secondo estremo dell'intervallo d'integrazione, ma si considera questo estremo come variabile. Ecco perchè è stato indicato con x.

Al variare del secondo estremo d'integrazione varierà ovviamente il valore dell'integrale; si vede anzi che ad ogni valore del secondo estremo d'integrazione x corrisponderà una ed una sola immagine, ed è quindi soddisfatta la definizione di funzione.

Riassumendo, abbiamo una funzione che "ad ogni punto x dell'intervallo $[a,b]$ associa come immagine l'integrale della funzione $f(x)$ dal punto assegnato a fino al punto x".

Una funzione costruita in questo modo prende il nome di funzione integrale e la indicheremo con $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [a,b]$, mentre la funzione $f(x)$ sarà invece chiamata funzione integranda.

Vediamo perchè al termine $f(x)\,\mathrm{d}x$ è stato sostituito $f(t)\,\mathrm{d}t$. Il cambiamento non sarebbe obbligatorio, ma si preferisce far così per evitare confusione. Nell'espressione $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ la variabile x compare ben tre volte.

Sappiamo che il $\mathrm{d}x$ rappresenta, nel simbolo dell'integrale, le ampiezze infinitesime delle basi della partizione una volta operato il passaggio al limite; il $\mathrm{d}x$ non ha nulla a che vedere con la x.

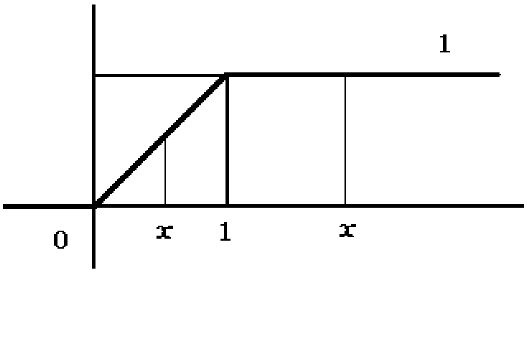
Potrebbe esserci confusione con la x di $f(x)$, ma ricordiamo che la funzione $f(x)$ è assegnata all'inizio della procedura e, mediante il suo grafico, genera la figura, e questo grafico lo dobbiamo considerare come una costante (non certo numerica !) del problema.

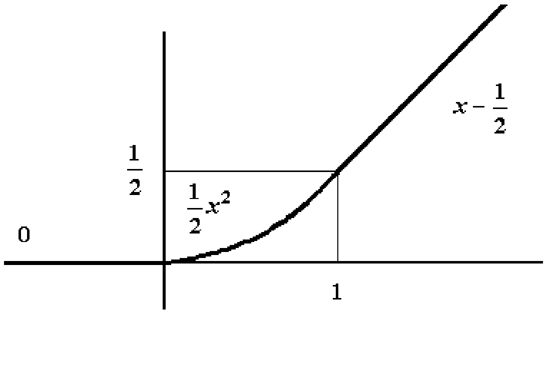
La x di $f(x)$ esaurisce il suo compito una volta noto il grafico, e non rappresenta nulla di variabile.

Completamente diverso è il ruolo della x a secondo estremo d'integrazione: essa è l'unica variabile indipendente presente nell'espressione, in quanto il valore dell'integrale, assegnata la funzione, varia solo al variare del secondo estremo d'integrazione. Per questo molti preferiscono che sia la sola x presente, per rimarcare la sua unicità nel ruolo di variabile indipendente. Seguendo l'uso comune potremo allora scrivere:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ x \in [a,b]\,.$$

Esempio 2 : Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \le 0 \\ x & : 0 < x < 1 \\ 1 & : 1 \le x \end{cases}$, il cui grafico è rappresentato in figura:





vediamo come si costruisce $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$
Notiamo anzitutto che $f(x)$ è continua $\forall\, x\in\mathbb{R}$, e quindi $F(x)$ è definita $\forall\, x\in\mathbb{R}$.
Determiniamo l'espressione di $F(x)$ e poi motiviamola.

Sarà $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & : x\le 0\\ \dfrac{1}{2}\cdot x^2 & : 0<x<1\\ x-\dfrac{1}{2} & : 1\le x\end{cases}$.

Per $x\le 0$ la funzione integranda è nulla, e di conseguenza risulta $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0\,,\ \forall\, x\le 0\,.$
Quando $0<x<1$ il valore dell'integrale coincide con quello dell'area di un triangolo, con i vertici nei punti $(0,0)$, $(x,0)$ e (x,x), di area pari quindi a $\frac{1}{2}x\cdot x=\frac{1}{2}\,x^2\,.$
Quando, infine, $1\le x$, l'integrale coincide con l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, che vale $\frac{1}{2}$, a cui va aggiunta l'area del rettangolo avente per base il segmento da $(x,0)$ a $(1,0)$, lungo $x-1$, ed altezza pari ad 1, e quindi di area $(x-1)\cdot 1=x-1\,.$
Essendo $(x-1)\cdot 1+\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}$, ecco motivata la terza legge.
Il grafico della funzione integrale si trova a destra di quello della funzione integranda.

2.3 PROPRIETA' DELLA FUNZIONE INTEGRALE

Sappiamo che la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è definita in quegli intervalli in cui $f(x)$ è integrabile.
Per le proprietà dell'integrale, avremo : $\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=-F(x)$, e quindi facendo variare l'estremo inferiore d'integrazione invece di quello superiore si ottengono le stesse funzioni integrali, però cambiate di segno.
Sia ora $c\in[a,b]$ e definiamo $G(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$; vediamo cioè che cosa accade usando la stessa funzione integranda ma cambiando l'estremo fisso d'integrazione. Per la proprietà additiva avremo:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+G(x)\,.$$

Essendo $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ una costante, possiamo scrivere $F(x)-G(x)=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t=k$, ovvero due funzioni integrali di una stessa funzione integranda differiscono per una costante; come conseguenza si ha che i grafici delle funzioni integrali di una stessa funzione integranda sono tutti paralleli tra di loro.

2.4 CONTINUITA' DELLA FUNZIONE INTEGRALE

Un'altra importante proprietà, relativa alla continuità di una funzione integrale, risulta dal

Teorema 15 : Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$, allora $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è continua in $[a,b]$.

Dimostrazione: Sia $x_0\in[a,b]$. Dovremo, per la definizione di continuità, far vedere che:
$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)$: $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon\,.$
La funzione $f(x)$ è limitata in $[a,b]$ in quanto integrabile, per cui $|f(x)|<\mathrm{L}\,,\ \forall\, x\in[a,b]\,.$
Sarà allora:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^x \mathrm{L}\ \mathrm{d}t = \mathrm{L}\,|x - x_0|$$

in quanto l'ultimo è l'integrale di una funzione costante.
Quindi basta prendere $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{L}}$ perchè da $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ segua $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, ovvero la continuità della funzione $F(x)$.
Quindi l'integrabilità della funzione integranda è sufficiente a garantire la continuità della funzione integrale. Si può notare oltretutto come la scelta del valore $\delta(\varepsilon)$ sia stata fatta in modo del tutto indipendente dal punto x_0. La funzione integrale è quindi continua uniformemente.

Esempio 3 : Consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ x & : 0 < x < 1 \\ 2 & : 1 \leq x \end{cases}$, che presenta una discontinuità di I^ specie nel punto $x = 1$, in quanto $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.
Costruendo la sua funzione integrale, con procedura analoga a quelli dell'esempio precedente, avremo: $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot x^2 & : 0 < x < 1 \\ 2x - \frac{3}{2} & : 1 \leq x \end{cases}$, e tale funzione risulta continua anche in $x = 1$ in quanto $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$.

2.5 DERIVABILITA' DELLA FUNZIONE INTEGRALE

Dopo la continuità, vediamo sotto quali ipotesi sulla funzione integranda risulti derivabile una funzione integrale. La risposta a questo è data dal Teorema fondamentale del calcolo integrale, detto anche Teorema di Torricelli-Barrow. Esso non solo ci dice quando una funzione integrale è derivabile, ma fornisce anche l'espressione della sua funzione derivata.

2.6 TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Vale il seguente:

Teorema 16 : Sia $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t, x \in [a, b]$ una sua funzione integrale. Allora $F(x)$ è derivabile e risulta $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.
Dimostrazione: Preso $c \in [a, b]$, per vedere se $F(x)$ è derivabile in c dovremo calcolare:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{c+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^{c+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_c^{c+h} f(t)\ \mathrm{d}t}{h}.$$

Essendo per ipotesi $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$, vale il Teorema della Media, e quindi esiste almeno un punto x_0: $|x_0 - c| \leq |h|$, per cui avremo:

$\displaystyle\int_c^{c+h} f(t)\ \mathrm{d}t = f(x_0)\,(c + h - c) = f(x_0)\,h$, e quindi:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_c^{c+h} f(t)\ \mathrm{d}t}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\,h}{h}=\lim_{h\to 0}f(x_0)\,.$$

Quando $h \to 0$, essendo $|x_0 - c| \le |h|$, abbiamo che $x_0 \to c$ e quindi $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0) = f(c)$, ovvero:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$, valore che sicuramente esiste ed è finito in quanto $f(x)$ è continua nel punto c; quindi vale la tesi.

Riprendiamo la funzione integrale: $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & : x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}\cdot x^2 & : 0 < x < 1 \\ 2x - \dfrac{3}{2} & : 1 \le x \end{cases}$. Si vede facilmente che $F'(x) = \begin{cases} 0 & : x \le 0 \\ x & : 0 < x < 1 \\ 2 & : 1 < x \end{cases}$, ovvero $F(x)$ non è derivabile nel punto $x = 1$, il punto in cui non è continua la funzione integranda $f(x)$.

2.7 DERIVATA DI UNA FUNZIONE INTEGRALE COMPOSTA

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e sia $g(x)$ una funzione continua e derivabile nell'intervallo $[a,b]$. Data $F(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$, calcoliamo $F'(x)$ in un generico punto $x \in [a,b]$.

Avremo, usando la proprietà di additività rispetto all'intervallo d'integrazione:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_a^{g(x+h)} f(t)\ \mathrm{d}t-\int_a^{g(x)} f(t)\ \mathrm{d}t}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_{g(x)}^{g(x+h)} f(t)\ \mathrm{d}t}{h}=$$

(per il Teorema della Media integrale applicato alla funzione continua $f(x)$)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x_0))\cdot(g(x+h)-g(x))}{h}=\lim_{h\to 0}f(g(x_0))\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(g(x))\cdot g'(x)$$

e quindi $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Questo in quanto $g(x_0)$ è compreso tra $g(x)$ e $g(x+h)$, ed essendo $f(g(x))$ e $g(x)$ continue, si ha che $g(x_0) \to g(x)$ quando $h \to 0$.

2.8 TEOREMA DELLA MEDIA E TEOREMA DI LAGRANGE

Vediamo ora la relazione tra il Teorema di Lagrange (o del valor medio) per le funzioni derivabili ed il Teorema della media integrale per le funzioni continue.

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$. Abbiamo visto che una sua funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t,\ x \in [a,b]$ è continua e derivabile $\forall\, x \in [a,b]$. Quindi possiamo applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $F(x)$, ed otteniamo che esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ nel quale si ha che $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(x_0)$.

Ma, per il Teorema fondamentale, si ha che $F'(x_0) = f(x_0)$, ed inoltre:

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t}{b-a}=\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}{b-a}$$

per cui $f(x_0) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}{b-a}$, ovvero il Teorema della media integrale per le funzioni continue.

2.9 INTEGRALE INDEFINITO

Passiamo ad esaminare un'altra conseguenza importante del Teorema fondamentale.
Finora, data una funzione $f(x)$, mediante l'operazione di derivazione potevamo calcolarne la funzione derivata, ovvero $f(x) \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \to f'(x)$.
Mediante la funzione integrale, nell'ipotesi di funzione integranda continua, si è fatto il percorso in senso inverso: siamo partiti da $f(x)$ è si è costruita una nuova funzione, $F(x)$, di cui $f(x)$ è la derivata, ovvero $F(x) \to \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \to f(x)$.
Si è quindi operato in senso inverso alla derivazione: $f(x) \to F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
All'operazione inversa della derivata viene dato il nome di integrale indefinito, e per esaminare questo concetto iniziamo dando una nuova definizione.

2.10 FUNZIONI PRIMITIVE - DEFINIZIONE DI FUNZIONE PRIMITIVA

Riveste particolare importanza la seguente:
Definizione 8 : Sia $f(x)$ una funzione continua $\forall\, x \in [a,b]$. La funzione $F(x)$ si dice una primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.
La primitiva di $f(x)$ è una funzione che ha per derivata $f(x)$; essendo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sen}\, x) = \cos x$, abbiamo ad esempio che sen x è una primitiva di cos x.
Ovviamente una funzione, per essere una primitiva, deve essere derivabile.
Dobbiamo ora chiederci quali sono le funzioni che ammettono primitiva e, se ne ammettono, quante ne ammettono. Se ci mettiamo nell'ipotesi del Teorema fondamentale, ovvero se trattiamo funzioni continue, alla prima parte della domanda troviamo subito risposta: ogni funzione $f(x)$ continua $\forall\, x \in [a,b]$ ammette almeno una primitiva, basta infatti costruire una sua funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ per avere che $F'(x) = f(x)$. Quindi ogni funzione continua ammette sicuramente primitiva.
Passiamo alla seconda parte della domanda: se ci sono primitive, quante sono ?
Usando le proprietà delle funzioni integrali, abbiamo visto che cambiando l'estremo fisso di integrazione si ottiene una nuova funzione integrale che differisce dalla precedente per una costante. Se $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ e se $G(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t$, $c \in [a,b]$, risulta allora:

$F(x) = G(x) + \displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$, da cui:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(G(x) + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t\right) = G'(x),$$

in quanto $\displaystyle\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ è una costante e quindi la sua derivata è nulla.
Tutte le funzioni integrali di una stessa funzione integranda sono quindi sue primitive, ma allora esse sono infinite, perchè per costruire una nuova funzione integrale basta semplicemente cambiare l'estremo fisso dell'integrale, che possiamo scegliere in un qualunque punto dell'intervallo $[a,b]$.
Vale quindi il seguente:

Teorema 17 : Sia $f(x)$ continua $\forall\, x \in [a,b]$. Allora $f(x)$ ammette infinite primitive.
La totalità delle primitive di una funzione continua $f(x)$ viene chiamata integrale indefinito di $f(x)$, e si indica con il simbolo $\int f(x)\ \mathrm{d}x$.

Anche sulla struttura di questo simbolo faremo delle osservazioni, che per il momento dobbiamo rimandare ad una fase successiva della trattazione.

2.11 TOTALITA' DELLE PRIMITIVE E SUE PROPRIETA'

Supponiamo ora che $F(x)$ e $G(x)$ siano due primitive di una stessa funzione continua $f(x)$. Quindi $F'(x) = G'(x) = f(x)$ ovvero $F'(x) - G'(x) = (F(x) - G(x))' = 0$ per cui, come conseguenza del Teorema di Lagrange, sarà anche $F(x) - G(x) = k\ ,\ k \in \mathbb{R}$.
Due primitive di una stessa funzione integranda continua differiscono per una costante, mentre prima abbiamo visto che se due funzioni derivabili differiscono per una costante allora sono primitive di una stessa funzione. La conclusione non può essere che questa: data una primitiva $F(x)$ di una funzione continua $f(x)$ tutte le altre primitive sono esprimibili come $F(x) + k\ ,\ k \in \mathbb{R}$, e scriveremo quindi $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + k\ ,\ k \in \mathbb{R}$.

Se le funzioni integrali di una stessa funzione integranda continua differiscono per una costante, i loro grafici sono tutti paralleli; identica situazione la abbiamo tra le primitive di una funzione continua; mediante il Teorema fondamentale, infine, abbiamo visto che almeno una funzione integrale è anche una primitiva, con il chè possiamo affermare che coincidono l'insieme delle funzioni primitive e quello delle funzioni integrali di una stessa funzione integranda continua. Costruire funzioni integrali o ricercare funzioni primitive conduce alla determinazione dello stesso insieme di funzioni.
Tutto questo vale, come già ripetuto, solo se si utilizzano funzioni integrande continue, altrimenti la coincidenza tra i due insiemi non è più garantita.

Esempio 4 : Consideriamo la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{|t|}{t}\ \mathrm{d}t$.

La funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$ è continua $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e nel punto $x = 0$ presenta una discontinuità di I^ specie. Quindi la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{|t|}{t}\ \mathrm{d}t$ esiste $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ed è: $F(x) = \begin{cases} -x-1 & : x < 0 \\ x-1 & : x \geq 0 \end{cases} = |x| - 1\ ,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

La funzione $F(x)$ è quindi una funzione integrale di $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, mentre non può essere, sempre $\forall\, x \in \mathbb{R}$, una sua primitiva, in quanto non è derivabile nel punto $x = 0$.

Data $f(x)$ continua $\forall\, x \in [a,b]$, una sua primitiva è $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Questa è una particolare primitiva, precisamente è quell'unica primitiva tale che $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, ovvero è l'unica tra tutte le primitive che taglia l'asse delle ascisse nel punto $x = a$, a causa ovviamente del parallelismo tra i grafici delle primitive. Invece $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + k$, è quell'unica primitiva per la quale $F(a) = k$.

2.12 II^ TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Prima di trattare approfonditamente dal punto di vista pratico il problema della ricerca delle primitive, o integrale indefinito, di una data funzione, vediamo una conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo, così importante che da molti è chiamata II^ Teorema fondamentale.
Abbiamo visto che tutte le primitive e le funzioni integrali di una data funzione continua $f(x)$ sono esprimibili mediante la $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t + k\,,\ k \in \mathbb{R}\,.$
Essendo i loro grafici tutti paralleli, se calcoliamo la differenza tra i valori di due qualunque primitive $F(x)$ e $G(x)$ in due punti x_1 e x_2, essendo $F(x) = G(x) + k$, otteniamo:
$F(x_1) - F(x_2) = G(x_1) + k - (G(x_2) + k) = G(x_1) - G(x_2)$, ovvero lo stesso risultato qualunque siano le primitive $F(x)$ e $G(x)$.
Sia ora $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t + k$ una qualunque primitiva di $f(x)$ e supponiamo si voglia calcolare $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$, che sicuramente esiste in quanto $f(x)$ è continua.
Essendo $F(b) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t + k$ e $F(a) = \int_a^a f(t)\, \mathrm{d}t + k = k$, otteniamo:
$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + k - k = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\,.$
Vale quindi il seguente:
Teorema 18 (II^ Teorema fondamentale del calcolo): Sia $f(x)$ continua $\forall\, x \in [a, b]$. Risulta allora $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, dove $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.
L'importanza pratica di questo Teorema è subito evidente: per calcolare l'integrale definito basta determinare una primitiva della funzione integranda, per poi calcolarne la differenza dei valori negli estremi; non occorre cioè ricorrere alla definizione di funzione integrabile.
Ovviamente questo risultato è utilizzabile se si riesce a determinare una primitiva; anche se la ricerca della primitiva è l'operazione inversa della derivata, ed anche se si può calcolare la derivata di ogni funzione, purtroppo non sempre si riesce a compiere l'operazione inversa, cioè a determinare la primitiva. Per ammettere infinite primitive basta che la funzione sia continua, ma purtroppo non si riesce, per la maggior parte delle funzioni, ad andare oltre l'esistenza e determinare l'espressione esplicita delle primitive. Si suole dire in questo caso che la funzione non ha una primitiva esprimibile elementarmente.
E' di fondamentale importanza ricordarsi che la regola pratica per il calcolo dell'integrale definito vale solo nell'ipotesi che la funzione integranda sia continua nell'intervallo d'integrazione, come vediamo nell'esempio che segue.

Esempio 5 : Consideriamo il seguente integrale: $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$. Essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, una primitiva della funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x^2}$ è data dalla funzione $F(x) = -\frac{1}{x}$.
Se usassimo il II^ Teorema fondamentale, otterremmo:
$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\right|_{-1}^{+1} = -1 - 1 = -2\,.$
Tutto sembrerebbe corretto, ma osservando il risultato vediamo anzitutto una palese incongruenza: una funzione strettamente positiva come $f(x) = \frac{1}{x^2}$ avrebbe un integrale negativo, e questo è assurdo.

L'errore consiste nell'aver applicato a questo integrale una regola che vale solamente se la funzione integranda è continua, mentre invece la $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ha una discontinuità di II^ specie infinita in $x = 0$, punto interno all'intervallo d'integrazione. Per problemi come questo bisognerà ricorrere agli integrali generalizzati. Se si fosse dovuto calcolare invece, ad esempio, $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$, la procedura svolta sarebbe stata pienamente valida.

2.13 RICERCA DELLE PRIMITIVE

A questo punto sono due i problemi la cui soluzione compete al calcolo integrale: l'integrale definito, collegato alla ricerca dell'area sotto il grafico di una funzione, e l'integrale indefinito, ovvero la ricerca della totalità delle primitive di una data funzione. Per il II^ Teorema fondamentale abbiamo visto, però, che il calcolo dell'integrale definito può utilizzare l'integrale indefinito, per cui dobbiamo ora affrontare il problema pratico della ricerca delle primitive di una data funzione. Vedremo le primitive che si possono ricavare immediatamente, per poi descrivere due metodi d'integrazione, l'integrazione per sostituzione e l'integrazione per parti. Se occorrerà, scriveremo la funzione integranda nella forma $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ per usare l'uguaglianza $\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))\, \mathrm{d}x = \int f'(x)\, \mathrm{d}x = f(x) + k,\, k \in \mathbb{R}$.

2.14 LINEARITA' DELLE PRIMITIVE

Per cercare la primitiva di una funzione sappiamo che dobbiamo operare in modo inverso rispetto al calcolo della derivata. Vediamo allora anzitutto una proprietà di facile dimostrazione:

Teorema 19 : Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e siano α e β due costanti reali. Allora:

$$\int \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \cdot \int g(x)\, \mathrm{d}x, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione: Come per l'analoga proprietà dell'integrale definito, anche questa si può considerare come la composizione delle due più semplici proprietà:

$$\int \alpha\, f(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int g(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Ma queste due sono di immediata verifica, semplicemente ricordando che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha\, f(x)) = \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) \text{ e che } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) + g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x))\,,$$

e quindi vale la proprietà di linearità delle primitive.

2.15 INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Si tratta ora di fare una rassegna delle cosidette derivate fondamentali, leggerle in senso inverso, e ricavare quelli che chiameremo integrali immediati o fondamentali.

Cominciamo da $\int \mathrm{d}x = \int 1\, \mathrm{d}x$. Essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$, avremo: $\int \mathrm{d}x = x + k$.

Da questo e per la proprietà di linearità avremo anche:

$$\int m\, \mathrm{d}x = m \cdot \int \mathrm{d}x = m\, x + k, m \in \mathbb{R}\,.$$

2.16 INTEGRALI DELLE POTENZE

Essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha - 1}, \alpha \in \mathbb{R}$, sarà anche $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\alpha+1}\right) = (\alpha + 1)\, x^\alpha$ e quindi avremo:

$$\int x^\alpha\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\alpha + 1}\, (\alpha + 1)\, x^\alpha\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot \int (\alpha + 1)\, x^\alpha\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1}\, x^{\alpha + 1} + k\,.$$

Notiamo che questa procedura richiede che sia $\alpha \neq -1$, caso che tratteremo tra breve.

Questo integrale ci introduce ad alcune considerazioni, la più semplice delle quali la possiamo sintetizzare in questo modo: se nella funzione integranda manca una costante moltiplicativa, che dovrebbe esserci per derivazione, allora la primitiva si ottiene moltiplicando per il reciproco della costante, e portando tale reciproco fuori dall'integrale.
Si noti infatti il ruolo della costante $\alpha + 1$ che mancava nella funzione integranda per completare la derivata di $x^{\alpha+1}$; per la proprietà di linearità essa è stata introdotta nella funzione integranda, moltiplicando anche, ma fuori dall'integrale, per il suo reciproco. Vediamo infine il caso $\alpha = -1$.
Essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x) = \frac{1}{x}$, avremo: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log x + k$, purchè sia $x > 0$.
La condizione posta, $x > 0$, ci induce ad una considerazione, in quanto la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, definita $\forall\, x \neq 0$, avrebbe una primitiva definita solo per valori positivi.
La funzione $F(x) = \log(-x)$, definita per $x < 0$, ha per derivata:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log(-x)) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Quindi anch'essa è una primitiva di $f(x) = \frac{1}{x}$, relativamente però ai soli valori negativi.
Presa allora la funzione $F(x) = \log|x| = \begin{cases} \log x & : x > 0 \\ \log(-x) & : x < 0 \end{cases}$, per essa risulta:
$F'(x) = \frac{1}{x}, \forall\, x \neq 0$, e allora scriveremo: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + k, x \neq 0$.
Abbiamo così ottenuto le primitive aventi il più ampio campo d'esistenza, anche se, per far questo, abbiamo rinunciato all'ipotesi di continuità della funzione integranda. Si rivedano a questo proposito alcuni degli esempi precedenti.

2.17 INTEGRALI DELLE FUNZIONI ESPONENZIALI

Vediamo il primo integrale immediato inerente funzioni esponenziali:
da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$ otteniamo $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + k$.

Per una generica funzione esponenziale $f(x) = a^x$, essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \log a$, otterremo:
$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log a}\cdot\int a^x \log a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log a}\cdot a^x + k = a^x \log_a e + k$.

2.18 INTEGRALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Essendo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sen}\,x) = \cos x$, abbiamo: $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sen}\,x + k$, ed essendo invece $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\mathrm{sen}\,x$, abbiamo: $\int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = -\int(-\mathrm{sen}\,x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + k$.
Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$, otteniamo $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + k$,
mentre da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{cotg}\,x) = \frac{-1}{\mathrm{sen}^2 x} = -1 - \mathrm{cotg}^2 x$, si ha, cambiando di segno:
$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \mathrm{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\,x + k$.

2.19 INTEGRALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Per quanto concerne integrali immediati che siano in relazione con le funzioni trigonometriche inverse, da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{1+x^2}$ otteniamo $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + k$.

Essendo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{arccotg}\, x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ si ha pure $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\,\text{arccotg}\, x + k$.
Quest'ultima non deve, se messa in relazione con la precedente, indurre a considerazioni errate del tipo $\text{arctg}\, x = -\,\text{arccotg}\, x$.
Ricordiamo che vale infatti la relazione: $\text{arctg}\, x + \text{arccotg}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.
Essendo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{arcsen}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{arccos}\, x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ otteniamo:
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \text{arcsen}\, x + k,\ k \in \mathbb{R}$ ed anche $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\,\text{arccos}\, x + k$.
Anche qui, come in precedenza, è bene ricordare la relazione : $\text{arcsen}\, x + \text{arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

2.20 METODI DI INTEGRAZIONE

Quando la funzione integranda non sia immediatamente riconducibile ad una derivata nota, sorge il problema di quali tentativi abbia senso fare o di quali strade sia meglio intraprendere per arrivare a determinarne una primitiva. Calcolare primitive è un problema che si risolve per tentativi, ma acquisire esperienza in questo settore significa saper puntare su quello che ha più probabilità di essere il tentativo adatto. Vedremo ora alcuni metodi di integrazione, nonchè una procedura per integrare una classe di funzioni, le cosiddette funzioni razionali fratte.

2.21 INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE

Più che un vero e proprio metodo, questa procedura consiste nel riscrivere la funzione integranda in modo tale da poterla poi esprimere come somma di varie funzioni i cui integrali siano noti o più facilmente calcolabili. Limitiamoci ad alcuni esempi.

Esempio 6 : Calcoliamo $\displaystyle\int \text{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

Sommando e sottraendo 1, ed applicando poi la proprietà di linearità, otteniamo:

$$\int \text{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int 1 + \text{tg}^2 x - 1\,\mathrm{d}x = \int 1 + \text{tg}^2 x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \text{tg}\, x - x + k\,.$$

Esempio 7 : Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Avremo, con facili calcoli:

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \text{tg}\, x - \text{cotg}\, x + k\,.$$

Come si vede, occorre trovare la giusta trasformazione per arrivare ad integrali, almeno per ora, immediati.

2.22 INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Possiamo introdurre questo metodo ripartendo dalla derivata, o meglio dal differenziale, di una funzione composta. Sappiamo che $\mathrm{d}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$, che possiamo anche scrivere come $\mathrm{d}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f'(g(x)) \cdot \mathrm{d}(g(x))$.
Se poniamo $g(x) = t$, otteniamo $\mathrm{d}(f(g(x))) = f'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(f(t))$, ovvero "scompare" la funzione composta trattando $g(x)$ come una nuova variabile indipendente.
Un primo modo con il quale introdurre il metodo di integrazione per sostituzione consiste nel vederlo come inversione della derivata di funzione composta. Possiamo cioè scrivere:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(g(x))\,\mathrm{d}(g(x)) = \int f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Messa in questa forma la primitiva sarebbe fin troppo semplice da calcolare, per cui, per generalizzare la procedura, sostituiamo all'espressione $f'(t)$ l'espressione $F(t)$ ed otteniamo:

$\int F(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int F(g(x)) \cdot \mathrm{d}(g(x)) = \int F(t)\ \mathrm{d}t\,.$

Naturalmente il metodo funziona se è calcolabile la primitiva di $F(t)$.

Esempio 8 : Calcoliamo $\int \mathrm{sen}^3 x\ \mathrm{d}x\,.$

Avremo, prendendo $\cos x = g(x)$:

$$\int \mathrm{sen}^3 x\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{sen}^2 x \cdot \mathrm{sen}\, x\ \mathrm{d}x = -\int 1 - \cos^2 x\ \mathrm{d}(\cos x) =$$

$$= -\int \mathrm{d}(\cos x) + \int \cos^2 x\ \mathrm{d}(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cdot \cos^3 x + k\,.$$

Esempio 9 : Calcoliamo ora $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x\,.$

Analogamente all'esempio precedente, poniamo:

$F(g(x)) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ e $g'(x) = e^x$, per ottenere:

$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}(e^x) = \int \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\,,$ avendo posto $e^x = t$. L'integrale ora è immediato e si ha $\int \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \mathrm{arctg}\ t + k = \mathrm{arctg}\ e^x + k$, una volta riportata la funzione ad avere x come variabile indipendente.

Esempio 10 : Calcoliamo $\int \mathrm{tg}\ x\ \mathrm{d}x\,.$

Con procedura analoga ai casi precedenti, avremo:

$\int \mathrm{tg}\ x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sen}\ x}{\cos x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \mathrm{sen}\ x\ \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}(\cos x)$. Il segno negativo è stato introdotto in quanto $\mathrm{d}(\cos x) = -\mathrm{sen}\ x\ \mathrm{d}x$. Posto ora $\cos x = t$, avremo:

$$-\int \frac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}(\cos x) = -\int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = -\log|t| + k = -\log|\cos x| + k\,.$$

Esempio 11 : Calcoliamo $\int (x-1)\, e^{x^2-2x}\ \mathrm{d}x\,.$

Essendo $\mathrm{d}\big(x^2-2x\big) = 2\,(x-1)\ \mathrm{d}x$, avremo:

$$\int (x-1)\, e^{x^2-2x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int e^{x^2-2x}\ \mathrm{d}\big(x^2-2x\big) = \frac{1}{2} \cdot \int e^t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, e^t + k =$$

$= \frac{1}{2}\, e^{x^2-2x} + k$, avendo posto, chiaramente, $t = x^2 - 2x$.

Esempio 12 : Calcoliamo $\int \frac{1}{\mathrm{sen}\ x}\ \mathrm{d}x\,.$

Da $\mathrm{sen}\, 2x = 2\,\mathrm{sen}\, x \cos x$ segue $\mathrm{sen}\, x = 2\,\mathrm{sen}\, \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, ed essendo $\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$,

otteniamo $\int \frac{1}{\mathrm{sen}\ x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2\,\mathrm{sen}\, \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x =$

$$= \int \frac{\mathrm{sen}\ \frac{x}{2}}{2\ \cos \frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x + \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2\ \mathrm{sen}\ \frac{x}{2}}\ \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}\ \mathrm{d}\Big(\cos \frac{x}{2}\Big) + \int \frac{1}{\mathrm{sen}\ \frac{x}{2}}\ \mathrm{d}\Big(\mathrm{sen}\ \frac{x}{2}\Big) =$$

$$= -\log\left|\cos \frac{x}{2}\right| + \log\left|\mathrm{sen}\ \frac{x}{2}\right| + k = \log\left|\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}\right| + k\,.$$

Esempio 13 : Per calcolare $\int \frac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}x$, usiamo la $\cos x = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ed avremo:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

dalla quale, posto $\frac{\pi}{2} - x = t$, e visto l'esempio precedente, otteniamo

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t = \log\left|\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right| + k = \log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + k\,.$$

Esempio 14 : Calcoliamo $\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x$.

Essendo $e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}: & x<0 \\ e^{x}: & x\geq 0 \end{cases}$, integrando le due leggi si ha:

$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -e^{-x}+k_1 & : x<0 \\ e^{x}+k_2 & : x\geq 0 \end{cases}$. Essendo $f(x)=e^{|x|}$ continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$, anche ogni sua primitiva dovrà esserlo, per cui imponiamo che sia:

$\lim_{x\to 0^-}\left(-e^{-x}+k_1\right) = k_1 - 1 = k_2 + 1 = f(0)$, da cui segue: $k_2 = k_1 - 2$,

e quindi $\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -e^{-x}+k & : x<0 \\ e^{x}+k-2 & : x\geq 0 \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

Un modo equivalente per introdurre l'integrazione per sostituzione è quello di partire da $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, ovviamente supponendo che di $f(x)$ non si sappia calcolare la primitiva. Se poniamo $x = g(t)$ otteniamo $f(x) = f(g(t))$ e, cosa altrettanto importante nonchè fonte principale di errore qualora si tralasciasse, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(g(t)) = g'(t)\,\mathrm{d}t$.
Quest'ultima deriva dal fatto che la sostituzione $x = g(t)$ rende la originaria variabile indipendente x variabile dipendente (dalla t) e quindi il differenziale dx va anch'esso ricalcolato, come differenziale, dando luogo appunto a $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.
Fatta allora la sostituzione otteniamo:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int F(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nonostante l'apparente complicazione, ovviamente la metodologia scelta sarà quella giusta se $\int F(t)\,\mathrm{d}t$ risulta calcolabile.

Esempio 15 : Calcoliamo $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Poniamo $x = \operatorname{sen} t$, per cui sarà $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, e l'integrale dato diverrà:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

Essendo, per le formule di bisezione, $\cos t = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$, otteniamo:

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + k\,.$$

Rimane ora da riportare la primitiva in funzione della variabile originaria x, ed avremo:
da $x = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \operatorname{arcsen} x$; mentre: $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\cos t = 2\operatorname{sen} t\,\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}$
e quindi: $\operatorname{sen} 2t = 2\,x\,\sqrt{1-x^2}$ per cui sarà:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + k = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2} + k\,.$$

Esempio 16 : Calcoliamo $\int \sqrt{1-e^x}\,\mathrm{d}x$.

Poniamo $\sqrt{1-e^x}=t$, da cui si ottiene $e^x = 1-t^2$ e quindi $x = \log\left(1-t^2\right)$, da cui $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1-t^2}\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t$.

Quindi, sostituendo, $\displaystyle\int\sqrt{1-e^x}\,\mathrm{d}x = \int t\cdot\frac{1}{1-t^2}\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t =$

(applichiamo il metodo di decomposizione)

$$= 2\cdot\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int 1+\frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int\mathrm{d}t + \int\frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\,t + \int\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\,t + \log|t-1| - \log|t+1| + k =$$

(risostituendo $\sqrt{1-e^x}=t$):

$$\int\sqrt{1-e^x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1-e^x} + \log\left|\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}\right| + k\,.$$

Si è visto dagli esempi quanto sia importante, in $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, il ruolo del fattore $\mathrm{d}x$, attraverso il quale, se del caso, un integrale per sostituzione vede trasformare la funzione integranda in una funzione di cui è possibile calcolare la primitiva. Riguardando ai calcoli sviluppati negli esempi, vediamo come $f(x)\,\mathrm{d}x$ sia un vero e proprio differenziale, e quindi come il fattore $\mathrm{d}x$ non sia solo un formale completamento del simbolo.

Si legge talvolta che il fattore $\mathrm{d}x$ ha il compito di indicare la variabile d'integrazione, e questa motivazione può avere una sua validità, come nei due esempi che seguono:

$\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + k$ mentre invece $\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}t = \cos x\cdot t + k$.

Il secondo integrale, infatti, ha per funzione integranda la costante cos x, essendo t la variabile d'integrazione. Tolto quindi il caso di una funzione integranda che abbia nella sua espressione altre "lettere" da trattarsi come costanti, il ruolo del $\mathrm{d}x$ è quello di consentire il calcolo esatto della derivata di funzione composta, quando la variabile d'integrazione da indipendente diventa dipendente.

Dovremo quindi vedere $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ come $\displaystyle\int\left(f(x)\,\mathrm{d}x\right)$, il chè equivale a dire, più propriamente, che l'integrale indefinito è l'operazione inversa non della derivata ma del differenziale.

2.23 INTEGRAZIONE PER PARTI

Se l'integrazione per sostituzione si può vedere come inversione della derivata di funzione composta, l'integrazione per parti è invece riconducibile alla derivata di un prodotto.

Sappiamo che $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ e quindi anche, passando ai differenziali: $\mathrm{d}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$.

I termini dell'uguaglianza sono due differenziali, e due differenziali coincidono se le loro funzioni primitive differiscono per una costante, ovvero sarà anche:

$$\int\mathrm{d}\left(f(x)\cdot g(x)\right) + k = \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Per quanto già visto, $\displaystyle\int\mathrm{d}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f(x)\cdot g(x)$, per cui otterremo:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x + k\,.$$

Questa è la formula della cosiddetta integrazione per parti, che ora leggiamo nelle sue varie componenti, da sinistra verso destra. Si deve calcolare la primitiva di una funzione che "conviene" leggere come un prodotto di due funzioni: $f'(x) \cdot g(x)$. La prima, $f'(x)$, deve essere vista come una derivata, di cui però sia facile calcolare la primitiva, visto che il primo termine a destra nell'uguaglianza, $f(x) \cdot g(x)$, contiene non $f'(x)$ ma la sua primitiva $f(x)$. Dell'altra funzione $g(x)$ non si calcola la primitiva, ma la derivata; il metodo d'integrazione per parti funziona se l'integrale rimanente, $\int f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x$, risulta calcolabile.

Vedremo nel seguito come l'integrazione per parti possa anche necessitare di essere iterata più volte.

In $\int f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$ il termine $f'(x)$ prende il nome di fattore differenziale, mentre $g(x)$ è detto fattore finito.

Esempio 17 : Calcoliamo integrando per parti $\int x\, e^x\, \mathrm{d}x$.

Scriviamo, una sull'altra, la formula generale e quella che scaturisce da questo esempio, in modo da poter fare gli opportuni confronti:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x + k$$

$$\int e^x\, x\, \mathrm{d}x = e^x\, x - \int e^x \cdot 1\, \mathrm{d}x + k = e^x\, x - e^x + k\,.$$

Si è quindi posto:

$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$, e

$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.

Esempio 18 : Calcoliamo ora $\int \log x\, \mathrm{d}x$.

Per poter applicare l'integrazione per parti, abbiamo bisogno di una funzione integranda espressa sotto forma di prodotto, per cui consideriamo:

$$\int \log x\, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log x\, \mathrm{d}x\,.$$

Questa scelta, obbligata, rende ancor più obbligata la scelta del fattore finito e del fattore differenziale; non possiamo che prendere:

$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$, e

$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

La rimanente diversa attribuzione dei ruoli avrebbe comportato $g(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = 0$, che non ha nessuna utilità nello sviluppo della regola.

Passando ai calcoli, avremo:

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x + k$$

$$\int 1 \cdot \log x\, \mathrm{d}x = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + k = x \log x - x + k\,.$$

Esempio 19 : Calcoliamo anche $\int \operatorname{arctg} x\, \mathrm{d}x$.

Siamo nella stessa situazione dell'esempio precedente, ed avremo:

$$\int \operatorname{arctg} x\, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x\, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x + k\,.$$

Passando al calcolo dell'integrale rimanente, si ha:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}\big(1+x^2\big) = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \log |t| + k = \frac{1}{2} \log \big(1+x^2\big)\,,$$

in quanto $\mathrm{d}\big(1+x^2\big) = 2x\,\mathrm{d}x$, avendo poi posto $1+x^2 = t$.
Avremo quindi: .

$$\int \text{arctg}\, x\; \mathrm{d}x = x\, \text{arctg}\, x - \frac{1}{2} \log\,\big(1+x^2\big) + k\,.$$

Esempio 20 : Usando la stessa procedura degli esempi precedenti, calcoliamo $\int \text{arcsen}\, x\; \mathrm{d}x$:

$$\int \text{arcsen}\, x\; \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \text{arcsen}\, x\; \mathrm{d}x = x\, \text{arcsen}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\; \mathrm{d}x + k\,.$$

Risolvendo l'integrale rimanente avremo:

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\; \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \int \big(1-x^2\big)^{-\frac{1}{2}}\; \mathrm{d}\big(1-x^2\big) = -\frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}}\; \mathrm{d}t = -\sqrt{t}$, ed essendo:
$\mathrm{d}\big(1-x^2\big) = -2x\; \mathrm{d}x$ ed avendo posto $1-x^2 = t$, il risultato finale sarà:

$$\int \text{arcsen}\, x\; \mathrm{d}x = x\, \text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + k\,.$$

Esempio 21 : Calcoliamo $\int x^3\, e^x\; \mathrm{d}x$.

Questo esempio serve a far vedere come ci possa essere talvolta la necessità di iterare più volte l'integrazione per parti per poter arrivare al risultato finale. Scegliamo, come fatto in precedenza:
$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$, e
$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$, per cui otterremo:
$\int x^3\, e^x\; \mathrm{d}x = x^3\, e^x - 3 \cdot \int x^2\, e^x\; \mathrm{d}x + k$, e ripetendo nell'ultimo integrale l'integrazione per parti, con:
$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$, e
$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$, otterremo:
$\displaystyle\int x^3\, e^x\; \mathrm{d}x = x^3\, e^x - 3\left(x^2\, e^x - 2\int x\, e^x\; \mathrm{d}x\right) + k$, per avere infine:

$$\int x^3\, e^x\; \mathrm{d}x = x^3\, e^x - 3\, x^2\, e^x + 6\, x\, e^x - 6\, e^x + k\,.$$

L'integrale rimanente è quello calcolato, sempre per parti, nel primo esempio.

Esempio 22 : Per vedere altri possibili accorgimenti utili, calcoliamo $\int e^x \cos\, x\; \mathrm{d}x$.

Operiamo sempre per parti, ponendo:
$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$, e
$g(x) = \cos\, x \Rightarrow g'(x) = -\,\text{sen}\, x$, e quindi otterremo:

$$\int e^x \cos\, x\; \mathrm{d}x = e^x \cos\, x - \int e^x\, (-\,\text{sen}\, x)\; \mathrm{d}x + k = e^x \cos\, x + \int e^x\, \text{sen}\, x\; \mathrm{d}x + k\,.$$

Integrando nuovamente per parti, e ponendo:
$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x$, e
$g(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow g'(x) = \cos\, x$, otterremo:
$\int e^x\, \text{sen}\, x\; \mathrm{d}x = e^x\, \text{sen}\, x - \int e^x \cos\, x\; \mathrm{d}x$, per cui otteniamo:

$$\int e^x \cos\, x\; \mathrm{d}x = e^x \cos\, x + e^x\, \text{sen}\, x - \int e^x \cos\, x\; \mathrm{d}x + k\,.$$

Siamo quindi tornati all'integrale di partenza, e quindi otteniamo:
$2\int e^x \cos\, x\; \mathrm{d}x = e^x \cos\, x + e^x\, \text{sen}\, x + k$, ovvero:

$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + h$ (con $h = \frac{k}{2}$ per brevità).

Questa volta l'integrazione per parti non ci ha condotto alla risoluzione di un'integrale ma ad un'equazione che contiene l'integrale dato al pari di una incognita, e la risoluzione di questa equazione determina la primitiva cercata.

Esempio 23 : Usiamo ambedue i metodi, sostituzione e parti, per calcolare $\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x$.

Eseguiamo anzitutto una integrazione per parti, ottenendo:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x + k =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x + k\,.$$

Trascurando la prima parte ed il segno negativo, calcoliamo ora $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x$. Avremo:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x = \int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x\,, \text{ per cui:}$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x + k\,,$$

e sommando i termini uguali otteniamo:

$$2\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x + k\,.$$

Rimane quindi da calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x$.

Operiamo per sostituzione, ponendo $x = \operatorname{tg} t$, per cui $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t$ e quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos t}\, \mathrm{d}t\,.$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato in un esempio precedente, e vale:

$$\int \frac{1}{\cos t}\, \mathrm{d}t = \log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right|.$$

Essendo $x = \operatorname{tg} t$ avremo $t = \operatorname{arctg} x$ e quindi:

$$2\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} + \log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)\right| + k\,, \text{ ovvero:}$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)\right|\right) + h\,, \text{ con } h = \frac{k}{2}\,.$$

2.24 INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Vediamo ora una classe di funzioni per le quali la ricerca delle primitive si effettua attraverso una ben precisa metodologia, ed è questa la classe delle funzioni razionali fratte, ovvero delle funzioni esprimibili sotto forma di quoziente di due polinomi:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,.$$

Per procedere alla determinazione delle loro primitive occorre inizialmente riportare, se già non lo fosse, il quoziente $\frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)}$ ad avere per numeratore un polinomio il cui grado sia stret-

tamente minore di quello a denominatore. Se il grado di $\mathrm{P}_n(x)$ fosse maggiore o uguale a quello di $\mathrm{P}_m(x)$ occorre procedere alla divisione tra i due polinomi, fino ad ottenere:
$\dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)} = \mathrm{Q}(x) + \dfrac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}$, dove, se la divisione è eseguita correttamente, il grado di $\mathrm{R}(x)$ è strettamente minore di quello di $\mathrm{P}_m(x)$.
Avremo allora $\displaystyle\int \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x$.
Non c'è nulla da dire su $\displaystyle\int \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x$ in quanto è l'integrale di un polinomio, e già abbiamo visto come calcolarlo. Resta da descrivere la procedura per l'integrazione di $\displaystyle\int \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x$, dove, lo ripetiamo, il grado di $\mathrm{R}(x)$ deve essere strettamente minore di quello di $\mathrm{P}_m(x)$.
A questo punto occorre esaminare il polinomio $\mathrm{P}_m(x)$ per trovare le sue radici, ovvero i valori della variabile x tali che $\mathrm{P}_m(x) = 0$. Dal Teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che l'equazione polinomiale $\mathrm{P}_m(x) = 0$ ammette esattamente m radici, in numero cioè pari al grado del polinomio,che potranno poi essere reali o complesse, semplici o multiple.
Consideriamo come esempio il polinomio, opportunamente fattorizzato:
$\mathrm{P}_{10}(x) = (x+3)\,(x-1)^3\,\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)^2$.
L'equazione $\mathrm{P}_{10}(x) = 0$ ammette due radici reali, $x = -3$ e $x = 1$. La prima è radice semplice, essendo il fattore $(x+3)$ elevato a potenza 1; la $x = 1$ è radice multipla di ordine 3 per l'esponente 3 del fattore $(x-1)^3$. Abbiamo quattro radici reali, e di conseguenza ce ne saranno 6 complesse.
Le radici complesse provengono da fattori di secondo grado $\mathrm{P}_2(x) = x^2 + px + q$, con discriminante $\triangle = p^2 - 4q < 0$.
In $\mathrm{P}_{10}(x)$ il fattore $\left(x^2+1\right)$ ci dà le prime due radici complesse (e coniugate), $x = \pm i$, che sono quindi due radici complesse semplici. Il fattore $\left(x^2+x+1\right)^2$ presenta invece soluzioni complesse multiple di ordine 2, per un totale di quattro radici. Esso ha infatti le radici $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$, che sono doppie in quanto $\left(x^2+x+1\right)$ è elevato al quadrato.
Cominciamo allora con l'esame di questi quattro casi, e vedremo poi come, noti questi, sia facile passare al caso generale, ovvero al caso di un denominatore polinomiale che ammette radici dei vari tipi considerati.

2.25 INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE CON ZERI REALI SEMPLICI

Ammettiamo di avere un denominatore $\mathrm{P}_m(x)$ con due radici reali e semplici. Sia, ad esempio, $\mathrm{P}_2(x) = (x-a)\,(x-b)$.
Aver scelto due radici, invece che un qualunque numero di radici reali e semplici, significa tenere al minimo l'ingombro delle formule e dei calcoli; vedremo dopo come passare dal caso minimo al caso generale.
Iniziamo allora a calcolare $\displaystyle\int \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)\,(x-b)}\,\mathrm{d}x$.
Per quanto detto in precedenza, dovendo il grado del denominatore essere maggiore di quello del numeratore, il grado di $\mathrm{R}(x)$ sarà in questo caso al massimo pari ad 1.
Si parte dall'ipotesi che la frazione $\dfrac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)\,(x-b)}$ sia il risultato della somma di due frazioni, una avente per denominatore $(x-a)$ e l'altra $(x-b)$, cioè si suppone che sia:
$\dfrac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)\,(x-b)} = \dfrac{\mathrm{A}}{(x-a)} + \dfrac{\mathrm{B}}{(x-b)}, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

Si può dimostrare, ma lo omettiamo, che una tale scomposizione esiste ed è unica, ovvero esistono due e due sole costanti A e B che rendono vera la precedente uguaglianza. Avremo allora:

$$\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)\,(x-b)}=\frac{\mathrm{A}}{(x-a)}+\frac{\mathrm{B}}{(x-b)}=\frac{\mathrm{A}\,(x-b)+\mathrm{B}\,(x-a)}{(x-a)\,(x-b)}$$, da cui otteniamo:

$\mathrm{R}(x)=(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,x+(\,-\mathrm{A}\,b-\mathrm{B}\,a)\,.$

Due polinomi sono uguali se e solo se hanno esattamente lo stesso grado e gli stessi coefficienti, per cui, posto $\mathrm{R}(x)=m\,x+q$, basterà imporre: $\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=m\\ -\mathrm{A}\,b-\mathrm{B}\,a=q\end{cases}$, che ci porta a determinare le costanti in modo univoco: $\begin{cases}\mathrm{A}=\dfrac{ma+q}{a-\mathrm{b}}=k_1\\ \mathrm{B}=\dfrac{mb+q}{b-a}=k_2\end{cases}$, per cui avremo infine:

$$\int\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)\,(x-b)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{k_1}{(x-a)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{k_2}{(x-b)}\,\mathrm{d}x=k_1\log|x-a|+k_2\log|x-b|+k$$
.

Passiamo al caso generale, avendo come problema:

$$\int\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a_1)\,(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)}\,\mathrm{d}x\,,$$

ovvero un denominatore che abbia esattamente m radici reali semplici a_1, a_2,..., a_m.

Come nel caso precedente esistono, uniche, m costanti A_1 A_2,..., A_m tali che:

$$\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}=\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a_1)\,(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)}=\frac{\mathrm{A}_1}{(x-a_1)}+\frac{\mathrm{A}_2}{(x-a_2)}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_m}{(x-a_m)}\,.$$

La loro determinazione si effettua nel solito modo, imponendo cioè che siano uguali i coefficienti del polinomio $\mathrm{R}(x)$, che ora avrà al massimo grado pari a $m-1$, e quelli del polinomio che verrà a numeratore una volta operata la somma delle m frazioni. Non avremo, come nel caso precedente, un sistema di 2 equazioni in 2 incognite, bensì di m equazioni in m incognite, ma restano garantite anche in questo caso l'esistenza e l'unicità della soluzione. (Risulta sempre applicabile il Teorema di Cramer sui sistemi lineari a matrice quadrata non singolare). Avremo allora:

$$\int\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{A}_1}{(x-a_1)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{A}_2}{(x-a_2)}\,\mathrm{d}x+\ldots+\int\frac{\mathrm{A}_m}{(x-a_m)}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\mathrm{A}_1\log|x-a_1|+\mathrm{A}_2\log|x-a_2|+\ldots+\mathrm{A}_m\log|x-a_m|+k\,.$$

2.26 INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE CON ZERI REALI MULTIPLI

Ammettiamo ora che il polinomio $\mathrm{R}(x)$ abbia almeno una soluzione reale multipla, che noi prenderemo ad esempio tripla, sempre per non fare calcoli troppo laboriosi.

Sia allora $\displaystyle\int\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_3(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)^3}\,\mathrm{d}x\,.$

Il grado di $\mathrm{R}(x)$ sarà al massimo pari a 2. Come al solito, si può dimostrare che esiste ed è unica la scomposizione, che questa volta dovrà essere del tipo:

$$\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)^3}=\frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)}+\frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2}+\frac{\mathrm{A}_3}{(x-a)^3}\,.$$

Ovvero, bisogna ipotizzare tante frazioni quanta è la molteplicità della radice, ed in ciascuna frazione mettere a denominatore tutte le potenze, via via crescenti, da 1 fino a 3, del fattore $(x-a)$. Il numeratore di ciascuna delle frazioni anche questa volta è una costante da determinare. Imponendo come prima l'uguaglianza tra i numeratori, otterremo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, che ha una ed una sola soluzione, e che ci dà le primitive:

$$\int \frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{A}_3}{(x-a)^3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{A}_1 \log|x-a| - \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{A}_3}{(x-a)^2} + k\,.$$

Passando al caso generale, dovendo integrare:

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x$ dovremo impostare una scomposizione del tipo:

$$\frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)^m} = \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \frac{\mathrm{A}_m}{(x-a)^m}\,.$$

Otterremo un sistema di m equazioni in m incognite che avrà una ed una sola soluzione, e la scomposizione operata ci condurrà alle primitive:

$$\int \frac{\mathrm{R}(x)}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)}\,\mathrm{d}x + \sum_{i=2}^{m} \int \frac{\mathrm{A}_i}{(x-a)^i}\,\mathrm{d}x + k =$$
$$= \mathrm{A}_1 \log|x-a| + \sum_{i=2}^{m} \frac{\mathrm{A}_i}{1-i} \cdot \frac{1}{(x-a)^{i-1}} + k\,.$$

Esempio 24 : Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Dato che numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, eseguiamo anzitutto la divisione tra i due polinomi ed otteniamo:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{2x^2-1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x^2-1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Passiamo allora al calcolo di $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x$. Essendo: $x^3+2x^2 = x^2(x+2)$, il denominatore presenta la radice reale e semplice $x = -2$ e la radice reale doppia $x = 0$. Imponiamo allora, seguendo i due casi precedenti:

$$\frac{2x^2-1}{x^2(x+2)} = \frac{\mathrm{A}}{x} + \frac{\mathrm{B}}{x^2} + \frac{\mathrm{C}}{(x+2)}\,.$$

Da questa, mettendo a denominatore comune, otteniamo:

$$\frac{2x^2-1}{x^2(x+2)} = \frac{\mathrm{A}\,x(x+2) + \mathrm{B}(x+2) + \mathrm{C}\,x^2}{x^2(x+2)} = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})\,x^2 + (2\mathrm{A}+\mathrm{B})\,x + 2\mathrm{B}}{x^2(x+2)}$$ ed imponendo poi l'uguaglianza tra i numeratori si ha:

$2x^2 - 1 = (\mathrm{A}+\mathrm{C})\,x^2 + (2\mathrm{A}+\mathrm{B})\,x + 2\mathrm{B}$, e siamo condotti al sistema:

$\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{C} = 2 \\ 2\mathrm{A}+\mathrm{B} = 0 \\ 2\mathrm{B} = -1 \end{cases}$ che ammette l'unica soluzione: $\begin{cases} \mathrm{A} = \frac{1}{4} \\ \mathrm{B} = -\frac{1}{2} \\ \mathrm{C} = \frac{7}{4} \end{cases}$, dalla quale infine otteniamo:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{2x^2-1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{7}{4}\int \frac{1}{(x+2)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x - \frac{1}{4}\log|x| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{7}{4}\log|x+2| + k\,.$$

2.27 INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE CON ZERI COMPLESSI SEMPLICI

Iniziamo trattando il caso di un denominatore $x^2 + px + q$ che presenti due radici complesse. Queste provengono da polinomi di II^ grado $\mathrm{P}_2(x) = x^2 + px + q$, con discriminante $\triangle = p^2 - 4q < 0$.
Si è scelto 1 come coefficiente di x^2 per semplificare i calcoli, tenendo anche presente che a questa forma si può sempre riportare un polinomio di II^ grado. Per quanto detto in precedenza il grado di $\mathrm{R}(x)$ sarà al massimo uguale a 1, per cui poniamo $\mathrm{R}(x) = ax + b$.
Vediamo anzitutto come integrare $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$.
Nelle ipotesi fatte, ovvero numeratore di I^ grado e denominatore di II^ con discriminante negativo, la primitiva sarà costituita da una funzione logaritmo, o da una funzione arcotangente, o da ambedue.
Non ci sono altre funzioni da cercare. Avremo una primitiva costituita solamente da un logaritmo se $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+px+q\right) = c\,(ax+b)$ ovvero se il numeratore è, a meno di una costante moltiplicativa, la derivata del denominatore. In questo caso, otteniamo:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\cdot\int \frac{c\,(ax+b)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\cdot\int \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{c}\cdot\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\left(x^2+px+q\right) = \frac{1}{c}\cdot\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\log|t| + k =$$
$$= \frac{1}{c}\log\left(x^2+px+q\right) + k\,.$$

Avremo invece una primitiva costituita solamente da un'arcotangente se il numeratore è una costante: $\mathrm{R}(x) = b$. Per calcolare l'integrale, dovremo portare $\dfrac{b}{x^2+px+q}$ ad assumere la forma: $h_1 \cdot \dfrac{1}{1+(h_2x+h_3)^2}$ con h_1, h_2, h_3 costanti opportune da determinare. I calcoli da fare sono sempre gli stessi qualunque siano i coefficienti del denominatore; sviluppiamo ed avremo:

$$\int \frac{b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = b\cdot\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x =$$

(si è creato a denominatore, nel primo termine, il quadrato di un binomio)

$$= \frac{4b}{4q-p^2}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{4}{4q-p^2}\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

(si è messo in evidenza nel denominatore la costante per avere la somma di 1 con un quadrato)

$$= \frac{4b}{4q-p^2}\cdot\int \frac{1}{1+\left[\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)\right]^2}\,\mathrm{d}x =$$

(anche la costante moltiplicativa si porta dentro il quadrato)

$$= \frac{2b}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\int \frac{1}{1+\left[\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)\right]^2}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\cdot\left(x+\frac{p}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2b}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$ avendo posto $t = \sqrt{\dfrac{4}{4q-p^2}}\cdot\left(x+\dfrac{p}{2}\right)$, e si ha:

$$= \frac{2b}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg} t + k = \frac{2b}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}} \cdot \left(x + \frac{p}{2}\right)\right) + k\,.$$

Vista la procedura svolta, vediamo che l'integrale si sarebbe potuto calcolare anche con il metodo di sostituzione; a tale scopo si sarebbe dovuto porre $x = \left(\sqrt{4q-p^2} \cdot \frac{t}{2} - \frac{p}{2}\right)$ per ottenere lo stesso risultato trovato in precedenza. Notiamo anche come, dato il polinomio $x^2 + px + q$, la sostituzione $x = \left(\sqrt{4q-p^2} \cdot \frac{t}{2} - \frac{p}{2}\right)$ porti il polinomio dato nella forma $\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \cdot \left(1 + t^2\right)$, ovvero, a meno di una costante moltiplicativa, ad un polinomio avente nullo il coefficiente del termine di I^ grado.

Quando non siamo nei due casi precedenti, occorre ricercare sia il logaritmo che l'arcotangente.
E' sempre bene partire dalla ricerca del logaritmo, scrivendo:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{a}{2}(2x+p) - \frac{ap}{2} + b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{a}{2} \cdot \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \cdot \int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x\,.$$

I due integrali ora ricadono nei due casi particolari trattati in precedenza, ed andranno integrati con le metodologie precedentemente descritte.

Vediamo poi come operare quando il denominatore presenta più di una coppia di soluzioni complesse. Al minimo, al solito, avremo una situazione quale la seguente:
$\int \frac{\mathrm{R}(x)}{(x^2+ax+b)\,(x^2+cx+d)}\,\mathrm{d}x$, con x^2+ax+b e x^2+cx+d polinomi di II^ grado a discriminante negativo. Si dovrà ora ricercare una scomposizione del tipo:
$\frac{\mathrm{R}(x)}{(x^2+ax+b)\,(x^2+cx+d)} = \frac{\mathrm{A}_1\,x + \mathrm{B}_1}{x^2+ax+b} + \frac{\mathrm{A}_2\,x + \mathrm{B}_2}{x^2+cx+d}$, con A_1, A_2, B_1 e B_2 costanti da determinare.
Ovvero, nel caso di polinomio a denominatore di II^ grado con radici complesse, non si deve ipotizzare il numeratore come costante ma come un polinomio di I^ grado. Così facendo, nel caso in esempio, otterremo un sistema di 4 equazioni in 4 incognite che avrà sempre una ed una sola soluzione. Abbiamo visto in precedenza come poi integrare ciascuno dei due fattori.

2.28 INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE CON ZERI COMPLESSI MULTIPLI

Se invece abbiamo $\int \frac{\mathrm{R}(x)}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x$, siamo nel caso di denominatore con radici complesse multiple. Dovremo allora porre: $\frac{\mathrm{R}(x)}{(x^2+px+q)^m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{A}_i \cdot x + \mathrm{B}_i}{(x^2+px+q)^i}$, ovvero una somma di m frazioni, tutte aventi a numeratore un polinomio di I^ grado ed a denominatore le potenze via via crescenti, da 1 a m, del polinomio x^2+px+q. Otterremo un sistema di $2m$ equazioni in $2m$ incognite che avrà, al solito, una ed una sola soluzione.
Sappiamo come trovare la primitiva di funzioni del tipo $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, resta da illustrare come integrare funzioni del tipo $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^m}$, $m > 1$.

Sia allora da calcolare $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x,\ m>1\,.$

Come prima cosa anche ora operiamo inizialmente per determinare, nel numeratore, la derivata del denominatore, e quindi trasformiamo:

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{a}{2}(2x+p)-\frac{ap}{2}+b}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{a}{2}\cdot\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\cdot\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{a}{2(1-m)}\cdot\left(x^2+px+q\right)^{1-m} + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\cdot\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rimane da calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x\,.$

Vediamo come determinare la primitiva di questa classe di funzioni, con numeratore uguale a 1 e denominatore a radici complesse di molteplicità m.

Sappiamo che la sostituzione $x = \left(\sqrt{4q-p^2}\cdot\frac{t}{2}-\frac{p}{2}\right)$ porta il polinomio x^2+px+q nella forma $\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\cdot\left(1+t^2\right)$, e quindi, operando tale sostituzione, avremo:

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{4q-p^2}\cdot\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t\,.$$

Occorre, per concludere, descrivere la procedura per integrare $\displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t\,.$

Posto $I_m = \displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t$, integrando per parti con 1 come fattore differenziale, avremo:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^m} - \int \frac{t\cdot 2t\cdot(-m)}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\cdot\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\cdot\int \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t - 2m\cdot\int \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\cdot\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t - 2m\cdot\int \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Avendo posto $I_m = \displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t$, sarà anche $I_{m+1} = \displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t$,

e quindi la precedente uguaglianza si potrà anche scrivere come:

$$I_m = \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\cdot I_m - 2m\cdot I_{m+1}$$

da cui otterremo infine:

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\cdot I_m\,,$$

ovvero:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^{m+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2m}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\cdot\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,\mathrm{d}t\,.$$

La formula consente di abbassare di una unità il grado del denominatore, e deve essere iterata m volte fino a giungere al calcolo di $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \text{arctg}\, t + k$. Infine, risostituendo, occorre riportare le primitive ad avere per variabile x. Il procedimento, per valori di m molto elevati, risulterà palesemente lungo, ma è anche l'unico disponibile.

INTEGRALI GENERALIZZATI

3.1 INTEGRALI GENERALIZZATI

Due elementi caratterizzano la classe delle funzioni a cui si può applicare la definizione di funzione integrabile: essere la funzione limitata ed esserlo in un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$. Ovvero si richiede limitatezza sia nel dominio che nel codominio. Questo, come abbiamo visto, non è comunque sufficiente ad assicurare che la funzione risulti poi integrabile. Allarghiamo ora il campo di applicabilità della definizione d'integrale.
Due sono le direzioni in cui possiamo procedere: considerere un intervallo d'integrazione che non sia limitato oppure considerare funzioni non limitate (e considerere poi anche ambedue i casi contemporaneamente). Questi casi conducono al concetto di integrale improprio o generalizzato.

3.2 INTEGRALI GENERALIZZATI DI I^ SPECIE

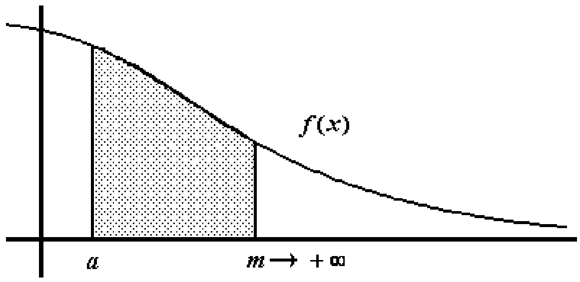
Consideriamo una funzione $f(x)$ il cui campo di esistenza sia illimitato (superiormente, inferiormente o ambedue). Ci poniamo il problema di definire i seguenti integrali, che vengono detti integrali generalizzati di I^ specie:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x\ ,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Il primo richiede che il campo di esistenza di $f(x)$ sia illimitato superiormente, il secondo che lo sia inferiormente, il terzo richiede entrambe le condizioni.
Il terzo tipo si riconduce subito ai primi due, potendosi scrivere, per le proprietà dell'integrale, detto a un punto opportuno: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x\,.$

3.3 DEFINIZIONE DI INTEGRALE GENERALIZZATO DI I^ SPECIE

Daremo la definizione nel primo caso, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$, mentre per il secondo si tratterà di fare semplici analogie con il caso precedente.
Preso un qualunque valore $m > a$, supponiamo che la funzione $f(x)$ sia integrabile nell'intervallo $[a, m]$, ovvero che esista $\displaystyle\int_a^{m} f(x)\ \mathrm{d}x, \forall\, m > a$.
Quest'ipotesi è sicuramente soddisfatta se nell'intervallo $[a, +\infty[$ la funzione è continua, oppure se ivi ammette un numero finito di discontinuità di I^ e III^ specie.
Possiamo allora dare la seguente:
Definizione 9 (di funzione integrabile in senso generalizzato di I^ specie):
Si dice che la funzione $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[a, +\infty[$ se esiste finito il $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_a^{m} f(x)\ \mathrm{d}x$; in tal caso si pone $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{m\to+\infty}\int_a^{m} f(x)\ \mathrm{d}x\,.$
Si riconduce il calcolo a quello di normali integrali definiti, con un estremo superiore d'integrazione m considerato come un parametro, e si esamina, con un passaggio al limite, come si comporta tale integrale quando l'estremo d'integrazione diventa sempre più grande.
Se esso tende ad un valore finito, diciamo per definizione che la funzione $f(x)$ ammette integrale generalizzato; se il limite è infinito o non esiste, la funzione sarà detta non integrabile in $[a, +\infty[$.
Se la funzione $f(x)$ fosse sempre positiva in $[a, +\infty[$ non potrà accadere che il limite non esista, in quanto la funzione $h(m) = \displaystyle\int_a^{m} f(x)\ \mathrm{d}x$ risulta monotòna crescente, e quindi o ha limite finito oppure diverge a $+\infty$. Questa proprietà resta valida anche se la funzione $f(x)$ fosse positiva da un certo $b > a$ in poi.



Esempio 25 : Vediamo se esiste $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Usando la definizione, dobbiamo vedere se esiste finito $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^m e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Essendo $\displaystyle\int_0^m e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left(-e^{-x}\right|_0^m = 1 - e^{-m}$, dovremo calcolare:

$\displaystyle\lim_{m\to+\infty}(1-e^{-m}) = 1 - 0 = 1$, e quindi la funzione $f(x) = e^{-x}$ ammette integrale generalizzato di I^ specie nell'intervallo $[0, +\infty[$ ed inoltre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Esempio 26 : Vediamo ora se esiste $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Procedendo come prima, dobbiamo vedere se esiste finito $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_1^m \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Avremo allora, essendo $x > 0$, $\displaystyle\int_1^m \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\log x\right|_1^m = \log m$, e quindi, essendo $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\log m = +\infty$, abbiamo che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non ammette integrale generalizzato di I^ specie nell'intervallo $[1, +\infty[$.

Per trattare il secondo caso di integrale, ovvero $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, varranno, con opportuni adattamenti, considerazioni del tutto analoghe al caso precedente.
Preso $m < a$, supponiamo che la funzione $f(x)$ sia integrabile nell'intervallo $[m, a]$, ovvero che esista $\displaystyle\int_m^a f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall\, m < a$.

Diremo per definizione che $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste (o converge) se esiste finito $\displaystyle\lim_{m\to-\infty}\int_m^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Infine, nel caso di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$, occorrerà scomporre anzitutto l'integrale:

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, per poi applicare separatamente ai due casi la definizione ed ottenere $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m_1\to-\infty}\int_{m_1}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{m_2\to+\infty}\int_a^{m_2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se ambedue questi limiti esistono finiti, si dirà che la funzione $f(x)$ ammette integrale generalizzato su tutta la retta reale; è importante inoltre rimarcare, mediante l'uso di due diverse variabili, m_1 e m_2, la necessità di calcolare i due integrali l'uno indipendentemente dall'altro.

3.4 CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI IN SENSO GENERALIZZATO DI I^ SPECIE

Come visto dagli esempi precedenti, se riusciamo a determinare una primitiva della funzione integranda l'esame dell'integrabilità in senso generalizzato consiste esclusivamente in un passaggio al limite.
Vediamo cosa accade invece se non si riesce a determinare una primitiva.
Evidentemente non si potranno più eseguire i passaggi operativi previsti dalla definizione, e dovremo ricorrere ad altre metodologie, le quali consentiranno di stabilire perlomeno se un dato integrale generalizzato esiste, ma molto raramente consentiranno di determinarne il valore.
Esamineremo l'integrabilità di due classi di funzioni, quella delle $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e quella delle $f(x) = e^{-\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.
Studieremo quindi l'esistenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ e di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$.
La conoscenza del comportamento, al variare del parametro α, di queste due classi di integrali sarà particolarmente utile nel seguito, quando tratteremo i criteri di esistenza degli integrali generalizzati di I^ specie.
Studiamo la convergenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.
Vediamo per quali valori di α esiste finito $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_1^{m} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.
Abbiamo già trattato il caso $\alpha = 1$, in quanto abbiamo già visto che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ non esiste.
Poniamo allora $\alpha \neq 1$, ed avremo: $\displaystyle\int_1^{m} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\Big|_1^m = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\big(m^{1-\alpha}-1\big)$.
Essendo $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} m^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\alpha<0 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>1 \\ +\infty & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$, avremo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ esiste e vale $\dfrac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$, mentre non esiste se $\alpha \leq 1$.
Studiamo ora la convergenza di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$.
Essendo $\displaystyle\int_0^{m} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \Big(-\frac{1}{\alpha}\cdot e^{-\alpha x}\Big|_0^m = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(1-e^{-\alpha m}\right)$ ed essendo $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} e^{-\alpha m} = 0$, $\forall\,\alpha > 0$, avremo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ esiste e vale $\dfrac{1}{\alpha}, \forall\,\alpha > 0$.

3.5 CRITERI DI CONVERGENZA PER INTEGRALI GENERALIZZATI DI I^ SPECIE

Come detto in precedenza, non sempre, ma diciamo pure nella maggior parte dei casi, l'esistenza di un integrale generalizzato non può essere valutata mediante la definizione, in quanto non è possibile determinare la primitiva della funzione integranda. Occorrono allora altri metodi, che chiameremo criteri, che possono enunciarsi genericamente in questo modo: dalla conoscenza dell'esistenza dell'integrale generalizzato di una funzione si può dedurre l'esistenza oppure la non esistenza di quello di un'altra funzione.
Diciamo anche che "integrale convergente" è sinonimo di "integrale che esiste".
Cominciamo con un definizione, quella di convergenza assoluta.

Definizione 10 : Si dice che l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge assolutamente se converge $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

La definizione, utile ovviamente per funzioni che cambiano di segno in $[a, +\infty[$, valuta l'esistenza dell'integrale della quantità di $f(x)$, indipendentemente dal segno via via assunto dalla funzione. Vale il seguente:

Teorema 20 : Se esiste $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ allora esiste anche $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$.

Dimostrazione: Usiamo la condizione necessaria e sufficiente di Cauchy per l'esistenza del limite finito, applicandola alla funzione $h(m) = \displaystyle\int_a^m f(x) \, \mathrm{d}x$; dobbiamo verificare che esiste finito: $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} h(m) = \lim_{m\to+\infty} \int_a^m f(x) \, \mathrm{d}x$ nell'ipotesi che esista finito:

$$\lim_{m\to+\infty} k(m) = \lim_{m\to+\infty} \int_a^m |f(x)| \, \mathrm{d}x .$$

Sappiamo che: $\forall\varepsilon > 0, \exists\, \overline{m} : \forall\, m_1, m_2, m_1 > \overline{m}, m_2 > \overline{m}$ risulta:

$$|k(m_1) - k(m_2)| = \left| \int_a^{m_1} |f(x)| \, \mathrm{d}x - \int_a^{m_2} |f(x)| \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

e dobbiamo far vedere che ne discende che:

$$|h(m_1) - h(m_2)| = \left| \int_a^{m_1} f(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^{m_2} f(x) \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon .$$

Ma: $\displaystyle\left| \int_a^{m_1} |f(x)| \, \mathrm{d}x - \int_a^{m_2} |f(x)| \, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_{m_2}^{m_1} |f(x)| \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$

e per le proprietà dell'integrale sarà anche

$$\left| \int_{m_2}^{m_1} f(x) \, \mathrm{d}x \right| \le \left| \int_{m_2}^{m_1} |f(x)| \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

ovvero $|h(m_1) - h(m_2)| < \varepsilon$, e cioè la tesi.

Applichiamo questa definizione per ottenere una nuova classe di funzioni per le quali è garantita l'esistenza dell'integrale generalizzato di I^ specie. Enunciamo quindi il seguente:

Teorema 21 : Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile $\forall\, x > a$. Sia inoltre $f(x)$ monotòna decrescente, e sia infine $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Allora esiste $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$.

Dimostrazione: Integriamo anzitutto per parti, ottenendo:

$\displaystyle\int f(x) \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\cos x \cdot f(x) + \int \cos x \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x$, dalla quale otteniamo:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to+\infty} \Big(-\cos x \cdot f(x) \Big|_a^m + \int_a^{+\infty} \cos x \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x .$$

Ora $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \Big(-\cos x \cdot f(x) \Big|_a^m = \lim_{m\to+\infty} (-\cos m \cdot f(m)) + \cos a \cdot f(a) = \cos a \cdot f(a)$ che è sicuramente un valore finito, mentre $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} (-\cos m \cdot f(m)) = 0$ in quanto $\cos m$ è una quantità limitata e $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} f(m) = 0$ per ipotesi.

Passiamo ora a $\displaystyle\int_a^{+\infty} \cos x \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x$.

Sarà: $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\cos x \cdot f'(x)| \, \mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} |\cos x| \cdot |f'(x)| \, \mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} |f'(x)| \, \mathrm{d}x$ in quanto $|\cos x| \le 1$, dopodichè avremo: $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f'(x)| \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to+\infty} \Big(-f(x) \Big|_a^m = f(a)$.

Questo perchè $|f'(x)| = -f'(x)$, $\forall\, x > a$, in quanto la funzione $f(x)$ è per ipotesi monotòna decrescente e quindi la sua derivata $f'(x)$ sarà sempre non positiva.

Per il risultato trovato abbiamo che $\int_a^{+\infty} \cos x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$ converge assolutamente, e quindi converge. Ma allora converge anche l'integrale di partenza, e cioè $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$.

Vediamo ora due criteri che si possono applicare ad integrali generalizzati di funzioni che siano positive nell'intervallo d'integrazione, e che in esso presentino al più un numero finito di discontinuità di I^ e III^ specie. Iniziamo con il

Criterio del confronto: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative $\forall\, x > a$, e sia inoltre $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x > a$. Si dice anche che $f(x)$ è una maggiorante di $g(x)$. Allora:

- se $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste, esiste anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$;
- se $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ non esiste, non esiste neanche $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se converge l'integrale della maggiorante allora converge anche l'integrale della minorante, mentre la divergenza (essendo le funzioni positive l'integrale non esiste solo se diverge positivamente) dell'integrale della minorante implica la divergenza dell'integrale della maggiorante.

Dimostrazione: Posto $F(m) = \int_a^{m} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $G(m) = \int_a^{m} g(x)\,\mathrm{d}x$, e viste le proprietà dell'integrale, basta applicare il Teorema del confronto ai due limiti: $\lim\limits_{m\to+\infty} F(m)$ e $\lim\limits_{m\to+\infty} G(m)$ per avere la tesi.

Esempio 27 : Determiniamo se esiste $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Il problema principale è dato dal fatto che della funzione integranda $f(x) = e^{-x^2}$, continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$, non si conosce la primitiva in forma esplicita. Essendo però (per $x < 0$ e per $x > 1$): $e^{x^2} < e^{x}$, ne segue: $e^{-x^2} < e^{x}$ per $x \to +\infty$, e dato che, come già visto, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ esiste, per il criterio del confronto esisterà anche $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Abbiamo poi un secondo criterio, che afferma:

Criterio del confronto asintotico: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative $\forall\, x > a$ e sia inoltre $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0$. Allora $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere, ovvero convergono entrambi o divergono entrambi.

Dimostrazione: Da $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, per la definizione di limite, otteniamo che:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \overline{x}(\varepsilon)$: $x > \overline{x}(\varepsilon) \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$,

ovvero, da un certo valore $\overline{x}(\varepsilon)$ in poi, ricordando la non negatività delle funzioni, si ha:

$(k-\varepsilon)\,g(x) < f(x) < (k+\varepsilon)\,g(x)$.

La funzione $(k+\varepsilon)\,g(x)$ è maggiorante della funzione $f(x)$ mentre la funzione $f(x)$ è maggiorante della $(k-\varepsilon)\,g(x)$, e, per l'arbitrarietà di ε, le costanti $k-\varepsilon$ e $k+\varepsilon$ sono entrambe positive.

Per la proprietà di linearità dell'integrale, inoltre, si ha che:

$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} (k-\varepsilon)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^{+\infty} (k+\varepsilon)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere.

Applicando il Criterio del confronto, segue la tesi.

Questo criterio si presta ad una interessante osservazione.
Basandosi tutto sul $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, notiamo come l'esistenza dell'integrale generalizzato dipenda esclusivamente dal comportamento delle funzioni per $x \to +\infty$, e non dall'andamento in un qualunque intervallo $[c,d[\, \subset [a,+\infty[$.
Un'estensione del criterio la abbiamo poi in due casi particolari, e precisamente quando $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e quando $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
Nel primo caso, sempre applicando la definizione di limite, otteniamo, da un certo valore $\overline{x}$ in poi: $f(x) < \varepsilon\, g(x)$, e quindi $f(x)$ fa solo da minorante mentre $g(x)$ solo da maggiorante.
Per cui la non esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ implica la non esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$, mentre l'esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ implica l'esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Quando $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ otteniamo invece, sempre per la definizione di limite, da un certo valore $\overline{x}$ in poi, $\forall\, \varepsilon$, che $f(x) > \varepsilon\, g(x)$.
Si inverte la relazione maggiorante-minorante: $f(x)$ è la maggiorante mentre $g(x)$ è la minorante ed avremo allora che la non esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ implica la non esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, mentre l'esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ implica l'esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Esempio 28 : Vediamo se esiste $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1)\,\mathrm{d}x$.

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$, confrontiamo cioè il modo di comportarsi, per $x \to +\infty$, della funzione $e^{\frac{1}{x}} - 1$ con quello della funzione $\dfrac{1}{x}$. Sul perchè della scelta di quest'ultima per operare il confronto si potrebbero addurre vari motivi, quali il fatto che essa faccia da separatore tra le $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ che hanno integrale convergente da quelle che lo hanno divergente, ma principalmente si può fare appello al limite notevole che ora useremo.
Posto $\dfrac{1}{x} = t$ otteniamo: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$, valore finito e diverso da 0.
Quindi $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1)\,\mathrm{d}x$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, ovvero non esiste.

Facciamo infine un'ultima osservazione sul rapporto che intercorre tra l'esistenza di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e il valore del $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Sembrerebbe naturale aspettarsi che fosse $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ affinchè possa esistere $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Il caso già trattato delle funzioni $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, ci fa vedere come la condizione $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ non sia certo sufficiente; qui aggiungiamo solo che non è neppure necessaria.

Esistono infatti funzioni che non sono infinitesime per $x \to +\infty$ e nonostante questo ammettono $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Però se esiste $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, allora è $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Infatti, se fosse $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \neq 0$, si avrebbe $f(x) > k - \varepsilon > 0$, almeno da un certo valore $\overline{x}$ in poi e dato che $\int_a^{+\infty} (k-\varepsilon)\,\mathrm{d}x$ non esiste, per il Criterio del confronto, anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ non esisterebbe.

3.6 INTEGRALI DI FUNZIONI ILLIMITATE

Consideriamo una funzione $f(x)$ che non sia limitata nell'intervallo $[a,b]$. Non ha senso quindi, mancando la condizione di partenza, percorrere la strada della definizione di funzione integrabile per valutare $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ci limitiamo a trattare il caso di una funzione non limitata in quanto esiste almeno un punto c nel quale $\lim_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, ovvero il caso di una funzione che presenti una discontinuità di II^ specie infinita nel punto $c : a < c < b$. Da questo possiamo dedurre una motivazione per la dizione di integrale generalizzato di II^ specie.

Supponiamo, per semplicità, che la funzione presenti un solo punto di discontinuità.

Usiamo le proprietà dell'integrale per scrivere: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Il problema si affronta quindi portando il punto di discontinuità all'estremo dell'intervallo d'integrazione, e questa è una prassi obbligata.

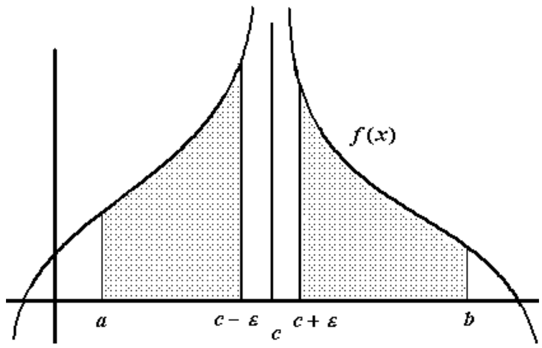
3.7 DEFINIZIONE DI INTEGRALE GENERALIZZATO DI II^ SPECIE

Definiamo ora $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, con c punto di discontinuità di II^ specie, e per analogia tratteremo $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

La funzione $f(x)$ è, per ipotesi, continua nell'intervallo $[a,c[$ e quindi sarà continua in ogni intervallo $[a, c-\varepsilon] \subset [a,c[$. Abbiamo allora la seguente:

Definizione 11 (di funzione integrabile in senso generalizzato di II^ specie): Si dice che la funzione $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[a,c[$ se esiste finito il $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$, e si porrà $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Per $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con c punto di discontinuità di II^ specie infinita, la definizione stabilisce invece di calcolare $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Se la funzione $f(x)$ è non negativa in $[a, c[$, il $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ sicuramente esiste, in quanto la funzione $h(\varepsilon) = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ è una funzione monotòna crescente, che quindi o ammette limite finito oppure diverge a $+\infty$.

Esempio 29 : Studiamo $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Avendo la funzione integranda una discontinuità di II^ specie infinita nel punto $x = 0$, per la definizione dovremo vedere se esiste finito $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Essendo $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\log x\right|_\varepsilon^1 = -\log\varepsilon$, e dato che $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (-\log\varepsilon) = +\infty$, concludiamo che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non ammette integrale generalizzato di II^ specie nell'intervallo $]0, 1]$.

Esempio 30 : Vediamo ora $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$.

La discontinuità di II^ specie infinita (solo da destra) è nel punto $x = 0$, e dovremo calcolare allora $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log x\,\mathrm{d}x$.

Essendo $\int_\varepsilon^1 \log x\,\mathrm{d}x = \left(x\log x - x\right|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\log\varepsilon + \varepsilon$, avremo allora:

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (-1 - \varepsilon\log\varepsilon + \varepsilon) = -1$, e quindi la funzione $f(x) = \log x$ ammette integrale generalizzato di II^ specie nell'intervallo $]0, 1]$, con $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = -1$.

Il segno del risultato dipende dal fatto che nell'intervallo $]0, 1]$ la funzione $f(x)$ è negativa.

3.8 CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI IN SENSO GENERALIZZATO DI II^ SPECIE

Come fatto con gli integrali generalizzati di I^ specie, anche ora studiamo una classe di funzioni, dipendenti da un parametro, per vedere sotto quali condizioni il loro integrale generalizzato di II^ specie risulti convergente.

Studiamo l'esistenza di $\int_c^b \frac{1}{(x-c)^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$. La funzione integranda ha una discontinuità di II^ specie infinita nel punto $x = c$, e l'intervallo di integrazione si trova a destra del punto di discontinuità.

In analogia con i casi precedenti, dovremo calcolare $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{1}{(x-c)^\alpha}\,\mathrm{d}x$, in modo tale che l'intervallo d'integrazione abbia il punto di discontinuità sulla sinistra.
Supponiamo $\alpha \neq 1$. Sarà allora:
$\int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{1}{(x-c)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{1-\alpha} \cdot (x-c)^{1-\alpha}\Big|_{c+\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \big((b-c)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\big)$.
L'esistenza dell'integrale dipende dal comportamento del $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha}$, in quanto le parti rimanenti sono delle costanti. Vediamo vari casi:
se $1-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1$, si ha che $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$, quindi l'integrale dato esiste e vale:
$\int_{c}^{b} \frac{1}{(x-c)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} \cdot (b-c)^{1-\alpha}$;
se $1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$, si ha che $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = +\infty$, ed in questo caso l'integrale non esiste.
Infine, per $\alpha = 1$ si ha: $\int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x = \big(\log|x-c|\big|_{c+\varepsilon}^{b}$, ed essendo:
$\lim_{\varepsilon \to 0^+} [\log|b-c| - \log|\varepsilon|] = +\infty$, anche in questo caso l'integrale non esiste.
Quindi $\int_{c}^{b} \frac{1}{(x-c)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ esiste per $\alpha < 1$ (per $\alpha \leq 0$ la funzione è sempre continua).
Vedremo in seguito il motivo per il quale i valori di α per cui gli integrali $\int_{c}^{b} \frac{1}{(x-c)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ esistono sono i reciproci dei valori per cui esiste $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Se consideriamo il caso particolare $c = 0$ otteniamo infatti $\int_{0}^{b} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, che come visto converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha > 1$, mentre $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha < 1$.

3.9 CRITERI DI CONVERGENZA PER INTEGRALI GENERALIZZATI DI II^ SPECIE

Anche per gli integrali generalizzati di II^ specie valgono criteri di convergenza analoghi a quelli dati per gli integrali generalizzati di I^ specie.
Ci limitiamo ad enunciarli, essendo le dimostrazioni, con opportune variazioni, simili.
Anzitutto diamo la definizione di convergenza assoluta.
Definizione 12 : Data $f(x)$ continua in $]a,b]$, avente nel punto $x = a$ una discontinuità di II^ specie infinita, si dice che $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge assolutamente se converge $\int_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
Vale ancora il seguente:
Teorema 22 : Se esiste $\int_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ allora esiste anche $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Vediamo ora l'enunciato dei due criteri, quello del confronto e quello del confronto asintotico, che si possono applicare a funzioni che siano non negative nell'intervallo d'integrazione.
Criterio del confronto: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $]a,b]$, aventi in $x = a$ una discontinuità di II^ specie infinita, e tali che $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall\, x \in\,]a,b]$. Allora:

- se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste, esiste anche $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;
- se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ non esiste, non esiste neppure $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se converge l'integrale della maggiorante allora converge anche l'integrale della minorante, mentre la divergenza dell'integrale della minorante implica la divergenza dell'integrale della maggiorante (essendo le funzioni non negative l'integrale potrebbe non esistere solo nel caso che diverga positivamente).

Esempio 31 : Determiniamo il carattere di $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\text{sen}\,x}\,\mathrm{d}x$.

Se $0 < x \le 1$, allora è $0 < \text{sen}\,x \le 1$, da cui si ricava anche $0 < \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{\text{sen}\,x}$, e dato che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ non esiste, per il criterio del confronto, non esisterà neppure $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\text{sen}\,x}\,\mathrm{d}x$.

Criterio del confronto asintotico: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative e continue in $]a,b]$, aventi in $x = a$ una discontinuità di II^ specie infinita; sia poi $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$.

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere, ovvero convergono entrambi o divergono entrambi.

Abbiamo due casi particolari: quando $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e quando $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, per la definizione di limite otteniamo, in un opportuno intervallo $a < x < a + \delta$, che $f(x) < \varepsilon\, g(x)$, e quindi $f(x)$ fa da minorante mentre $g(x)$ fa da maggiorante.

La non esistenza di $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ implica quella di $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, mentre l'esistenza di $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ implica quella di $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ otteniamo invece, per la definizione di limite, $f(x) > \varepsilon\, g(x)$, in un opportuno intervallo $a < x < a + \delta$, qualunque sia il valore $\varepsilon > 0$ scelto.

Si inverte la relazione maggiorante-minorante precedentemente ottenuta, ed ora avremo che l'esistenza di $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ implica quella di $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, mentre la non esistenza di $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ implica quella di $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esempio 32 : Studiamo $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1}\,\mathrm{d}x$.

La funzione integranda è discontinua di II^ specie infinita nel punto $x = 0$. Vista l'espressione a denominatore e quella dell'esponente del numero e, operiamo un opportuno confronto asintotico ed avremo $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{e^t - 1} = 1$.

Essendo $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ convergente $\left(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1\right)$, avremo che anche $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1}\,\mathrm{d}x$ è convergente.

Esempio 33 : Come esempio conclusivo sugli integrali generalizzati di II^ specie, studiamo gli integrali:
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x$, con $\alpha \in \mathbb{Q}_+, \alpha = \dfrac{m}{2n+1}, m, n \in \mathbb{N}$, con m e $2n+1$ numeri primi tra loro.

Se $\alpha = 0$ otteniamo $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, integrale che è già stato studiato, e si è visto che non esiste.

Essendo $\lim\limits_{x \to 0^+} x\log^\alpha x = 0$, $\forall\,\alpha$, la funzione integranda ha una discontinuità di II^ specie nel punto $x = 0$, e quindi dovremo calcolare $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x$.

Essendo $\lim\limits_{x \to 1^-} x\log^\alpha x = 0$, $\forall\,\alpha > 0$, la funzione integranda ha anche una discontinuità di II^ specie nel punto $x = 1$, e per questa dovremo calcolare $\displaystyle\lim_{\delta \to 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x$.

Dovremo quindi anzitutto scomporre l'integrale nella somma di due integrali, ciascuno dei quali contenga una sola discontinuità. Potremo, tra le infinite scelte possibili, scrivere:
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x + \int_h^1 \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x$, sceglieremo poi per comodità di calcolo $h = \dfrac{1}{e}$, e dovremo poi calcolare, usando le definizioni:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^h \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta \to 0^+} \int_h^{1-\delta} \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x .$$

Iniziamo con il caso particolare $\alpha = 1$. Essendo:

$$\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}(\log x) = \log|\log x| + k$$

dovremo calcolare:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\log|\log x|\right|_\varepsilon^h + \lim_{\delta \to 0^+} \left(\log|\log x|\right|_h^{1-\delta} = \quad (\text{preso } h = \frac{1}{e})$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\log\left|\log\frac{1}{e}\right| - \log|\log\varepsilon|\right) + \lim_{\delta \to 0^+} \left(\log|\log(1-\delta)| - \log\left|\log\frac{1}{e}\right|\right).$$

Dato che $\log\left|\log\dfrac{1}{e}\right| = 0$, ed essendo $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} (-\log|\log\varepsilon|) = -\infty$, e $\lim\limits_{\delta \to 0^+} (\log|\log(1-\delta)|) = -\infty$, i due integrali non esistono e quindi non esiste $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$.

Essendo invece, nel caso più generale $\alpha \neq 1$:

$$\int \frac{1}{x\log^\alpha x}\,\mathrm{d}x = \int \log^{-\alpha} x\,\mathrm{d}(\log x) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \log^{1-\alpha} x + k$$

dovremo calcolare:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} \cdot \log^{1-\alpha} x\right|_\varepsilon^h + \lim_{\delta \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} \cdot \log^{1-\alpha} x\right|_h^{1-\delta} .$$

Ma, essendo $h = \dfrac{1}{e}$, avremo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} \cdot \log^{1-\alpha} x \right|_{\varepsilon}^{h} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\log^{1-\alpha} \left(\frac{1}{e} \right) - \log^{1-\alpha} \varepsilon \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left((- 1)^{1-\alpha} - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \log^{1-\alpha} \varepsilon \right) = \begin{cases} \dfrac{(- 1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \\ \infty & \text{se } 1-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1 \end{cases}.$$

Quindi il primo integrale esiste se $\alpha > 1$ e non esiste se $\alpha < 1$. Per il secondo avremo:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} \cdot \log^{1-\alpha} x \right|_{h}^{1-\delta} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{\delta \to 0^+} \left(\log^{1-\alpha} (1-\delta) - \log^{1-\alpha} \left(\frac{1}{e} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\lim_{\delta \to 0^+} \log^{1-\alpha} (1-\delta) - (- 1)^{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \infty & \text{se } 1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \\ \dfrac{- (- 1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1 \end{cases}$$

.

Ovvero questo secondo integrale non esiste se $\alpha > 1$ ed esiste se $\alpha < 1$.

Esattamente il contrario del primo integrale. Quindi l'integrale dato $\int_0^1 \frac{1}{x \log^{\alpha} x} \, \mathrm{d}x$ non esiste per nessun valore di α, potendo casomai esistere, ma solo separatamente, integrali del tipo: $\int_0^c \frac{1}{x \log^{\alpha} x} \, \mathrm{d}x$, c $< 1, \alpha > 1$, oppure del tipo $\int_c^1 \frac{1}{x \log^{\alpha} x} \, \mathrm{d}x$, c $> 0, \alpha < 1$.

3.10 INTEGRALI GENERALIZZATI DI I^ E DI II^ SPECIE DI FUNZIONI POTENZA

Vediamo infine una relazione che sussiste tra particolari integrali generalizzati di I^ e di II^ specie, per una classe particolare di funzioni, ovvero le $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} = x^{-\alpha}$. Queste funzioni sono continue e strettamente decrescenti $\forall x > 0$, $\forall \alpha > 0$. Ammettono quindi funzione inversa, data da $f^{-1}(x) = x^{-\frac{1}{\alpha}}$. Sappiamo che due funzioni, una inversa dell'altra, hanno i loro grafici simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

Consideriamo $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \, \mathrm{d}x$. Per la simmetria sopradetta, la parte di piano relativa a questo integrale è la simmetrica di quella relativa a $\int_0^1 x^{-\frac{1}{\alpha}} \, \mathrm{d}x$. Ecco il motivo per il quale gli integrali di I^ specie convergono se $\alpha > 1$ mentre quelli di II^ specie lo fanno per $0 < \alpha < 1$; tutto dipende dal fatto che l'esponente nel denominatore, per la funzione inversa, risulta il reciproco dell'altro.