UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di MATEMATICA GENERALE

Volume 1

AA. 2024/25

ELEMENTI DI LOGICA

PROPOSIZIONI E CONNETTIVI LOGICI

Gli enunciati del linguaggio comune ed ancor più quelli matematici sono costituiti da proposizioni, ovvero da frasi di senso compiuto a cui è possibile attribuire in modo non ambiguo uno dei due possibili valori di verità: **vero (1)** o **falso (0)**.
Indicheremo con lettere maiuscole $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ delle generiche proposizioni.
La proposizione $\mathbb{A}:\{4 \text{ è un numero pari}\}$ è una proposizione vera, mentre invece la proposizione $\mathbb{B}:\{7 \text{ è un numero pari}\}$ è una proposizione falsa.
La verità della proposizione $\mathbb{C}:\{x \text{ è un numero pari}\}$ non può essere stabilita fin quando non si assegni ad x un ben preciso valore. Diremo anche che $\mathbb{C}$ è una **forma proposizionale**.
Enunciati più complessi hanno la forma logica di proposizioni composte, ottenute combinando secondo precise regole proposizioni contenenti singole affermazioni. Per ottenere proposizioni composte si usano i **connettivi logici**:

il simbolo di **negazione**:	**non** ($\neg$)	: **non** $\mathbb{A}$
il simbolo di **congiunzione**	**e** ($\wedge$)	: $\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B}$
il simbolo di **disgiunzione**	**o** ($\vee$)	: $\mathbb{A}$ **o** $\mathbb{B}$
il simbolo di **implicazione**	$\Rightarrow$	: $\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$
il simbolo di **doppia implicazione**	$\Leftrightarrow$	: $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$.

Ogni connettivo può essere visto come una operazione logica, che associa ad una o più proposizioni una nuova proposizione. Si usano poi le parentesi, come per le espressioni algebriche, per determinare l'ordine di priorità nella lettura delle proposizioni composte.
Ad esempio, la proposizione: $[\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B} \textbf{ e } \mathbb{C}]$ non sarebbe chiaramente interpretabile, potendo essere vista sia come $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \textbf{ e } \mathbb{C}]$ che come $[\mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \textbf{ e } \mathbb{C})]$. In mancanza di parentesi la interpretiamo nel secondo modo, avendo assegnato ai connettivi, come ordine di priorità, quello stesso nel quale li abbiamo elencati.

TAVOLE DI VERITA'

Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ delle generiche proposizioni, che possono essere sia vere che false; vediamo come attribuire valore di verità o di falsità alle proposizioni costruite mediante i vari connettivi.
La proposizione $(\textbf{non } \mathbb{A})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ è vera, ed è vera quando $\mathbb{A}$ è falsa.
La proposizione $(\mathbb{A} \textbf{ e } \mathbb{B})$ è vera quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono entrambe vere, ed è falsa in ogni altro caso, cioè quando è falsa $\mathbb{A}$, o quando è falsa $\mathbb{B}$, o quando sono false entrambe.
La proposizione $(\mathbb{A} \textbf{ o } \mathbb{B})$ è vera quando almeno una fra $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ è vera, cioè quando è vera $\mathbb{A}$, o quando è vera $\mathbb{B}$, o quando sono vere entrambe; è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono entrambe false.
La proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ è vera quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono entrambe vere oppure quando $\mathbb{A}$ è falsa, qualunque sia il valore di verità di $\mathbb{B}$; è falsa quando $\mathbb{A}$ è vera e $\mathbb{B}$ è falsa.
La proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$ è vera quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ hanno lo stesso valore di verità, cioè quando sono entrambe vere oppure quando sono entrambe false; è falsa quando $\mathbb{A}$ è vera e $\mathbb{B}$ è falsa, o quando $\mathbb{A}$ è falsa e $\mathbb{B}$ è vera.
Possiamo riassumere quanto detto mediante le seguenti cosiddette **tavole di verità**, ottenute combinando, per riga, i $2^2 = 4$ casi possibili di verità e/o falsità di $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	non $\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$	$\mathbb{A}$ o $\mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Quando la proposizione $\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ è vera, si dice che $\mathbb{A}$ è **condizione sufficiente** per $\mathbb{B}$, e si dice anche che $\mathbb{B}$ è **condizione necessaria** per $\mathbb{A}$.
Quando la proposizione $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ è vera, si dice che $\mathbb{A}$ è **condizione necessaria e sufficiente** per $\mathbb{B}$, e si dice pure che $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono **proposizioni logicamente equivalenti**.
Sono logicamente equivalenti, ad esempio, le seguenti proposizioni:
$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ con ($\textbf{non}\ \mathbb{A}\ \textbf{o}\ \mathbb{B}$) ;
$\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ con $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\ \textbf{e}\ (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})]$.
Infatti, verificando con le tavole di verità, si ha:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	non $\mathbb{A}$	non $\mathbb{A}$ o $\mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$	$(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$	$\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

TAUTOLOGIE
Definizione 1 : Si dicono **tautologie** quelle proposizioni che risultano sempre vere.
Sono semplici esempi di tautologie i seguenti:
($\mathbb{A}$ **o non** $\mathbb{A}$); [**non** ($\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{A}$)]; $\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{A}$; $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{A}$; $\mathbb{A} \Leftrightarrow$ **non** (**non** $\mathbb{A}$) .
Rivestono invece particolare importanza le seguenti altre tautologie:
[**non** ($\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B}$)] $\Leftrightarrow$ (**non** $\mathbb{A}$ **o non** $\mathbb{B}$) I^ legge di De Morgan;
[**non** ($\mathbb{A}$ **o** $\mathbb{B}$)] $\Leftrightarrow$ (**non** $\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B}$) II^ legge di De Morgan;
$(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Leftrightarrow$ (**non** $\mathbb{A}$ **o** $\mathbb{B}$)
$(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}))$
[$\mathbb{A}$ **e** ($\mathbb{B}$ **o non** $\mathbb{B}$)] $\Leftrightarrow \mathbb{A}$
[$\mathbb{A}$ **o** ($\mathbb{B}$ **e non** $\mathbb{B}$)] $\Leftrightarrow \mathbb{A}$
[**non** $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$] $\Leftrightarrow$ ($\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B}$)
$(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Leftrightarrow$ (**non** $\mathbb{B} \Rightarrow$ **non** $\mathbb{A}$) detta Principio di Contrapposizione;
($\mathbb{A}$ **e** $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})) \Rightarrow \mathbb{B}$ detta Modus Ponens;
(**non** $\mathbb{B}$ **e** $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})) \Rightarrow$ **non** $\mathbb{A}$ detta Modus Tollens.

Esempio 1 : Determiniamo i casi di verità della proposizione: $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** ($\mathbb{B} \Rightarrow$ **non** $\mathbb{A}$)] .
Possiamo dare una rapida risposta passando direttamente alla compilazione delle tavole di verità, che risultano essere le seguenti:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	non $\mathbb{A}$	$\mathbb{B} \Rightarrow$ non $\mathbb{A}$	$(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** ($\mathbb{B} \Rightarrow$ non $\mathbb{A}$)
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Si vede quindi che la proposizione data è vera quando la proposizione $\mathbb{A}$ è falsa, indipendentemente dal valore di verità della proposizione $\mathbb{B}$.
Si potevano anche usare alcune delle tautologie precedentemente elencate, con le quali otteniamo le seguenti equivalenze logiche, che consentono di redigere tavole di verità di proposizioni logicamente equivalenti a quella data:
$[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** ($\mathbb{B} \Rightarrow$ **non** $\mathbb{A}$)] $\Leftrightarrow$ [(**non** $\mathbb{A}$ **o** $\mathbb{B}$) **e** (**non** $\mathbb{B}$ **o non** $\mathbb{A}$)]
[(**non** $\mathbb{A}$ **o** $\mathbb{B}$) **e** (**non** $\mathbb{B}$ **o non** $\mathbb{A}$)] $\Leftrightarrow$ [**non** ($\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B}$) **e non** ($\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B}$)]
[**non** ($\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B}$) **e non** ($\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B}$)] $\Leftrightarrow$ **non** [($\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B}$) **o** ($\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B}$)] .
Ma, come si può facilmente dedurre (o controllare con le tavole di verità), si ha che:

$[(\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B})$ **o** $(\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B})] \Leftrightarrow [\mathbb{A}$ **e** $(\mathbb{B}$ **o non** $\mathbb{B})]$ oppure
$[(\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B})$ **o** $(\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B})] \Leftrightarrow [\mathbb{A}$ **o** $(\mathbb{B}$ **e non** $\mathbb{B})]$ per cui anche
$[(\mathbb{A}$ **e non** $\mathbb{B})$ **o** $(\mathbb{A}$ **e** $\mathbb{B})] \Leftrightarrow \mathbb{A}$
per cui risulta infine:
$[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** $(\mathbb{B} \Rightarrow$ **non** $\mathbb{A})] \Leftrightarrow$ **non** $\mathbb{A}$
e quindi la tavola di verità della proposizione è la stessa di quella della proposizione **non** $\mathbb{A}$.

Esempio 2 : Verifichiamo che le due proposizioni $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** $\mathbb{C}]$ e $[\mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B}$ **e** $\mathbb{C})]$ non sono logicamente equivalenti. Formando le tavole di verità abbiamo infatti:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{B}$ **e** $\mathbb{C}$	$\mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B}$ **e** $\mathbb{C})$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ **e** $\mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0

Confrontando la 5^ e la 7^ colonna, vediamo valori di verità diversi nella 6^ e nella 8^ riga, e quindi le due proposizioni non sono logicamente equivalenti.

I QUANTIFICATORI
I due simboli : $\forall$ e $\exists$, vengono detti, rispettivamente, **quantificatore universale** e **quantificatore esistenziale**. Il loro significato è il seguente:
$\forall\, x : \mathcal{P}(x)$ significa "per ogni x vale $\mathcal{P}(x)$" o "qualunque sia x vale $\mathcal{P}(x)$", mentre
$\exists\, x : \mathcal{P}(x)$ significa "esiste almeno un x per cui vale $\mathcal{P}(x)$".
La proposizione $\mathbb{A} : \{\forall\, x : x^2 > 0\}$ si legge: qualsiasi sia il numero x, il suo quadrato è strettamente maggiore di 0. Questa è una proposizione falsa in quanto $0^2 = 0$.
La proposizione $\mathbb{A} : \{\exists\, x : x^2 > 0\}$ si legge: esiste almeno un x il cui quadrato sia strettamente maggiore di 0. Questa è chiaramente una proposizione vera.
La proposizione $\mathbb{A} : \{\forall\, n \in \mathbb{N} : 2n$ **è un numero pari**$\}$ è vera, in quanto il numero $2n$ è pari qualunque sia il numero naturale n, mentre la proposizione $\mathbb{B} : \{\exists\, n \in \mathbb{N} : n^2 < 0\}$ è falsa, in quanto ogni numero naturale ha un quadrato non negativo.
Talvolta si usa anche il simbolo $\exists\,!$, che va letto invece come "esiste uno ed un solo...".
La proposizione $\mathbb{A} : \{\exists\,!\, x : x^2 = 0\}$ si legge: esiste uno ed un solo x il cui quadrato sia uguale a 0. Tale proposizione è vera in quanto solo $0^2 = 0$.
Se una proposizione contiene un quantificatore, la sua negazione si effettua mediante l'altro quantificatore:
se $\mathbb{A} : \{\forall\, x : \mathcal{P}(x)\}$, allora: **non** $\{\forall\, x : \mathcal{P}(x)\} \Leftrightarrow \{\exists\, x :$ **non** $\mathcal{P}(x)\}$, mentre
se $\mathbb{A} : \{\exists\, x : \mathcal{P}(x)\}$, allora: **non** $\{\exists\, x : \mathcal{P}(x)\} \Leftrightarrow \{\forall\, x :$ **non** $\mathcal{P}(x)\}$.

Esempio 3 : **non** $\{\forall\, x : x^2 > 0\} \Leftrightarrow \{\exists\, x :$ **non** $(x^2 > 0)\} \Leftrightarrow \{\exists\, x : x^2 \leq 0\}$.
Questa è una proposizione vera in quanto $0^2 = 0$.
non $\{\exists\, x : x^2 > 0\} \Leftrightarrow \{\forall\, x :$ **non** $(x^2 > 0)\} \Leftrightarrow \{\forall\, x : x^2 \leq 0\}$.
Questa è una proposizione falsa in quanto solamente $0^2 = 0$.

INSIEMISTICA

INSIEMI

Il concetto di **insieme** viene assunto come primitivo, ovvero come già noto in base alla comune esperienza. Un insieme è costituito dai suoi **elementi**. Un insieme è dato quando sono noti i suoi elementi, ovvero gli elementi che gli appartengono.
Denotiamo un generico insieme con una lettera maiuscola, ad esempio $\mathbb{A}$, ed il generico elemento con a. Scriveremo $a \in \mathbb{A}$ (oppure $\mathbb{A} \ni a$) per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme $\mathbb{A}$, scriveremo $a \notin \mathbb{A}$ per indicare che l'elemento a non appartiene all'insieme $\mathbb{A}$.
Un insieme può essere dato mediante descrizione per esteso dei suoi elementi, ad esempio:
$\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}$ o anche $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$
oppure mediante una proprietà $\mathcal{P}(x)$ a cui soddisfano i suoi elementi, scrivendo:
$\mathbb{A} = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, ad esempio: $\mathbb{A} = \{x : x \text{ è un numero pari}\}$ o $\mathbb{B} = \{x : x \text{ è italiano}\}$.
Notiamo, ad esempio, che scrivendo $\{a, b, c, d\}$ oppure $\{b, d, c, a\}$ abbiamo lo stesso insieme; per descrivere un insieme non conta quindi l'ordine di elencazione degli elementi.
Non ha senso infine una scrittura del tipo $\mathbb{A} = \{a, a, b, c\}$, ovvero uno stesso elemento a non può appartenere più di una volta all'insieme.

SOTTOINSIEMI E RELAZIONE DI INCLUSIONE

Dati due insiemi qualunque $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, diamo la seguente:
Definizione 2 : si dice che $\mathbb{A}$ è contenuto in $\mathbb{B}$, oppure che $\mathbb{A}$ è **sottoinsieme** di $\mathbb{B}$, e si scrive $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, quando ogni elemento di $\mathbb{A}$ appartiene anche a $\mathbb{B}$:
$(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A} \Rightarrow x \in \mathbb{B})$.
Definiamo formalmente l'**uguaglianza** tra due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ nel seguente modo:
$(\mathbb{A} = \mathbb{B}) \Leftrightarrow ((\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \textbf{ e } (\mathbb{B} \subset \mathbb{A}))$.
La scrittura $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ significa che $\mathbb{A}$ è contenuto in $\mathbb{B}$, potendo anche i due insiemi coincidere.
Dicesi **insieme vuoto**, denotato con $\emptyset$, l'insieme privo di elementi.
Per la definizione di sottoinsieme, avremo che $\emptyset \subset \mathbb{A}, \forall \mathbb{A}$.
B. Russell ha dimostrato che non può esistere un insieme che contenga ogni altro insieme, ovvero un insieme universo a cui tutto appartiene.
Quando occorre, possiamo però fissare un **insieme universo** (relativo), opportunamente scelto, per limitare opportunamente l'ambito del problema. Indicheremo con $\mathbb{U}$ tale insieme universo. Naturalmente segue che $\mathbb{A} \subset \mathbb{U}, \forall \mathbb{A}$.

INSIEME DELLE PARTI

Dato un insieme $\mathbb{A}$ si definisce l'**insieme delle parti** di $\mathbb{A}$, e si indica con $\mathbb{P}(\mathbb{A})$, l'insieme:
$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{B} : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}\}$, ovvero l'insieme avente per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di $\mathbb{A}$.
Dato che $\emptyset \subset \mathbb{A}$ e che $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$, ne segue che $\emptyset \in \mathbb{P}(\mathbb{A})$ e $\mathbb{A} \in \mathbb{P}(\mathbb{A}), \forall \mathbb{A}$.

Esempio 4 : Sia $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$; si vede allora che:
$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI

Dato un insieme $\mathbb{A}$ e dato un insieme (universo) $\mathbb{U}$, abbiamo la:
Definizione 3 : Dicesi **complementare** di $\mathbb{A}$ (rispetto ad $\mathbb{U}$), e si indica con $\mathcal{C}(\mathbb{A})$ (o con $\mathbb{A}'$), l'insieme: $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{x : x \notin \mathbb{A}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi di $\mathbb{U}$ che non appartengono ad $\mathbb{A}$.

Esempio 5 : Siano $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; allora $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{4, 5\}$.
Se fosse stato $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ avremmo $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{4, 5, 6, 7\}$.

Vediamo ora operazioni insiemistiche che operano su almeno due insiemi. Diamo la
Definizione 4 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **intersezione**, indicata con $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \textbf{ e } x \in \mathbb{B}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad $\mathbb{A}$ che a $\mathbb{B}$.

Esempio 6 : Siano $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ e $\mathbb{B} = \{1,2,4,5\}$; allora $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1,2\}$.
Se invece $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ e $\mathbb{B} = \{4,5\}$ avremo allora $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$.

Con $\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ indichiamo l'intersezione di un numero generico n di insiemi : $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, ..., \mathbb{A}_n$.
Un elemento $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ se x appartiene a ciascuno degli $\mathbb{A}_i$.

Definizione 5 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **unione**, indicata con $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \textbf{ o } x \in \mathbb{B}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad $\mathbb{A}$ oppure che appartengono a $\mathbb{B}$, oppure ad ambedue.

Esempio 7 : Siano $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ e $\mathbb{B} = \{1,2,4,5\}$; allora $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1,2,3,4,5\}$. Come si vede, gli elementi 1 e 2, che appartengono sia ad $\mathbb{A}$ che a $\mathbb{B}$, compaiono una sola volta in $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

Con $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ indichiamo l'unione di un numero generico n di insiemi : $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, ..., \mathbb{A}_n$.
Un elemento $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ se x appartiene ad almeno uno degli $\mathbb{A}_i$.

Definizione 6 : Dato un insieme $\mathbb{A}$ si dice che n suoi sottoinsiemi $\mathbb{A}_i$ costituiscono una **partizione** di $\mathbb{A}$ se:

I) $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i = \mathbb{A}$

II) $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j = \emptyset$, per $i \neq j$.

Definizione 7 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **differenza**, e si indica con $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \textbf{ e } x \notin \mathbb{B}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi di $\mathbb{A}$ che non appartengono a $\mathbb{B}$.

Esempio 8 : Siano $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ e $\mathbb{B} = \{1,2,4,5\}$; allora si ha che $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{3\}$ mentre invece $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \{4,5\}$.

Notiamo come gli insiemi $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ costituiscono una partizione di $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Essi infatti non hanno elementi in comune ed inoltre: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$.

Definizione 8 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **differenza simmetrica**, e si indica con $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = \{x : (x \in \mathbb{A} \textbf{ e } x \notin \mathbb{B}) \textbf{ o } (x \notin \mathbb{A} \textbf{ e } x \in \mathbb{B})\}$,
ovvero l'insieme costituito dagli elementi di $\mathbb{A}$ che non appartengono a $\mathbb{B}$ e dagli elementi di $\mathbb{B}$ che non appartengono ad $\mathbb{A}$.
Si verifica facilmente che: $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$.

TAVOLE DI APPARTENENZA

Analogamente a quanto fatto per le tavole di verità delle proposizioni costruite utilizzando un solo connettivo, possiamo sintetizzare le varie operazioni insiemistiche con le tavole che seguono, avendo denotato con **1** l'appartenenza all'insieme e con **0** la non appartenenza:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})$	$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\triangle\mathbb{B}$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0

Si notino le analogie tra le tavole di verità dei connettivi logici **non**, **e**, **o**, e quelle delle operazioni insiemistiche (complementare, intersezione ed unione) definite mediante essi.

Esempio 9 : Verifichiamo, mediante le tavole di appartenenza, la validità della relazione insiemistica $[\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})]\subset[(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})]$.
Avremo la tavola (costituita da $2^3 = 8$ righe):

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{B}\cup\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})$	$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Confrontando la 5^ e la 8^ colonna, relative ad $\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})$ e ad $(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})$, vediamo che la relazione proposta è vera in quanto ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo; infatti il valore 1 in 4^ posizione nella colonna di $\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})$ trova analogo valore, sulla stessa riga, nella colonna di $(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})$. Essendoci, nella colonna relativa a quest'ultimo, altri due valori 1 (2^ e 3^ posizione), possiamo dedurre che la relazione di sottoinsieme vale in modo stretto.

PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI INSIEMISTICHE
Valgono le seguenti proprietà, dove con $\mathbb{U}$ è indicato l'insieme universo scelto:

$\mathbb{A}\cup\mathbb{A}=\mathbb{A}$; $\mathbb{A}\cap\mathbb{A}=\mathbb{A}$
$\mathbb{A}\cup\emptyset=\mathbb{A}$; $\mathbb{A}\cap\emptyset=\emptyset$
$\mathbb{A}\cup\mathbb{U}=\mathbb{U}$; $\mathbb{A}\cap\mathbb{U}=\mathbb{A}$
$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}=\mathbb{B}\cup\mathbb{A}$; $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\mathbb{B}\cap\mathbb{A}$ proprietà commutativa
$\mathbb{A}\cup(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})=\mathbb{A}$; $\mathbb{A}\cap(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})=\mathbb{A}$ proprietà di assorbimento
$\mathbb{A}\cup(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})\cup\mathbb{C}$ proprietà associativa
$\mathbb{A}\cap(\mathbb{B}\cap\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})\cap\mathbb{C}$ proprietà associativa
$\mathbb{A}\cup(\mathbb{B}\cap\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})\cap(\mathbb{A}\cup\mathbb{C})$ proprietà distributiva
$\mathbb{A}\cap(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\cap\mathbb{C})$ proprietà distributiva
$\mathcal{C}(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})=\mathcal{C}(\mathbb{A})\cap\mathcal{C}(\mathbb{B})$ I^ legge di De Morgan.
$\mathcal{C}(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})=\mathcal{C}(\mathbb{A})\cup\mathcal{C}(\mathbb{B})$ II^ legge di De Morgan.

Esempio 10 : Verifichiamo la validità della I^ legge di De Morgan:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})$	$\mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathcal{C}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1

L'uguaglianza della 5^ e 7^ colonna verifica la proprietà.
Verifichiamo anche la validità della II^ legge di De Morgan:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})$	$\mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathcal{C}(\mathbb{A}) \cup \mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

L'uguaglianza della 5^ e 7^ colonna verifica la proprietà.

PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

Definizione 9 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **prodotto cartesiano**, e si indica con $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a, b) : a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$.

Il prodotto cartesiano $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ è l'insieme costituito da tutte le possibili coppie aventi per primo elemento un qualunque elemento di $\mathbb{A}$ e per secondo elemento un qualunque elemento di $\mathbb{B}$.

La coppia (a, b) costituisce un elemento la cui natura è diversa sia da quella di a che da quella di b, ed è bene notare come non vi sia, nella coppia (a, b), alcuna operazione da eseguirsi tra a e b.

Vista la definizione, in genere si ha che $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$, e che $\mathbb{A} \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 11 : Siano $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{a, b\}$. Avremo allora:
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$. Mentre invece:
$\mathbb{B} \times \mathbb{A} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$.

Esempio 12 : Siano $\mathbb{A} = \{1, -1\}$ e $\mathbb{B} = \{1, -1\}$. Avremo allora:
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\} = \mathbb{B} \times \mathbb{A}$.

Analogamente, dati n insiemi $\mathbb{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, si definisce il loro prodotto cartesiano come:
$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times ... \times \mathbb{A}_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{A}_i, 1 \leq i \leq n\}$
cioè l'insieme costituito da tutte le possibili n-**uple** aventi per elemento di posto i-esimo un qualunque elemento dell'insieme i-esimo $\mathbb{A}_i$.
Ove fosse $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}, \forall i : 1 \leq i \leq n$, scriveremo anche $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \times ... \times \mathbb{A} = \mathbb{A}^n$.

RELAZIONI

RELAZIONI

Definizione 10 : Dati due insiemi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si dice **relazione** $\mathcal{R}$ da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$, $\mathcal{R} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, un qualunque sottoinsieme del loro prodotto cartesiano: $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Una vecchia definizione di relazione consisteva nel chiedere che qualche elemento di $\mathbb{X}$ fosse legato (o in relazione) con qualche elemento di $\mathbb{Y}$; la definizione data invece comprende anche la **relazione vuota**, $\mathcal{R} = \emptyset$, e la **relazione totale** $\mathcal{R} = \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Una relazione è quindi descritta da un insieme di coppie ordinate (x, y), con $x \in \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$; scriveremo allora $(x, y) \in \mathcal{R}$, o anche $x\mathcal{R}y$, per dire che x è in relazione con y.

Data una relazione $\mathcal{R} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, si dice **dominio** di $\mathcal{R}$, indicato con $D_{\mathcal{R}}$, l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{X}$ che sono in relazione con qualche $y \in \mathbb{Y}$: $D_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{X} : \exists\, y \in \mathbb{Y}, x\mathcal{R}y\}$, mentre si dice **codominio** di $\mathcal{R}$, e si indica con $\mathcal{C}D_{\mathcal{R}}$, l'insieme degli $y \in \mathbb{Y}$ che sono in relazione con qualche $x \in \mathbb{X}$: $\mathcal{C}D_{\mathcal{R}} = \{y \in \mathbb{Y} : \exists\, x \in \mathbb{X}, x\mathcal{R}y\}$.

Esempio 13 : Siano $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ e $\mathbb{Y} = \{a,b\}$. Un esempio di relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$ può essere il seguente: $\mathcal{R} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,b)\}$.
L'elemento 1 è in relazione sia con a che con b, l'elemento 2 è in relazione solo con a mentre l'elemento 3 è in relazione solo con b.
Esempio 14 : Siano $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ e $\mathbb{Y} = \{3,4,5,6,7\}$. Definiamo la seguente relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$: $x\mathcal{R}y$ se y è il numero delle lettere di cui si compone la parola della cifra x.
Sarà allora: $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,7)\}$, in quanto le parole uno, due e tre sono di 3 lettere, mentre la parola quattro è di 7 lettere.
Esempio 15 : Siano $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ e $\mathbb{Y} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Definiamo la seguente relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$: $x\mathcal{R}y$ se $y = x^2$. Sarà allora: $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$.

RELAZIONI DEFINITE IN UN INSIEME. LORO PROPRIETA'
Costituiscono un caso di particolare interesse le relazioni da un insieme in sè stesso:
$\mathcal{R} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, ovvero $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}$.
Sia allora $\mathbb{X}$ un insieme e sia $\mathcal{R}$ una relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$; la relazione $\mathcal{R}$ si dice:

riflessiva se $\forall\, x : x\mathcal{R}x$
(ogni elemento è in relazione con sè stesso);
simmetrica se $(x_1\mathcal{R}x_2) \Rightarrow (x_2\mathcal{R}x_1)$
(se un elemento è in relazione con un secondo, allora anche quest'ultimo è in relazione con il primo);
antisimmetrica se $((x_1\mathcal{R}x_2)$ **e** $(x_2\mathcal{R}x_1)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$
(se una coppia soddisfa alla proprietà simmetrica, in realtà si tratta della riflessiva);
transitiva se $((x_1\mathcal{R}x_2)$ **e** $(x_2\mathcal{R}x_3)) \Rightarrow (x_1\mathcal{R}x_3)$
(se un elemento è in relazione con un secondo e questo è in relazione con un terzo, anche primo e terzo sono in relazione);
completa se $\forall\, x_1, x_2 : (x_1\mathcal{R}x_2)$ **o** $(x_2\mathcal{R}x_1)$ **o** $(x_1 = x_2)$
(per ogni coppia di elementi, o il primo è in relazione con il secondo, o è il secondo in relazione con il primo, oppure i due elementi sono lo stesso elemento).

Esempio 16 : Sia $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ e consideriamo la relazione $\mathcal{R}$ da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$:
$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$.
La relazione non è riflessiva in quanto mancano le coppie $(2,2)$ e $(3,3)$.
La relazione non è simmetrica in quanto manca la coppia $(2,3)$ mentre è presente la coppia $(3,2)$ (non basta la presenza delle coppie $(1,2)$ e $(2,1)$).
La relazione non è antisimmetrica in quanto $(1,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$ ma $1 \neq 2$.
La relazione non è transitiva in quanto da $(3,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$ non segue $(3,1) \in \mathcal{R}$, anche se da $(1,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$ segue $(1,1) \in \mathcal{R}$.
Esempio 17 : Sia $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ e consideriamo la relazione $\mathcal{R}$ da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$:
$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, ovvero $x_1\mathcal{R}x_2$ se $x_1 = x_2$.
La relazione è riflessiva in quanto sono presenti tutte le coppie del tipo (x,x).
La relazione è sia simmetrica che antisimmetrica in quanto, mancando coppie del tipo (x_1,x_2), con $x_1 \neq x_2$, sono vere sia l'implicazione della proprietà simmetrica che quella dell'antisimmetrica. Per lo stesso motivo la relazione è anche transitiva.
Esempio 18 : Sia $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ e consideriamo la relazione $\mathcal{R}$ da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$:

$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$.
La relazione è riflessiva in quanto sono presenti tutte le coppie del tipo (x,x).
La relazione non è simmetrica in quanto è presente la coppia $(2,3)$ ma manca la coppia $(3,2)$.
La relazione è antisimmetrica in quanto, pur essendo presente la coppia $(2,3)$, non è presente la coppia $(3,2)$, e quindi è vera l'implicazione della proprietà antisimmetrica.
La relazione è infine transitiva, in quanto da $(2,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,3) \in \mathcal{R}$ segue $(2,3) \in \mathcal{R}$, e da $(2,3) \in \mathcal{R}$ e $(3,3) \in \mathcal{R}$ segue $(2,3) \in \mathcal{R}$.

Sono altresì definite ulteriori proprietà, che sono le seguenti:
irriflessiva se $\forall\, x$: **non** $(x\mathcal{R}x)$
(nessun elemento è in relazione con sè stesso);
ariflessiva se $(\exists\, x_1 \in \mathbb{X} : x_1\mathcal{R}x_1)$ **e** $(\exists\, x_2 \in \mathbb{X}$: **non** $(x_2\mathcal{R}x_2))$
(qualche elemento è in relazione con sè stesso e qualche altro non lo è);
asimmetrica se $(x_1\mathcal{R}x_2) \Rightarrow$ (**non** $(x_2\mathcal{R}x_1))$
(se un elemento è in relazione con un secondo, allora quest'ultimo non è in relazione con il primo);
negativamente transitiva se (**non** $(x_1\mathcal{R}x_2))$ **e** (**non** $(x_2\mathcal{R}x_3)) \Rightarrow$ **non** $(x_1\mathcal{R}x_3)$
(se un elemento non è in relazione con un secondo e questo non è in relazione con un terzo, anche primo e terzo non sono in relazione).

RELAZIONI DI EQUIVALENZA
Definizione 11 : sia $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$; $\mathcal{R}$ si dice una **relazione di equivalenza** se soddisfa le seguenti proprietà:
I) riflessiva, II) simmetrica, III) transitiva.

CLASSI DI EQUIVALENZA
Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in $\mathbb{X}$, e sia $x_1 \in \mathbb{X}$.
Definizione 12 : si dice **classe di equivalenza** di x_1, e si indica con $[x_1]$, l'insieme costituito dagli elementi $x \in \mathbb{X}$ che sono in relazione con (o equivalenti a) x_1 :
$[x_1] = \{x \in \mathbb{X} : x\mathcal{R}x_1\}$.
Dalla definizione di relazione di equivalenza segue che:
I) ogni $x \in \mathbb{X}$ appartiene ad una sola classe di equivalenza;
II) classi di equivalenza distinte non hanno elementi in comune.

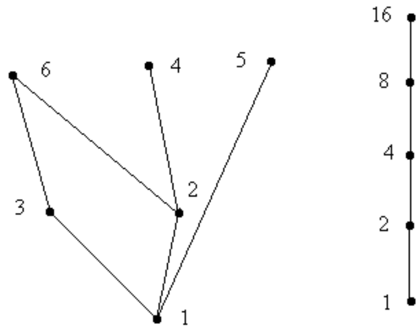
Esempio 19 : $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ e consideriamo la relazione $\mathcal{R}$ da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$:
$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3)\}$.
La relazione data è una relazione di equivalenza. Infatti:
è riflessiva poichè $(1,1) \in \mathcal{R}, (2,2) \in \mathcal{R}$ e $(3,3) \in \mathcal{R}$;
è simmetrica poichè $(1,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$;
è transitiva poichè:
$(1,1) \in \mathcal{R}, (1,2) \in \mathcal{R}$ e $(1,2) \in \mathcal{R}$;
$(2,2) \in \mathcal{R}, (2,1) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$;
$(2,1) \in \mathcal{R}, (1,1) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$;
$(2,1) \in \mathcal{R}, (1,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,2) \in \mathcal{R}$;
$(1,2) \in \mathcal{R}, (2,2) \in \mathcal{R}$ e $(1,2) \in \mathcal{R}$;
$(1,2) \in \mathcal{R}, (2,1) \in \mathcal{R}$ e $(1,1) \in \mathcal{R}$.
La relazione non è antisimmetrica in quanto $(1,2) \in \mathcal{R}$ e $(2,1) \in \mathcal{R}$ ma $1 \neq 2$.
Le classi di equivalenza saranno allora le seguenti: $[1] = \{1,2\}$ e $[3] = \{3\}$.

INSIEME QUOZIENTE

Sia $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza definita in $\mathbb{X}$.
Definizione 13 : si dice **insieme quoziente** di $\mathbb{X}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\mathcal{R}$, e si indica con il simbolo $\dfrac{\mathbb{X}}{\mathcal{R}}$, l'insieme costituito dalle classi di equivalenza originate dalla relazione $\mathcal{R}$: $\dfrac{\mathbb{X}}{\mathcal{R}} = \{[x] : x \in \mathbb{X}\}$.
Nell'Esempio 19 si ha: $\dfrac{\mathbb{X}}{\mathcal{R}} = \{[1], [3]\}$.
L'insieme quoziente, viste le proprietà I) e II), costituisce una partizione di $\mathbb{X}$, ovvero:
I) $\bigcup\limits_i [x_i] = \mathbb{X}$;
II) $[x_i] \cap [x_j] = \emptyset$, se $i \neq j$.

RELAZIONI DI ORDINE E DI PREORDINE
Sia $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$.
Definizione 14 : $\mathcal{R}$ si dice una relazione di **preordine** se soddisfa le seguenti proprietà:
I) riflessiva, II) transitiva.
Sia $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{X}$; $\mathcal{R}$ si dice una relazione di **ordine** se soddisfa le seguenti proprietà:
I) riflessiva, II) antisimmetrica, III) transitiva.
Una relazione di ordine completa si dice anche relazione di **ordine totale**, altrimenti viene detta **parziale**.
Alcuni Autori introducono ulteriori tipi di relazione d'ordine, definite mediante le seguenti proprietà:
relazione di **preordine debole**: I) riflessiva II) transitiva
relazione di **preordine stretto**: I) irriflessiva II) transitiva
relazione di **ordine debole**: I) riflessiva II) antisimmetrica III) transitiva
relazione di **ordine stretto**: I) asimmetrica II) negativamente transitiva.
In questa classificazione le relazioni di ordine debole coincidono con quelle che abbiamo precedentemente chiamato relazioni di ordine.
Sia $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione di ordine definita in $\mathbb{X}$. Se $x\mathcal{R}y$, diremo anche che x precede y, o che x è minore o uguale di y, e scriveremo $x \leq y$ al posto di $x\mathcal{R}y$.

Esempio 20 : Sia $\mathbb{X}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e si consideri la relazione $\mathcal{R}$ in $\mathbb{X}_1$ così definita:
$x\mathcal{R}y$ se $y = kx, k \in \mathbb{N}$, ovvero $x\mathcal{R}y$ se x è sottomultiplo di y.
Si vede facilmente che tale relazione è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi è una relazione di ordine.
Essa è però di ordine parziale, in quanto gli elementi 3 e 4, come 3 e 5, o 4 e 5, o 4 e 6, non sono confrontabili, non essendo nessuno dei due sottomultiplo dell'altro.
Sia invece $\mathbb{X}_2 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ e si consideri la stessa relazione $\mathcal{R}$ data dall'essere sottomultiplo.
Si vede che tale relazione è ancora riflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi è una relazione di ordine, che però questa volta in $\mathbb{X}_2$ è di ordine totale.
Possiamo rappresentare gli elementi di $\mathbb{X}_1$ e quelli di $\mathbb{X}_2$ alla luce della relazione $\mathcal{R}$ mediante i seguenti grafi:



MASSIMO E MASSIMALE, MINIMO E MINIMALE

Sia $\mathbb{X}$ un insieme e $\mathcal{R}$ una relazione di ordine in $\mathbb{X}$. Valgono le seguenti:

Definizione 15 : l'elemento $M \in \mathbb{X}$ si dice **massimo** se : $\forall x \in \mathbb{X}, M \geq x$;

Definizione 16 : l'elemento $m \in \mathbb{X}$ si dice **minimo** se : $\forall x \in \mathbb{X},\ m \leq x$.

Definizione 17 : l'elemento $M \in \mathbb{X}$ si dice **massimale** se : $\forall x \in \mathbb{X},\ (x \geq M) \Rightarrow (x = M)$;

Definizione 18 : l'elemento $m \in \mathbb{X}$ si dice **minimale** se : $\forall x \in \mathbb{X},\ (x \leq m) \Rightarrow (x = m)$.

Notiamo come tutte queste definizioni richiedano l'appartenenza all'insieme.

Se un elemento è massimo (minimo) allora è anche massimale (minimale).

Se la relazione in $\mathbb{X}$ è di ordine totale, un elemento che risulti massimale (minimale) è anche massimo (minimo).

Esempio 21 : Per la relazione $\mathcal{R}$ dell'Esempio 20 in $\mathbb{X}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'elemento 1 è minimo, mentre 4, 5 e 6 sono massimali.

Per la relazione $\mathcal{R}$ dell'Esempio 20 in $\mathbb{X}_2 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ l'elemento 1 è minimo, mentre 16 è massimo.

FUNZIONI

Un caso particolare molto importante di relazione è quello costituito dalle funzioni. Diamo la seguente definizione di funzione (attribuita a Dirichlet):

Definizione 19 : Dati due insiemi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si dice **funzione** da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$, e si indica con $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y};\ x \to f(x)$, o con $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}; y = f(x)$, una relazione da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$ che ad ogni elemento x di $\mathbb{X}$ associa uno ed un solo elemento y di $\mathbb{Y}$:

$\forall x \in \mathbb{X}, \exists\, !\, y \in \mathbb{Y} : y = f(x)$.

L'elemento y è denotato con $f(x)$, ed è chiamato valore di f in x o **immagine** di x mediante f. Si dice pure che x è **controimmagine** o **immagine inversa** di y secondo f.

L'insieme $\mathbb{X}$ è detto **dominio** di f ed è indicato con il simbolo D_f, mentre l'insieme $\mathbb{Y}$ è detto **codominio** di f ed è indicato con il simbolo $\mathcal{CD}_f$.

Specialmente per le funzioni esprimibili mediante formule matematiche si usa anche la dizione di **campo di esistenza**, $\mathcal{CE}_f$, denotando questo l'insieme più ampio dei valori per i quali abbia senso il calcolo dell'espressione $f(x)$. Il dominio può allora essere inteso come un sottoinsieme del campo di esistenza, che al massimo coincide con questo : $D_f \subseteq \mathcal{CE}_f$.

Esempio 22 : Data $f(x) = \dfrac{1}{x}$, non essendo definita la divisione per 0, il campo di esistenza di tale funzione risulta costituito da tutti i numeri reali escluso il valore 0.

Il generico elemento x del dominio prende il nome di **variabile indipendente**, mentre il generico elemento $y = f(x)$ del codominio è detto **variabile dipendente**.
Preso $\mathbb{A} \subseteq D_f$, si indica con $f(\mathbb{A})$, **immagine dell'insieme** $\mathbb{A}$, l'insieme:
$f(\mathbb{A}) = \{y \in \mathbb{Y} : \exists\, x \in \mathbb{A}, y = f(x)\}$.
Si definisce il **grafico** di una funzione come l'insieme:
$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : y = f(x)\}$.
La funzione $i_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \to \mathbb{X};\ f(x) = x$, che ad ogni elemento del dominio associa l'elemento stesso, viene detta **funzione identità** in $\mathbb{X}$.
Una funzione $f : \mathbb{X} \to \{k\}, f(x) = k$, che ad ogni elemento del dominio associa sempre la stessa immagine k, viene detta **funzione costante**.

FUNZIONI SURGETTIVE , INIETTIVE, CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE
Definizione 20 : Data $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y};\ x \to f(x)$, si dice che la funzione è **surgettiva** se :
$\forall\, y \in \mathbb{Y}, \exists\, x \in \mathbb{X} :\ y = f(x)$,
ovvero se ogni elemento del codominio è immagine di qualche (almeno un) elemento del dominio.
Per assicurare la surgettività di una funzione basta allora definirla come $f : \mathbb{X} \to f(\mathbb{X})$.
Definizione 21 : Data $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y};\ x \to f(x)$, si dice che la funzione è **iniettiva** se :
$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$ o, equivalentemente, se :
$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$,
ovvero se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte.
Definizione 22 : una funzione surgettiva e iniettiva si dice una **corrispondenza biunivoca**.
Quando tra due insiemi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca, ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed un solo elemento del secondo insieme e viceversa. Scriveremo allora $f : \mathbb{X} \leftrightarrow \mathbb{Y}$. I due insiemi hanno allora lo stesso numero (o numerosità) di elementi; diciamo in un caso come questo che i due insiemi hanno lo stesso **cardinale**, e scriviamo: $\text{Card}(\mathbb{X}) = \text{Card}(\mathbb{Y})$.

FUNZIONE INVERSA
Sia data una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{X} \leftrightarrow f(\mathbb{X})$. Ad ogni $y \in f(\mathbb{X})$ resta associato uno ed un solo $x \in \mathbb{X}$, cioè quell'elemento $x \in \mathbb{X}$ per cui $y = f(x)$.
Si può così definire una nuova funzione, detta **funzione inversa** di f :
$f^{-1} : f(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}; f(x) \to x$, o anche : $f^{-1} : f(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}; x = f^{-1}(y)$.
Se f è una corrispondenza biunivoca allora esiste ed è unica la sua funzione inversa f^{-1}.
Il grafico della funzione inversa sarà l'insieme: $\mathcal{G}_{f^{-1}} = \left\{(y, x) \in \mathbb{Y} \times \mathbb{X} : x = f^{-1}(y)\right\}$.
Se abbiamo una funzione $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}$ che ammette funzione inversa, esiste una importante proprietà geometrica per quanto concerne il grafico di f e quello di f^{-1}: essi sono infatti simmetrici rispetto alla bisettrice del piano cartesiano $y = x$.
Per poter realizzare questa simmetria occorre però effettuare un passaggio importante:
se f ammette inversa, da $y = f(x)$ segue $x = f^{-1}(y)$, e queste due uguaglianze danno luogo alle stesse identiche coppie (x, y). Se l'asse delle ascisse rappresenta il dominio e quello delle ordinate il codominio, per rappresentare il grafico della funzione inversa occorre procedere allora allo scambio delle variabili, ovvero non rappresentare le coppie che soddisfano alla $x = f^{-1}(y)$ bensì quelle che soddisfano alla $y = f^{-1}(x)$, per poter avere due grafici simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

Esempio 23 : Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$, dove $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali. Tale funzione (è una funzione perchè di ogni numero reale esiste ed è unico il quadrato) non è surgettiva, in quanto i numeri negativi non sono ottenibili come risultato di

una potenza pari. Consideriamo allora la funzione $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \to x^2$, dove $\mathbb{R}_+$ indica l'insieme dei numeri reali non negativi (maggiori o uguali di zero). Tale funzione risulta surgettiva, poichè ogni numero positivo rappresenta un quadrato, ma non risulta però iniettiva, in quanto un numero ed il suo opposto hanno lo stesso quadrato.
La funzione $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \to x^2$, ottenuta restringendo il dominio ai soli valori non negativi, risulta una corrispondenza biunivoca, ed ammette funzione inversa:
$f_2^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \to \sqrt{x}$.
(Da $y = x^2$ segue, in $\mathbb{R}_+,\ x = \sqrt{y}$ e quindi l'inversa risulta $y = \sqrt{x}$)
La funzione $f_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+,\ x \to x^2$, ottenuta restringendo invece il dominio ai soli valori non positivi, risulta una corrispondenza biunivoca, ed ammette funzione inversa:
$f_3^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, x \to -\sqrt{x}$.
(Da $y = x^2$ segue, in $\mathbb{R}_-,\ x = -\sqrt{y}$ e quindi l'inversa risulta $y = -\sqrt{x}$)
Esempio 24 : Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$. Senza verificare che tale funzione risulta una corrispondenza biunivoca, vediamo intanto come determinare l'espressione della sua funzione inversa. Da $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ otteniamo: $y \cdot (2^x + 1) = 2^x - 1$, e quindi: $y + 1 = 2^x \cdot (1 - y)$, da cui: $2^x = \dfrac{y+1}{1-y}$, e quindi infine $x = \log_2\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right)$.
L'espressione cartesiana dell'inversa sarà quindi : $y = \log_2\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI. FUNZIONE COMPOSTA
Siano date due funzioni f e g, tali che il codominio di g sia contenuto nel dominio di f :
$g : \mathbb{X} \to g(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y},\ x \to y = g(x)$ e $f : \mathbb{Y} \to f(\mathbb{Y}) \subseteq \mathbb{Z}, y \to z = f(y)$.
Avremo allora : $z = f(y) = f(g(x))$, e possiamo definire la **funzione composta** :
$f \circ g : \mathbb{X} \to \mathbb{Z},\ x \to f(g(x))$.
La composizione di funzioni non è in generale commutativa; se ci limitiamo a considerare funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'esistenza di $f \circ g$ non implica quella di $g \circ f$, e, se anche entrambe esistessero, in generale si ha che $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Esempio 25 : Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \operatorname{sen} x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to 1 - x^2$.
Avremo allora le seguenti due composizioni:
$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to f(g(x)) = f\left(1 - x^2\right) = \operatorname{sen}\left(1 - x^2\right)$,
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to g(f(x)) = g(\operatorname{sen} x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$.
Esempio 26 : Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \to \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x = 0 \\ x & : 0 < x \end{cases}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \to \begin{cases} -x & : x < 0 \\ x & : x \geq 0 \end{cases}$,
avremo allora:

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \to f(g(x)) = \begin{cases} f(-x) & : x < 0 \\ f(x) & : x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & : x < 0 \\ 1 & : x = 0 \\ x & : 0 < x \end{cases}, \text{ e}$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \to g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & : x < 0 \\ g(1) & : x = 0 \\ g(x) & : 0 < x \end{cases} \text{ da cui } g(f(x)) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x = 0 \\ x & : 0 < x \end{cases}.$$

Notiamo, come caso particolare, che $g(f(x)) = f(x)$.

Se $f : \mathbb{X} \to f(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}$ ammette funzione inversa $f^{-1} : f(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$, componendo nei due modi f e f^{-1} si ha : $f^{-1} \circ f = i_{\mathbb{X}}$, funzione identità di $\mathbb{X}$ mentre $f \circ f^{-1} = i_{\mathbb{Y}}$, funzione identità di $\mathbb{Y}$.

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

Una funzione $f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to f(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}, y = f(a,b)$, avente dominio contenuto nel prodotto cartesiano $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, viene detta funzione di due variabili. Analogamente, una funzione avente dominio contenuto nel prodotto cartesiano di n insiemi $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times ... \times \mathbb{A}_n$ viene detta funzione di n variabili:
$f : \mathbb{X} \subseteq \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times ... \times \mathbb{A}_n \to f(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}, y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Esempio 27 : La formula che esprime l'area di un rettangolo è data da : area = base per altezza, ovvero: $f : (b,h) \to A = b \cdot h = f(b,h)$.
Esempio 28 : Consideriamo la formula che esprime la lunghezza della diagonale interna d di un parallelepipedo in funzione della lunghezza dei lati, denotati rispettivamente con x, y e z :
$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Abbiamo una funzione delle tre variabili x, y e z :
$f : (x,y,z) \to d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(x,y,z)$.

NUMERI REALI

Diamo una descrizione essenziale dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali iniziando dai suoi principali sottoinsiemi.

NUMERI NATURALI

Con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ si indica l'insieme dei **numeri naturali**. L'insieme $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto, ovvero sommando e moltiplicando numeri naturali si ottiene sempre, come risultato, un numero naturale.
Posto $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, diamo la:
Definizione 23 : un insieme $\mathbb{A}$ si dice **finito** se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un opportuno $\mathbb{I}_n$. Se $\mathbb{A} \leftrightarrow \mathbb{I}_n$, allora $\text{Card}(\mathbb{A}) = \text{Card}(\mathbb{I}_n) = n$.
Gli insiemi che non risultano finiti vengono detti infiniti, ma la definizione di insieme infinito viene solitamente data in un'altra maniera, che introduciamo con un esempio.
Sia $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ l'insieme dei numeri (naturali) pari. E' facile vedere come esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$: consideriamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P},\ n \to 2n$, che ha come inversa $f^{-1} : \mathbb{P} \to \mathbb{N}, n \to \dfrac{n}{2}$.
Quindi $\text{Card}(\mathbb{P}) = \text{Card}(\mathbb{N})$ anche se $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$. Questa circostanza viene usata per dare la definizione di insieme infinito.
Definizione 24 : un insieme si dice **infinito** se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
Definizione 25 : un insieme si dice **numerabile** se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.
L'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari è un insieme numerabile, così come quello dei numeri dispari, e risulta numerabile anche $\mathbb{N}_2 = \{0, 1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$, l'insieme dei quadrati perfetti, in quanto $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_2,\ n \to n^2$, risulta una corrispondenza biunivoca.
Vale infine la seguente:

Definizione 26 : Dato un numero naturale n, si dice **fattoriale** di n, e si indica con $n\,!$, il prodotto di tutti i numeri naturali decrescenti da n a 1.
Ovvero: $n\,! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Sempre per definizione si pone poi: $0\,! = 1$.
Vale la proprietà: $n\,! = n\,(n-1)\,!$.

Se si vuole escludere il solo valore 0 dall'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali si usa, al posto di $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, la seguente notazione: $\mathbb{N}^*$, che sarà poi usata anche per gli altri insiemi numerici.

SUCCESSIONI
Definizione 27 : Dicesi Successione ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \to f(n) = a_n$, avente cioè per dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (o un suo opportuno sottoinsieme comunque infinito), e codominio, che indicheremo con $f(\mathbb{N})$ o con $\{a_n\}$, contenuto in $\mathbb{R}$.
Al posto della notazione $f(n)$, per indicare l'immagine di n si usa solitamente scrivere a_n.
Una Successione, avendo dominio numerabile, può essere scritta per esteso come:
$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$.
Il termine a_n viene detto termine generale della Successione, mentre la variabile n prende anche il nome di indice.

Esempio 29 : Vediamo alcuni esempi di successioni :
$a_n = (-1)^n : \{1, -1, 1, -1, ...\}, n \in \mathbb{N}$;
$a_n = \dfrac{n+1}{n} : \left\{2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, ...\right\}, n \in \mathbb{N}^*$;
$a_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} : \{1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, \ ....\}, n \in \mathbb{N}$;
$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ : \left\{1, \sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, ... \right\}, n \in \mathbb{N}$.

NUMERI INTERI
Si indica con $\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ l'insieme dei **numeri interi**, costituito dai numeri naturali n e dai loro opposti $-n$. Quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. L'insieme $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alla somma, al prodotto e alla differenza, ovvero sommando, moltiplicando e sottraendo numeri interi si ottiene sempre, come risultato, un numero intero.
L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è un insieme numerabile, anche se $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Basta considerare:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \to f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & \text{per } n \text{ dispari} \\ -\dfrac{n}{2} & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$, che risulta una corrispondenza biunivoca con inversa $f^{-1}(z) = \begin{cases} 2z-1 & \text{per } z \text{ positivo} \\ -2z & \text{per } z \text{ negativo} \end{cases}$. Quindi $\text{Card}(\mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbb{N})$.

NUMERI RAZIONALI
Consideriamo l'insieme $\overline{\mathbb{Q}} = \left\{\dfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$, ovvero l'insieme costituito da tutte le possibili frazioni aventi numeratore e denominatore interi, ovviamente con denominatore diverso da zero. In tale insieme possiamo introdurre una relazione $\mathcal{R}$ così definita:
$\dfrac{m_1}{n_1}\mathcal{R}\dfrac{m_2}{n_2}$ se $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$, ovvero se, una volta semplificati gli eventuali sottomultipli comuni, risulta $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$. E' facile vedere che tale relazione $\mathcal{R}$ risulta una relazione di equi-

valenza, ed allora, considerato l'insieme quoziente, poniamo $\mathbb{Q} = \dfrac{\overline{\mathbb{Q}}}{\mathcal{R}}$. L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei **numeri razionali**, ovvero dei numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione $\dfrac{m}{n}$, con m e n numeri primi tra loro. E' facile vedere che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
L'insieme $\mathbb{Q}$ risulta chiuso rispetto a tutte e quattro le operazioni dell'aritmetica: somma, prodotto, differenza e divisione.
L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un insieme numerabile, e quindi $\text{Card}(\mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{N})$.
La dimostrazione della numerabilità di $\mathbb{Q}$ è basata su di una procedura, detta diagonale, che qui non viene descritta.
La notazione frazionaria sottintende, come noto, alla divisione $m : n$ tra due numeri interi. Eseguendo tale divisione, ovvero mettendo il numero razionale in forma decimale, due sono i tipi di risultato possibili: o si ottiene un numero decimale finito, e questo accade quando il resto della divisione è zero, oppure si ottiene un numero decimale periodico, e questo accade quando non si incontra mai un resto pari a zero, per cui si ritrova, prima o poi, uno dei resti già incontrati. Possiamo unificare tutto questo dicendo che ogni numero razionale, messo in forma decimale, dà per risultato un numero periodico, di periodo zero (i decimali finiti) o di periodo diverso da zero (i decimali periodici veri e propri).

NUMERI REALI
Si consideri un quadrato di lato pari ad 1; come noto dalla geometria, la diagonale di tale quadrato ha allora una lunghezza pari a $\sqrt{2}$. Vediamo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ovvero che non esiste alcuna frazione tale che $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$.
Supponendo m e n primi tra loro, da $\dfrac{m}{n} = \sqrt{2}$, segue $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, ovvero $m^2 = 2n^2$, da cui si deduce che m^2 è pari, e quindi che m è pari.
Posto $m = 2k$, sostituendo si ha: $4k^2 = 2n^2$, ovvero $n^2 = 2k^2$, e quindi n^2 è pari, per cui anche n è pari.
Ma così abbiamo raggiunto una contraddizione, in quanto sia n che m risulterebbero pari, ovvero multipli di 2, mentre avevamo supposto che fossero primi tra loro.
Quindi $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, ovvero esistono altri numeri oltre ai numeri razionali.
Dato che i razionali, se messi in forma decimale, risultano comunque periodici (se di periodo zero sono decimali finiti), i numeri che non sono razionali non potranno che essere, se messi in forma decimale, numeri non finiti e non periodici, ovvero con infinite cifre dopo la virgola senza alcuna periodicità tra di esse.
Tali numeri, dato che non sono esprimibili sotto forma di frazione (razionali) saranno detti **numeri irrazionali**.
L'insieme risultante dall'unione dei numeri razionali e dei numeri irrazionali prende il nome di insieme dei **numeri reali**, e viene denotato con $\mathbb{R}$. Si ha che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Si dimostra, ma qui lo omettiamo, che $\mathbb{R}$ non è numerabile, per cui $\text{Card}(\mathbb{R}) > \text{Card}(\mathbb{N})$.
Dato che ogni numero irrazionale ha infinite cifre dopo la virgola, non periodiche, segue che di esso potremo avere solo una rappresentazione approssimata, potendosi determinare, dopo la virgola, solo un numero finito, per quanto grande, di cifre decimali.
Supponiamo di voler trovare un valore approssimato di $\sqrt{2}$. Dobbiamo utilizzare i numeri razionali, dei quali abbiamo una rappresentazione esatta, e procedere per tentativi.
Se $x = \sqrt{2}$, allora $x^2 = 2$. Essendo $1^2 = 1 < 2$ e $2^2 = 4 > 2$, segue che $1 < \sqrt{2} < 2$.
Passando al primo decimale, si ha: $(1{,}4)^2 < 2$ mentre $(1{,}5)^2 > 2$, da cui $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
Essendo $(1{,}41)^2 < 2$ mentre $(1{,}42)^2 > 2$, segue che $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Essendo $(1{,}414)^2 < 2$ mentre $(1{,}415)^2 > 2$, segue che $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.
Essendo $(1{,}4142)^2 < 2$ mentre $(1{,}4143)^2 > 2$, segue che $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$.
Chiaramente questa procedura non ha termine, ma consente, una cifra alla volta, di esprimere il numero $\sqrt{2}$ con l'approssimazione desiderata.
Procedendo in questo modo abbiamo costruito due classi nell'ambito dei numeri razionali; abbiamo cioè costruito due successioni: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che:
$a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < ... < b_n < ... < b_2 < b_1 < b_0$,
ovvero tali che $b_i > a_j, \forall\, i, j$. Se è soddisfatta la seguente ulteriore proprietà:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) : (n > n(\varepsilon)) \Rightarrow (b_n - a_n < \varepsilon)$
le due classi si dicono **contigue**, ovvero, se n è abbastanza grande, gli elementi a_n e b_n sono "vicini" quanto vogliamo.
Possiamo ora definire in maniera rigorosa l'insieme dei numeri reali.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DEI NUMERI REALI
Definire assiomaticamente significa enunciare un numero minimo essenziale di proprietà (assiomi) in modo tale che l'oggetto che si vuole definire sia l'unico che soddisfa a tali proprietà.
Vediamo quali sono i quattro assiomi che occorrono per definire $\mathbb{R}$.
Definizione 28 : $\mathbb{R}$ è un campo ordinato e completo.
Dire che $\mathbb{R}$ è un campo sintetizza i primi due assiomi:
Assioma I (della somma):
E' definita in $\mathbb{R}$ una operazione, detta somma, con le seguenti proprietà:
I1) vale la proprietà commutativa : $x + y = y + x$;
I2) vale la proprietà associativa : $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$;
I3) esiste unico l'elemento neutro della somma : $x + 0 = 0 + x = x$;
I4) esiste unico, $\forall\, x$, l'elemento inverso (opposto) : $x + (-x) = 0$.
Assioma II (del prodotto):
E' definita in $\mathbb{R}$ una operazione, detta prodotto, con le seguenti proprietà:
II1) vale la proprietà commutativa : $x \cdot y = y \cdot x$;
II2) vale la proprietà associativa : $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$;
II3) esiste unico l'elemento neutro del prodotto : $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
II4) esiste unico, $\forall\, x \neq 0$, l'elemento inverso (reciproco) : $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
II5) Vale infine la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Dire che $\mathbb{R}$ è ordinato significa che in $\mathbb{R}$ è definita una relazione di ordine totale:
Assioma III (dell'ordine):
Si consideri la relazione $\mathcal{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, così definita : $x\mathcal{R}y$ se $x - y \in \mathbb{R}_+$.
Ovvero x è in relazione con y se la differenza $x - y$ non è negativa. Si verifica che tale relazione è di ordine totale in $\mathbb{R}$ e scriveremo $x \geq y$ al posto di $x\mathcal{R}y$.
Scriveremo anche $x > y$ per indicare che $x \geq y$ e $x \neq y$.
Con questa relazione d'ordine ne segue che:
-ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo;
-ogni numero positivo è maggiore di zero, ed ogni numero negativo è minore di zero;
-tra due numeri positivi il maggiore è quello avente la quantità maggiore (es. : $7 > 5$);
-tra due numeri negativi il maggiore è quello avente la quantità minore (es. : $-5 > -7$).
Valgono poi le seguenti proprietà, fondamentali per la risoluzione delle disequazioni, che collegano la relazione d'ordine con le operazioni di somma e prodotto:
III1) se $x \geq y \Rightarrow x + k \geq y + k, \forall\, k \in \mathbb{R}$;

ovvero: sommando o sottraendo ai due membri di una disequazione una stessa quantità, la disequazione mantiene lo stesso verso.
III2) se $x \geq y \Rightarrow k\,x \geq k\,y, \forall\, k \in \mathbb{R}_+$;
ovvero: moltiplicando i due membri di una disequazione per una stessa quantità positiva, la disequazione mantiene lo stesso verso.
III3) se $x \geq y \Rightarrow k\,x \leq k\,y, \forall\, k \in \mathbb{R}_-$;
ovvero: moltiplicando i due membri di una disequazione per una stessa quantità negativa, la disequazione cambia di verso.
III4) se $x \geq y > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$;
III5) se $x \leq y < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$;
ovvero: facendo il reciproco di ciascuno dei due membri di una disequazione, che abbiano lo stesso segno, la disequazione cambia di verso.
III6) se $x < 0 < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$;
ovvero: facendo il reciproco di ciascuno dei due membri di una disequazione, che abbiano segno diverso, la disequazione mantiene lo stesso verso.

Esempio 30 : La disequazione $x^2 - 2x > x - 2$ è equivalente alla: $x^2 - 3x + 2 > 0$ in quanto, per la III1) si ha: $x^2 - 2x - (x-2) > x - 2 - (x-2)$, ovvero $x^2 - 3x + 2 > 0$. Infatti si è sottratto una stessa quantità, $(x-2)$, ai due membri della disequazione.
Esempio 31 : La disequazione $\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} > x$ non è equivalente alla $x^2 - 2x > x\,(x-1)$, in quanto ottenuta dalla $\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} \cdot (x-1) > x\,(x-1)$, ovvero moltiplicando ambedue i membri per $(x-1)$, che non è però una quantità nè positiva nè negativa, in quanto cambia di segno a seconda che sia $x > 1$ oppure $x < 1$.
Per risolvere tale disequazione operiamo allora nel seguente modo:
da $\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} > x$ otteniamo $\dfrac{x^2 - 2x}{x-1} - x > 0$ e da questa: $\dfrac{x^2 - 2x - x^2 + x}{x-1} > 0$, ovvero $\dfrac{-\,x}{x-1} > 0$. Dato che $-\,x > 0$ per $x < 0$, mentre $x - 1 > 0$ per $x > 1$, segue che la disequazione è soddisfatta per $0 < x < 1$, dove sia il numeratore che il denominatore sono negativi.
Esempio 32 : La disequazione $\dfrac{1}{2 + x^2} < \dfrac{1}{\text{sen}^2 x + 1}$ è equivalente alla $2 + x^2 > \text{sen}^2 x + 1$ per la proprietà III4), e quindi alla $x^2 > \text{sen}^2 x - 1$. Dato poi che $\text{sen}^2 x - 1 = -\cos^2 x$, la disequazione risulta sempre soddisfatta.
Esempio 33 : La disequazione $\dfrac{1}{2 + x^2} > \dfrac{1}{\text{sen}^2 x - 2}$ è equivalente alla $2 + x^2 > \text{sen}^2 x - 2$ e non alla $2 + x^2 < \text{sen}^2 x - 2$, per la proprietà III6), in quanto $2 + x^2$ è quantità sempre positiva mentre $\text{sen}^2 x - 2$ è quantità sempre negativa. Per questo motivo tale disequazione risulta sempre soddisfatta.

Dire, infine, che $\mathbb{R}$ è completo riguarda l'ultimo Assioma:
Assioma IV (di completezza o continuità):
Ogni coppia di classi contigue ammette in $\mathbb{R}$ un unico elemento separatore, ovvero un elemento $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che:
$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots \leq \sigma \leq \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1 < b_0$.

Si può notare come l'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ soddisfi anch'esso ai primi tre Assiomi, quelli della somma, del prodotto e dell'ordine. Ma $\mathbb{Q}$ non soddisfa al quarto Assioma, quello di completezza. Infatti non è vero che ogni coppia di classi contigue ammette in $\mathbb{Q}$ un unico elemento separatore; basta considerare le due classi dell'esempio relativo alla determinazione di $\sqrt{2}$. Esse sono costituite da numeri razionali ma hanno per elemento separatore un numero irrazionale. Quindi $\mathbb{Q}$ non è completo.
Presi due numeri razionali $\dfrac{m_1}{n_1}$ e $\dfrac{m_2}{n_2}$, la loro media aritmetica $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_1}{n_1}+\dfrac{m_2}{n_2}\right)$ è ancora un numero razionale, e risulta $\dfrac{m_1}{n_1}<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_1}{n_1}+\dfrac{m_2}{n_2}\right)<\dfrac{m_2}{n_2}$. Quindi tra due numeri razionali c'è sempre almeno un altro numero razionale, e quindi, come conseguenza, infiniti numeri razionali. Per questo motivo l'insieme $\mathbb{Q}$ è detto **denso**. Anche $\mathbb{R}$ è denso, ma è, diversamente da $\mathbb{Q}$, anche completo.

LA RETTA REALE

Consideriamo una retta geometrica r e l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Si dimostra (qui lo omettiamo) che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di r ed i numeri reali: ad ogni punto della retta si può far corrispondere uno ed un solo numero reale e viceversa. Si viene a stabilire un sistema di riferimento che viene anche detto un sistema di ascisse sulla retta. La retta geometrica, a ciascun punto della quale corrisponde il suo proprio numero reale, prende il nome di **retta reale**. Punti della retta geometrica e numeri reali sono tali che tra due di essi ce ne sono sempre infiniti altri; una importante conseguenza di questo è costituita dal fatto che per nessun punto della retta geometrica come per nessun numero reale è possibile parlare di elemento precedente e di elemento successivo dell'elemento dato.

IL PIANO CARTESIANO

Dato l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$.
In analogia con quanto fatto per la retta reale, stabiliamo in $\mathbb{R}^2$ un sistema di riferimento che risulta dedotto da quello stabilito sulla retta reale $\mathbb{R}$.
Considerato un piano geometrico, ogni coppia di valori reali $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ individua un punto di tale piano e viceversa; il primo elemento della coppia (x,y) prende il nome di **ascissa**, il secondo quello di **ordinata**. Per questo motivo $\mathbb{R}^2$ viene detto **piano reale** o **cartesiano**.

GRAFICO DI UNA FUNZIONE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Data una funzione $y=f(x)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, siano D_f e $f(D_f)$ il suo dominio ed il suo codominio. Il grafico della funzione è l'insieme: $G_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :y=f(x)\right\}\subset D_f\times f(D_f)$.
Gli elementi del dominio vengono rappresentati sull'asse delle ascisse, quelli del codominio sull'asse delle ordinate.

INTERVALLI

Gli intervalli costituiscono la categoria più importante tra i sottoinsiemi della retta reale.
Si definiscono otto tipi di intervallo, che sono i seguenti:
- $[a,b]:\{x:a\le x\le b\}$ Intervallo limitato e chiuso
- $]a,b[:\{x:a<x<b\}$ Intervallo limitato e aperto
- $]a,b]:\{x:a<x\le b\}$ Intervallo limitato nè aperto nè chiuso
- $[a,b[:\{x:a\le x<b\}$ Intervallo limitato nè aperto nè chiuso
- $]-\infty,b]:\{x:x\le b\}$ Intervallo illimitato e chiuso
- $]-\infty,b[:\{x:x<b\}$ Intervallo illimitato e aperto
- $[a,+\infty[:\{x:a\le x\}$ Intervallo illimitato e chiuso
- $]a,+\infty[:\{x:a<x\}$ Intervallo illimitato e aperto.

ESTREMO SUPERIORE ED INFERIORE

Anche se, come enunciato nel III Assioma, in $\mathbb{R}$ esiste un ordinamento totale, non è detto che esistano massimo e minimo per un qualunque sottoinsieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$. Consideriamo infatti l'intervallo limitato e aperto $]a, b[$: a non può essere il minimo e b non può essere il massimo in quanto non appartengono all'insieme. Se ci fosse un numero reale successivo ad a o ci fosse quello precedente b, sarebbero questi il minimo ed il massimo, ma questo non è possibile: tra a e l'ipotetico numero reale seguente a, per la densità di $\mathbb{R}$, ci sono infiniti altri numeri reali, e quindi $]a, b[$ non ha nè massimo nè minimo.
Questa lacuna viene colmata definendo l'estremo inferiore e l'estremo superiore di un insieme, che esistono qualunque sia l'insieme considerato.
Diamo anzitutto la definizione di maggiorante e di minorante di un insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$.
Definizione 29 : un elemento $k \in \mathbb{R}$ si dice **maggiorante** di $\mathbb{A}$ se : $k \geq x, \forall x \in \mathbb{A}$.
Definizione 30 : un elemento $k \in \mathbb{R}$ si dice **minorante** di $\mathbb{A}$ se : $k \leq x, \forall x \in \mathbb{A}$.
Contrariamente a quanto richiesto per il massimo e per il minimo, queste definizioni non richiedono che l'elemento k appartenga ad $\mathbb{A}$.
Definizione 31 : l'insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se ammette almeno un maggiorante, si dice **inferiormente limitato** se ammette almeno un minorante.
Un insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ si dice **limitato** quando risulta limitato sia inferiormente che superiormente, ovvero se ammette almeno un maggiorante ed almeno un minorante.
Definizione 32 : se un insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ non è limitato (superiormente e/o inferiormente) si dice **illimitato** (superiormente e/o inferiormente).
Consideriamo ora un insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ che sia superiormente limitato.
Definizione 33 : si dice **Estremo superiore** di $\mathbb{A}$, $\mathrm{Sup}(\mathbb{A}) \in \mathbb{R}$, quel numero tale che:
I) $\mathrm{Sup}(\mathbb{A}) \geq x, \forall x \in \mathbb{A}$;
II) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{A} : x > \mathrm{Sup}(\mathbb{A}) - \varepsilon$.
Quindi $\mathrm{Sup}(\mathbb{A})$ è un maggiorante di $\mathbb{A}$, ed è il minimo tra tutti i maggioranti di $\mathbb{A}$.
Sia invece ora $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ un insieme inferiormente limitato.
Definizione 34 : si dice **Estremo inferiore** di $\mathbb{A}$, $\mathrm{Inf}(\mathbb{A}) \in \mathbb{R}$, quel numero tale che:
I) $\mathrm{Inf}(\mathbb{A}) \leq x, \forall x \in \mathbb{A}$;
II) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{A} : x < \mathrm{Inf}(\mathbb{A}) + \varepsilon$.
Quindi $\mathrm{Inf}(\mathbb{A})$ è un minorante di $\mathbb{A}$, ed è il massimo tra tutti i minoranti di $\mathbb{A}$.
Se $\mathrm{Sup}(\mathbb{A}) \in \mathbb{A}$, allora $\mathrm{Sup}(\mathbb{A})$ è anche il massimo, mentre se $\mathrm{Inf}(\mathbb{A}) \in \mathbb{A}$, allora $\mathrm{Inf}(\mathbb{A})$ è anche il minimo.
Se un insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente, si pone $\mathrm{Sup}(\mathbb{A}) = +\infty$, mentre se risulta illimitato inferiormente si pone $\mathrm{Inf}(\mathbb{A}) = -\infty$.

Esempio 34 : Sia $\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Essendo $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, l'insieme è limitato, e si vede che $0 = \mathrm{Inf}(\mathbb{A})$ mentre $1 = \mathrm{Sup}(\mathbb{A})$. Il valore 1 è quindi anche massimo, mentre 0 non è minimo in quanto $0 \notin \mathbb{A}$.

FUNZIONI LIMITATE E NON LIMITATE

Definizione 35 : Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x)$, si dice che la funzione $f(x)$ in un insieme $\mathbb{A} \subseteq D_f$ è **limitata** (superiormente e/o inferiormente) se il suo codominio $f(\mathbb{A})$ risulta limitato (superiormente e/o inferiormente).
Quando $\mathrm{Sup}(f(\mathbb{A})) = +\infty$ e/o $\mathrm{Inf}(f(\mathbb{A})) = -\infty$, diremo che la funzione $f(x)$ nell'insieme $\mathbb{A}$ è illimitata superiormente e/o inferiormente.

VALORE ASSOLUTO

Definizione 36 : Dato $x \in \mathbb{R}$, si dice **valore assoluto** (o modulo) di x, e si indica con $|x|$, il valore: $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$.

Data una quantità o funzione $f(x)$ avremo allora $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : f(x) < 0 \end{cases}$.

Il valore assoluto esprime la quantità del numero indipendentemente dal segno.
Valgono, per il valore assoluto, le seguenti proprietà:

I) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

II) $|x + y| \leq |x| + |y|$

III) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

La II) è anche detta disuguaglianza triangolare.

PARTE INTERA

Definizione 37 : Dato $x \in \mathbb{R}$, si dice **parte intera** di x, e si indica con $[x]$, il valore: $[x] = \text{Max}\,\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$.

La parte intera di un numero x è data cioè dal più grande numero intero contenuto in x.
Se x è un numero intero, sia positivo che negativo, la parte intera ed il numero coincidono; se x è un numero non intero positivo, per avere la sua parte intera basta togliere la virgola e tutte le cifre che la seguono; se x è un numero non intero negativo, per avere la sua parte intera si devono togliere la virgola e tutte le cifre che la seguono, e poi incrementare di 1 la parte negativa che precede la virgola.

Esempio 35 : $[3] = 3$, $[3{,}52] = 3$, $[\pi] = 3$, $\left[\frac{3}{5}\right] = 0$. Invece $[-4] = -4$, $[-3{,}52] = -4$, $[-\pi] = -4$.

TOPOLOGIA

SPAZI METRICI

Sia dato un insieme $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 38 : Dicesi **distanza** (o metrica) ogni funzione $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ tale che:

1) $\forall x, y \in \mathbb{X} : d(x,y) \geq 0$, con $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $\forall x, y \in \mathbb{X} : d(x,y) = d(y,x)$;
3) $\forall x, y, z \in \mathbb{X} : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Un insieme nel quale sia stata definita una distanza si dice **spazio metrico**.

Esempio 36 : La funzione $d_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & : \text{se } x = y \\ 1 & : \text{se } x \neq y \end{cases}$ è una distanza in $\mathbb{R}$, in quanto, come facilmente si verifica, soddisfa alle tre proprietà. Con questa distanza, due qualunque numeri reali o coincidono o hanno distanza uguale ad 1.

Definizione 39 : Dicesi **distanza Euclidea** in $\mathbb{R}$ la funzione:
$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = |x - y|$.

Definizione 40 : Dicesi distanza Euclidea in $\mathbb{R}^2$ la funzione:
$d : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_+$, $d((x_1,y_1);(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Quest'ultima coincide con la formula che ci dà la distanza di due punti del piano cartesiano.

Esempio 37 : Data la funzione $d(x,y) = |x^2 - y^2|$, verifichiamo se essa è una distanza in $\mathbb{R}$. E' verificata la $d(x,y) \geq 0, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$, ma si ha che $d(x,y) = 0$ non solo per $x = y$ ma anche per $x = -y$, per cui questa funzione non è una distanza.

CLASSIFICAZIONE TOPOLOGICA DEI PUNTI
Definizione 41 : Dato uno spazio metrico $\mathbb{X}$ con una assegnata distanza d e preso un suo punto x_0, si dice **intorno** sferico del punto x_0 di ampiezza assegnata ε l'insieme:
$\mathfrak{I}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, x_0) < \varepsilon\}$.
In $\mathbb{R}$, con la distanza Euclidea, l'intorno è dato da $\mathfrak{I}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{X} : |x - x_0| < \varepsilon\}$, ovvero dai punti dell'intervallo $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.
Nel piano $\mathbb{R}^2$, invece, un intorno sferico è costituito dai punti interni al cerchio di centro x_0 e raggio ε.
Più in generale, si definisce intorno del punto x_0 un qualunque insieme che contenga un intorno sferico di x_0, anche se dicendo intorno si intende comunemente pure l'intorno sferico.
Dalla definizione di intorno seguono due importanti proprietà:
- un punto x_0 appartiene ad ogni suo intorno, quale che ne sia l'ampiezza ε,
- l'intersezione di due intorni di x_0 è anch'essa un intorno di x_0.

Consideriamo un qualunque sottoinsieme $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$. Definiamo ora le possibili relazioni topologiche tra un punto x_0 e l'insieme $\mathbb{A}$.
Definizione 42 : si dice che il punto x_0 è **punto di accumulazione** per l'insieme $\mathbb{A}$ se qualunque intorno di x_0 ha intersezione non vuota e diversa dal solo punto x_0 con $\mathbb{A}$, ovvero se:
$\forall\, \varepsilon > 0 : \{\mathfrak{I}(x_0, \varepsilon)/\{x_0\}\} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$.
Questo equivale a dire che in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di $\mathbb{A}$ diversi da x_0.
Notiamo che la definizione di punto di accumulazione non richiede nè l'appartenenza nè la non appartenenza all'insieme $\mathbb{A}$.

Esempio 38 : Consideriamo l'insieme $\mathbb{A} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, formato dai reciproci dei numeri naturali. Vediamo che in ogni intorno del punto $x_0 = 0$ cadono infiniti punti di $\mathbb{A}$.
Infatti $\frac{1}{n} \in \mathfrak{I}(0, \varepsilon)$ se $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, e perchè questa sia soddisfatta basta che sia $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Il punto $x_0 = 0 \notin \mathbb{A}$ è quindi punto di accumulazione per $\mathbb{A}$.

Definizione 43 : si dice che il punto x_0 è **punto isolato** per l'insieme $\mathbb{A}$ se esiste almeno un intorno di x_0 che non ha punti in comune con $\mathbb{A}$, eccetto il punto x_0, ovvero se:
$\exists\, \varepsilon > 0 : \mathfrak{I}(x_0, \varepsilon) \cap \mathbb{A} = \{x_0\}$.
Questo equivale a dire che esiste almeno un intorno di x_0 nel quale l'unico punto di $\mathbb{A}$ è x_0.
Notiamo che la definizione di punto isolato richiede l'appartenenza all'insieme $\mathbb{A}$.

Esempio 39 : Consideriamo ancora l'insieme $\mathbb{A} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Scelto un qualunque valore di n, vediamo che il punto $\frac{1}{n}$ è un punto isolato di $\mathbb{A}$. Infatti, basta prendere un suo intorno di ampiezza $\varepsilon < \frac{1}{n\,(n+1)}$ per avere un intorno del punto $\frac{1}{n}$ nel quale non si trovano altri elementi di $\mathbb{A}$ oltre $\frac{1}{n}$.

Definizione 44 : si dice che il punto x_0 è **punto interno** ad $\mathbb{A}$ se esiste almeno un intorno di x_0 tutto contenuto in $\mathbb{A}$, ovvero se:

$\exists\, \varepsilon > 0 : \mathfrak{I}(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{A}$.
Anche la definizione di punto interno richiede l'appartenenza di x_0 all'insieme $\mathbb{A}$.
E' facile poi vedere come essere punto interno implichi essere punto di accumulazione.

Esempio 40 : L'insieme $\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ non ha punti interni. Infatti, in ogni intorno di un qualunque punto $\frac{1}{n}$ cadono numeri reali che non sono il reciproco di alcun numero naturale.

Definizione 45 : si dice che il punto x_0 è **esterno** ad $\mathbb{A}$ se risulta interno a $\mathcal{C}(\mathbb{A})$, cioè al complementare di $\mathbb{A}$.
La definizione di punto esterno richiede quindi la non appartenenza all'insieme $\mathbb{A}$.

Esempio 41 : Il punto $x_0 = \frac{3}{7}$ è esterno all'insieme $\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Infatti $\frac{3}{7} \notin \mathbb{A}$ e basta prendere un'ampiezza $\varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{3}{7} \simeq 0.071$, per avere un intorno di $\frac{3}{7}$ nel quale non cadono punti di $\mathbb{A}$.

Definizione 46 : si dice che il punto x_0 è **punto di frontiera** di $\mathbb{A}$ se qualunque intorno di x_0 ha intersezione non vuota sia con $\mathbb{A}$ che con $\mathcal{C}(\mathbb{A})$, ovvero se:
$\forall\, \varepsilon > 0 : \mathfrak{I}(x_0, \varepsilon) \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$ **e** $\mathfrak{I}(x_0, \varepsilon) \cap \mathcal{C}(\mathbb{A}) \neq \emptyset$.
E' facile vedere come ogni punto isolato per $\mathbb{A}$ risulti anche un punto di frontiera per $\mathbb{A}$, e che di frontiera risulta anche ogni punto di accumulazione per $\mathbb{A}$ che non appartenga ad $\mathbb{A}$.

Esempio 42 : Per quanto visto prima, tutti i punti dell'insieme $\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ed anche il punto $x_0 = 0$ risultano punti di frontiera di $\mathbb{A}$.

CLASSIFICAZIONE TOPOLOGICA DEGLI INSIEMI
Usando le definizioni topologiche date per i punti, definiamo ora alcuni tipi particolari di insiemi, classificandoli in base alla natura topologica dei punti che li costituiscono.
Definizione 47 : Chiamasi Interno (o Apertura) di un insieme $\mathbb{A}$, e si indica con $\mathring{\mathbb{A}}$, l'insieme costituito da tutti i punti interni ad $\mathbb{A}$.
Definizione 48 : Chiamasi Derivato di $\mathbb{A}$, e si indica con $\mathcal{D}\mathbb{A}$, l'insieme costituito da tutti i punti di accumulazione di $\mathbb{A}$.
Definizione 49 : Chiamasi Frontiera di un insieme $\mathbb{A}$, e si indica con $\delta\mathbb{A}$, l'insieme costituito da tutti i punti di frontiera di $\mathbb{A}$.
Dalla definizione 46 discende subito il
Teorema 1 : Si ha che $\delta\mathbb{A} = \delta(\mathcal{C}(\mathbb{A}))$.
Ovvero un insieme ed il suo complementare hanno la stessa frontiera.
Definizione 50 : Chiamasi Chiusura di un insieme $\mathbb{A}$, e si indica con $\overline{\mathbb{A}}$, l'insieme costituito dai punti di $\mathbb{A}$ e dai punti che risultano di accumulazione per $\mathbb{A}$: $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \mathcal{D}\mathbb{A}$.
In base alle definizioni date, risulta evidente che: $\mathring{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \overline{\mathbb{A}}$.
Vale anche il seguente:
Teorema 2 : Si ha che: $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \mathcal{D}\mathbb{A} = \mathbb{A} \cup \delta\mathbb{A}$.

Esempio 43 : In base all'esempio 38, avremo che $\mathcal{D}\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} = \{0\}$.
Il punto $x_0 = 0$ è infatti l'unico punto di accumulazione per l'insieme $\mathbb{A} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Quindi $\overline{\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.
Per l'intervallo $\mathbb{A} = [a, b]$ si ha che $\mathcal{D}\mathbb{A} = \mathbb{A} = [a, b]$.
Per l'intervallo $\mathbb{A} =]a, b[$ si ha che $\mathbb{A} \subset \mathcal{D}\mathbb{A} = [a, b]$.
Quindi $\overline{[a, b]} = \overline{]a, b[} = [a, b]$.

INSIEMI APERTI

Definizione 51 : Un insieme $\mathbb{A}$ si dice aperto se risulta $\mathbb{A} = \mathring{\mathbb{A}}$, ovvero se tutti i suoi punti sono interni ad $\mathbb{A}$.
Teorema 3 : L'insieme $\mathbb{A}$ è aperto se e solo se $\mathbb{A} \cap \delta\mathbb{A} = \emptyset$.
Valgono poi le seguenti proprietà:
A1) L'unione di insiemi aperti, anche in numero infinito, è un insieme aperto.
A2) L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.
L'intersezione di un numero infinito di aperti potrebbe essere un aperto come potrebbe anche non esserlo.
L'intervallo $\mathbb{A} =]a, b[$, ovvero l'intervallo aperto, rappresenta l'esempio più semplice di insieme aperto. Non può invece risultare aperto un insieme costitutito da un solo punto o da un numero finito di punti. Facendo l'unione di un numero qualunque di intervalli aperti si ottiene sempre un insieme aperto.
Occorre infine dare un'avvertenza circa la notazione usata per rappresentare l'interno di un insieme. La scrittura $\mathring{\mathbb{A}}$ diviene ambigua, a causa della piccolezza del simbolo $\circ$, quando l'insieme di cui si parla non è indicato con una sola lettera ma con una scrittura più lunga; si usa allora una linea orizzontale sovrastante l'insieme per rappresentare il campo d'applicazione del simbolo $\circ$, e tale linea non deve essere confusa con il simbolo di chiusura. Ad esempio, con la scrittura $\overset{\circ}{\overline{(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})}}$ si indica l'interno di $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ e non l'interno della chiusura di $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, e tale notazione non è comunque ambigua, in quanto $\mathring{\mathbb{A}} = \overset{\circ}{\overline{\mathbb{A}}}$.

INSIEMI CHIUSI

Definizione 52 : Un insieme $\mathbb{A}$ si dice chiuso se $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}}$, ovvero se l'insieme coincide con la propria chiusura.
Un insieme è chiuso, quindi, se gli appartengono tutti i punti che sono per esso di accumulazione oppure tutti i punti che sono per esso di frontiera.
Valgono poi le seguenti proprietà:
C1) L'intersezione di insiemi chiusi, anche in numero infinito, è un insieme chiuso.
C2) L'unione di insiemi chiusi, purchè in numero finito, è un insieme chiuso.
L'unione di un numero infinito di chiusi potrebbe essere un chiuso come potrebbe anche non esserlo.
L'intervallo $\mathbb{A} = [a, b]$, ovvero l'intervallo chiuso, rappresenta l'esempio più semplice di insieme chiuso. Anche $\mathbb{A} = \{x_0\}$, l'insieme formato da un solo punto, è un insieme chiuso.
Dalle proprietà precedenti segue che $\mathbb{A} = [a, b] \cup \{x_0\}$ è un insieme chiuso, e quindi anche l'unione di un numero finito di intervalli chiusi e di un numero finito di punti è un insieme chiuso.

In $\mathbb{R}$, dotato della distanza Euclidea, l'intero spazio $\mathbb{R}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$ sono gli unici due insiemi contemporaneamente aperti e chiusi.

Esempio 44 : Dato l'insieme $\mathbb{A} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$, determiniamo la natura dell'insieme $\mathbb{A}$, nonchè $\mathring{\mathbb{A}}$, $\mathcal{D}\mathbb{A}$, $\delta\mathbb{A}$ e $\overline{\mathbb{A}}$.
L'insieme $\mathbb{A}$ è formato da punti tutti isolati, quindi $\mathring{\mathbb{A}} = \emptyset$. Quindi $\mathbb{A}$ non è aperto; ha 0 come unico punto d'accumulazione, ma $0 \notin \mathbb{A}$, e quindi $\mathbb{A}$ non è chiuso.
Da quanto detto segue infine che: $\mathcal{D}\mathbb{A} = \{0\}$; $\delta\mathbb{A} = \mathbb{A} \cup \{0\} = \overline{\mathbb{A}}$.

IL TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS
Vale il seguente:
Teorema 4 (di Bolzano-Weierstrass) : un insieme $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ limitato e infinito (cioè costituito da infiniti punti) possiede almeno un punto di accumulazione.
Dimostrazione : Essendo $\mathbb{A}$ limitato esistono, finiti, Inf($\mathbb{A}$) e Sup($\mathbb{A}$). Posto $\text{Inf}(\mathbb{A}) = a$ e $\text{Sup}(\mathbb{A}) = b$, segue che $\mathbb{A} \subset [a, b]$. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due parti, usando il suo punto medio $\frac{a+b}{2}$. Dato che i punti di $\mathbb{A}$ sono infiniti, in una almeno di queste due metà dovranno esserci infiniti punti. Sia essa $\left[a_1, b_1\right]$. Dividiamo ora l'intervallo $\left[a_1, b_1\right]$ in due parti, usando il suo punto medio $\frac{a_1 + b_1}{2}$. Ancora, in una delle due metà dovranno cadere infiniti punti; sia essa $\left[a_2, b_2\right]$. Possiamo ripetere quante volte vogliamo questa procedura, prendendo sempre quella metà dell'intervallo in cui cadono infiniti punti. Otterremo due sequenze di punti: $\text{I} = \{a, a_1, ..., a_n, ...\}$ ed $\text{S} = \{b, b_1, ..., b_n, ...\}$, per le quali, per costruzione:
$a \leq a_1 \leq ... \leq a_n ... \leq ... b_n \leq ... \leq b_1 \leq b$.
Consideriamo Sup(I) e Inf(S), che per quanto detto esistono e sono finiti.
Vista la procedura di costruzione degli intervalli $\left[a_i, b_i\right]$, avremo che:
$\text{Inf(S)} - \text{Sup(I)} \leq \frac{b-a}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$, e da questo ne segue che $\text{Inf(S)} = \text{Sup(I)}$.
Poniamo $\text{Inf(S)} = \text{Sup(I)} = x_0$.
Vediamo che x_0 è il punto di accumulazione cercato: infatti, per la costruzione fatta, in ogni suo intorno, sulla destra e/o sulla sinistra, cadono infiniti punti di $\mathbb{A}$. ●

FUNZIONI ELEMENTARI

Le funzioni elementari costituiscono gli elementi di base per la costruzione delle funzioni reali di variabile reale, che saranno esprimibili operando mediante le operazioni algebriche e la composizione di funzione sulle funzioni elementari stesse.
Solitamente vengono catalogate tra le funzioni elementari le seguenti:
- le funzioni polinomiali e le funzioni razionali fratte;
- le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche;
- le funzioni potenza;
- le funzioni circolari o trigonometriche;
- la funzione valore assoluto e la funzione parte intera.

Iniziamo ricordando alcune importanti definizioni che verranno usate nel seguito.

FUNZIONI PARI O DISPARI
Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x)$.
La funzione si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$.

Le funzioni pari hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
La funzione si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)$.
Le funzioni dispari hanno il grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi.

FUNZIONI MONOTONE
Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x)$, e sia $D \subset D_f$.
Si consideri, $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$, il cosiddetto rapporto incrementale, cioè il rapporto tra l'incremento delle ordinate $\triangle f = f(x_1) - f(x_2)$ e quello delle ascisse $\triangle x = x_1 - x_2$:
$\dfrac{\triangle f}{\triangle x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.
Diremo allora che $f(x)$ nell'insieme D è:

$$\begin{cases} \text{strettamente crescente} & \text{se } \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \\ \text{crescente (non decrescente)} & \text{se } \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \\ \text{strettamente decrescente} & \text{se } \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \\ \text{decrescente (non crescente)} & \text{se } \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \end{cases}, \quad \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 .$$

Le funzioni crescenti o decrescenti (strettamente e non) vengono dette **monotòne**.

Iniziamo ora la descrizione delle funzioni elementari.

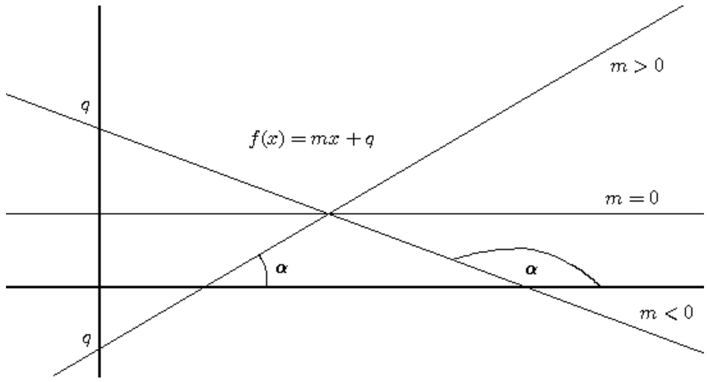
FUNZIONI POLINOMIALI

Si definisce polinomio di grado n una espressione del tipo:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $x \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.
Il grado di un polinomio è dato dall'esponente massimo presente nell'espressione.
Diremo **funzione polinomiale** una funzione esprimibile come:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
Sono casi degni di particolare nota quelli delle funzioni polinomiali di primo grado, che hanno per grafico una retta, e quelle di secondo grado, che hanno per grafico una parabola. Come caso particolare, se il grado del polinomio è pari a zero, si ha la funzione costante $f(x) = a_0$.

FUNZIONI POLINOMIALI DI PRIMO GRADO : **LE RETTE**
Consideriamo le funzioni polinomiali di primo grado $f(x) = a_1 x + a_0 = mx + q$.
Il grafico di una tale funzione è sempre costituito da una retta.
Il coefficiente m viene detto **coefficiente angolare**, ed è dato dalla tangente trigonometrica dell'angolo α che la retta forma con la parte positiva dell'asse delle ascisse: $m = \text{tg}\,\alpha$.
Il coefficiente q viene detto **aggiunta all'origine**.
Se $m = 0$ otteniamo una funzione costante.
Se $q = 0$ otteniamo una retta passante per l'origine.
Le funzioni $f(x) = mx$ esprimono la legge della **proporzionalità diretta**.
Se $m > 0$ la funzione è strettamente crescente, se $m < 0$ è strettamente decrescente.
Due rette risultano **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare:
$y = mx + q_1$ e $y = mx + q_2$.
Due rette risultano **perpendicolari** se hanno coefficienti angolari che sono uno l'opposto del reciproco dell'altro:

$y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$, con $m_1 \cdot m_2 = -1$, da cui $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

La figura seguente illustra l'andamento delle rette al variare di m.



L'equazione di una generica **retta passante per un punto** (x_0, y_0) è data da:

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$,

restando da determinare poi il coefficiente angolare m, dato che per il punto (x_0, y_0) passano infinite rette.

L'equazione dell'unica **retta passante per due punti**, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è data da:

$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$,

da cui otteniamo: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) = m\,(x - x_1)$.

Come si vede il suo coefficiente angolare è dato da $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

L'**equazione** : $mx + q = 0$ ha una sola soluzione, data da $x = -\dfrac{q}{m}$.

La **disequazione** $mx + q > 0$ è risolta per : $\begin{cases} x > -\dfrac{q}{m} & \text{se } m > 0 \\ x < -\dfrac{q}{m} & \text{se } m < 0 \end{cases}$.

FUNZIONI POLINOMIALI DI SECONDO GRADO : **LE PARABOLE**

Chiamasi **parabola** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice.

Ogni funzione polinomiale di secondo grado $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ha per grafico una parabola. Viene detto **discriminante** il valore $\triangle = b^2 - 4\,ac$.

Il punto di coordinate $\left(\dfrac{-\,\mathrm{b}}{2a}; \dfrac{-\triangle}{4a}\right)$ è detto **vertice** della parabola.

Se $\begin{cases} a > 0 & \text{la parabola è } \textbf{convessa} \text{ (rivolta verso l'alto)} \\ a < 0 & \text{la parabola è } \textbf{concava} \text{ (rivolta verso il basso)} \end{cases}$.

Se $\begin{cases} \triangle > 0 & \text{la parabola taglia due volte l'asse delle ascisse} \\ \triangle = 0 & \text{la parabola è tangente all'asse delle ascisse nel vertice .} \\ \triangle < 0 & \text{la parabola non taglia l'asse delle ascisse} \end{cases}$

La retta di equazione $x = \dfrac{-\,b}{2a}$ è un **asse verticale** di simmetria per il grafico.

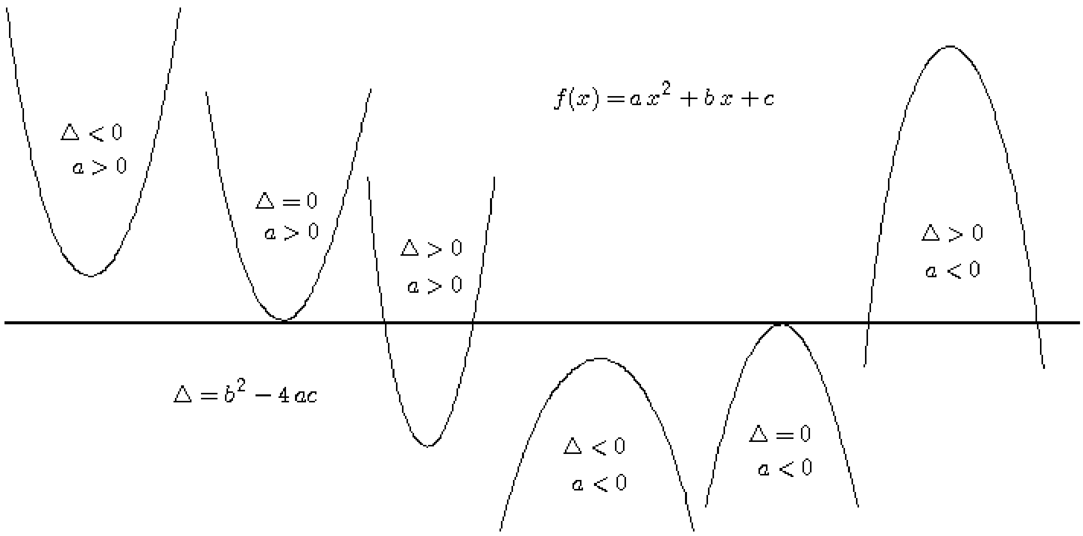
Per l'**equazione** polinomiale di II^ grado: $ax^2 + bx + c = 0$, vale la formula risolutiva:

$x = \dfrac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, che fornisce le due radici $x_1 = \dfrac{-\,b - \sqrt{\triangle}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-\,b + \sqrt{\triangle}}{2a}$,

dove $\triangle = b^2 - 4\,ac$ è il discriminante dell'equazione.

Se $\begin{cases} \triangle > 0 & \text{l'equazione ha due soluzioni reali distinte} \\ \triangle = 0 & \text{l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti (o una soluzione reale doppia)} \\ \triangle < 0 & \text{l'equazione non ha soluzioni reali (ha due soluzioni complesse coniugate)} \end{cases}$.

Nella figura seguente si possono vedere i possibili grafici delle parabole al variare di a e di $\triangle$.



La **disequazione** $ax^2 + bx + c > 0$ è risolta:
-per $\{x : x < x_1\} \bigcup \{x : x > x_2\}$, se $a > 0$ e $\triangle > 0$;
-per ogni valore della x eccetto $x = \dfrac{-b}{2a}$ se $a > 0$ e $\triangle = 0$;
-per ogni valore della x se $a > 0$ e $\triangle < 0$;
-per $x_1 < x < x_2$, se $a < 0$ e $\triangle > 0$;
-per nessun valore della x se $a < 0$ e $\triangle \leq 0$.

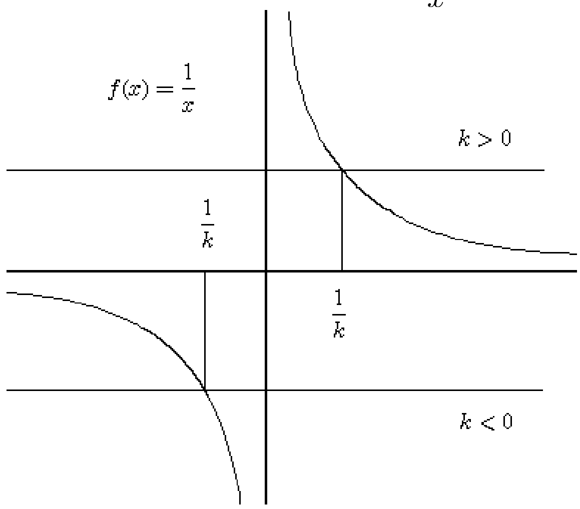
FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Si dicono **funzioni razionali fratte** le funzioni espresse come quoziente di due polinomi:
$f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)}$.
Sono definite in tutto $\mathbb{R}$, tolti quei valori della variabile indipendente x che annullano il denominatore; deve infatti essere $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 \neq 0$.
Un caso semplice e importante di funzione razionale fratta è rappresentato dalle funzioni cosiddette **omografiche**, espresse come quozienti di polinomi di I^ grado: $f(x) = \dfrac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0}$, le quali hanno per grafico una **iperbole**; la più semplice tra di esse è la $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Le funzioni del tipo $y = \dfrac{k}{x}$, ovvero $x\,y = k,\, k \in \mathbb{R}^*$, esprimono la legge della **proporzionalità inversa**.

FUNZIONE RECIPROCO : L'IPERBOLE

La funzione **reciproco** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ associa ad ogni numero reale $x \neq 0$ il suo reciproco.
La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ha un codominio illimitato, è decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$ e per asintoto orizzontale la retta $y = 0$.

Il suo grafico rappresenta un caso particolarmente semplice di **iperbole** equilatera, avente per assi gli assi coordinati. Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è illustrato nella figura seguente:



L'**equazione** $\frac{1}{x} = 0$ non ha soluzioni, l'equazione $\frac{1}{x} = k$ ha soluzione $x = \frac{1}{k}$.
La **disequazione** $\frac{1}{x} > 0$ è risolta per $x > 0$,
la disequazione $\frac{1}{x} > k$ è risolta per $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{k} & \text{se } k > 0 \\ \left\{x : -\infty < x < \frac{1}{k}\right\} \cup \{x : x > 0\} & \text{se } k < 0 \end{cases}$.

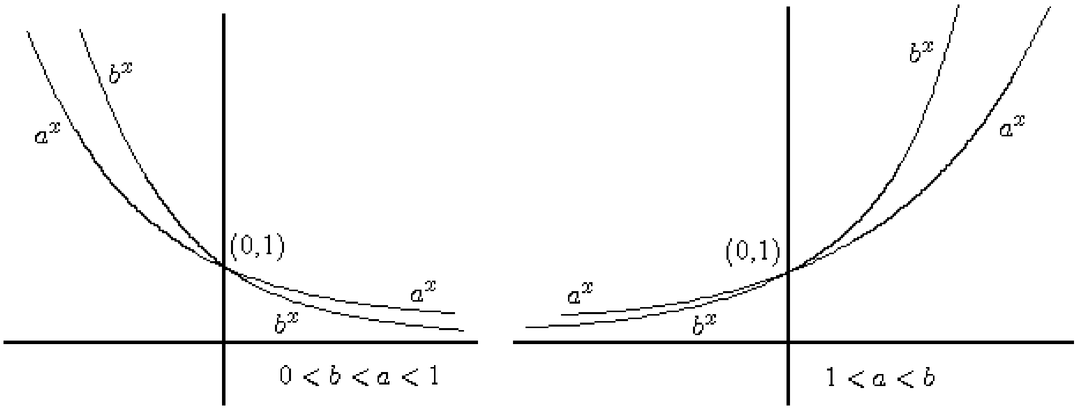
FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

ESPONENZIALI E LOGARITMI
Siano x, y ed a numeri reali, con $y > 0, a > 0, a \neq 1$.
L'uguaglianza in forma esponenziale $y = a^x$ può essere scritta anche come $x = \log_a y$, ovvero in forma logaritmica. Ad esempio, essendo $2^3 = 8$, sarà anche $3 = \log_2 8$.
Nell'espressione a^x, il valore a è detto **base**, il valore x è detto **esponente**.
Nell'espressione $\log_a x$, il valore a è detto **base** del logaritmo, il valore x è detto **argomento** del logaritmo.
Dalle $\begin{cases} y = a^x \\ x = \log_a y \end{cases}$, sostituendo, otteniamo altre due uguaglianze: $\begin{cases} x = \log_a y = \log_a a^x \\ y = a^x = a^{\log_a y} \end{cases}$.
La prima rappresenta un modo rapido di calcolare i logaritmi, allorquando l'argomento risulta esprimibile come una potenza della base: $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.
La seconda permette invece di scrivere un qualunque numero $y > 0$ come una potenza avente per base un qualunque altro numero $a > 0, a \neq 1$: ad esempio, $8 = 2^{\log_2 8}$.
Di questa seconda uguaglianza sono particolarmente usate le trasformazioni in base e (numero di Nepero: vedere i limiti notevoli) sia di numeri positivi che di funzioni:
$$\begin{cases} \text{se } a > 0 \text{ allora} & a = e^{\log_e a} = e^{\log a} \\ \text{se } f(x) > 0 \text{ allora} & f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \log f(x)} \end{cases}.$$

FUNZIONI ESPONENZIALI
Le funzioni esponenziali sono le funzioni elementari ottenute assegnando alla variabile indipendente il ruolo di esponente di una base a costante e positiva. Affinchè l'esponente possa

assumere ogni valore reale si impone la restrizione $a > 0$. Non esistono quindi funzioni esponenziali con base $a \le 0$.
Scrivemo allora $y = f(x) = a^x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$ per indicare una generica funzione esponenziale.
Le caratteristiche e le proprietà delle funzioni esponenziali variano a seconda della base a, a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.
La funzione esponenziale in base $a = 1$ non viene trattata, in quanto si riduce ad una funzione costante, dato che $1^x = 1, \forall x$.

FUNZIONI ESPONENZIALI CON BASE $a > 1$
Dato $a > 1$, consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = a^x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
La funzione esponenziale con base maggiore di uno è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente dallo 0, è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, ha per asintoto orizzontale sulla sinistra la retta $y = 0$.
La figura di destra mostra i grafici di due funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, con $1 < a < b$.



FUNZIONI ESPONENZIALI CON BASE $0 < a < 1$
Dato $0 < a < 1$, consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = a^x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
La funzione esponenziale con base minore di uno è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente dallo 0, è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$, ha per asintoto orizzontale sulla destra la retta $y = 0$.
La figura di sinistra mostra il grafico di due funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, con $0 < b < a < 1$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI
L'**equazione** esponenziale $a^x = k$ ha l'unica soluzione $x = \log_a k$, purchè sia $k > 0$.
Se $k \le 0$ l'equazione esponenziale $a^x = k$ non ha soluzioni.
Per quanto riguarda le **disequazioni** esponenziali, valgono le seguenti:
se $a > 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, per cui la disequazione $a^x > k$:
$$\begin{cases} \text{è risolta per } x > \log_a k & \text{se } k > 0 \\ \text{è sempre soddisfatta} & \text{se } k \le 0 \end{cases}$$
se $0 < a < 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, per cui la disequazione $a^x > k$:
$$\begin{cases} \text{è risolta per } x < \log_a k & \text{se } k > 0 \\ \text{è sempre soddisfatta} & \text{se } k \le 0 \end{cases}.$$
Valgono poi le seguenti ulteriori proprietà:
$$\text{se } 1 < a < b : \begin{cases} b^x > a^x & \text{per } x > 0 \\ b^x < a^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

se $0 < b < a < 1$: $\begin{cases} b^x > a^x & \text{per } x < 0 \\ b^x < a^x & \text{per } x > 0 \end{cases}$.

PROPRIETA' DEI LOGARITMI
Siano x e y numeri reali positivi: $x > 0$ e $y > 0$, sia $a > 0, a \neq 1$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.
Valgono allora le seguenti proprietà:
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$: il **logaritmo di un prodotto** è uguale alla somma dei logaritmi;
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$: il **logaritmo di un quoziente** è uguale alla differenza dei logaritmi;
$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$: il **logaritmo di una potenza** è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.
Non si confonda $\log_a x^k = \log_a \left(x^k\right) = k \cdot \log_a x$ con $\log_a^k x = (\log_a x)^k$.
A quest'ultima espressione non è applicabile alcuna proprietà.

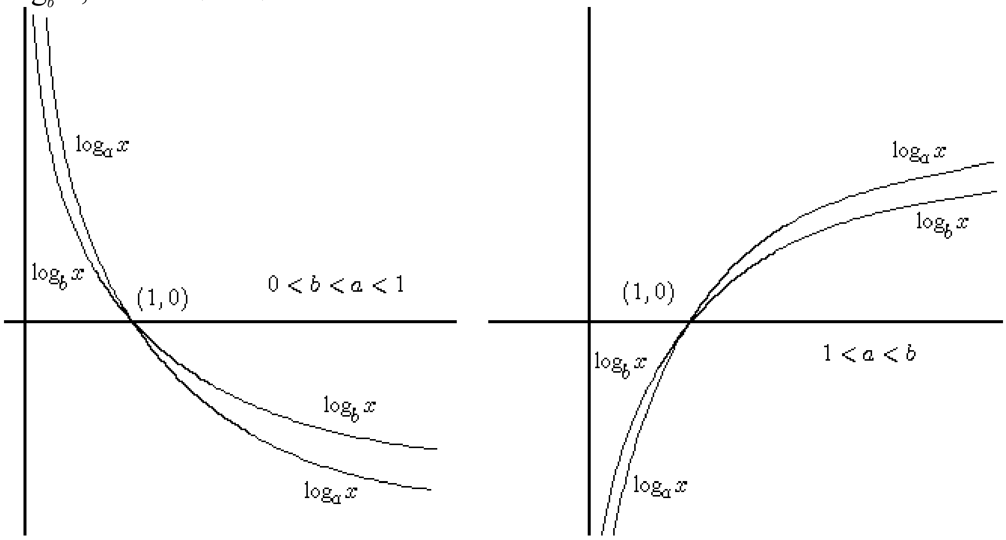
Valgono infine le seguenti ulteriori proprietà:
siano x, y, a e b numeri reali: $x > 0$ e $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$
cambio di base in un logaritmo : $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$, da cui: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$;
reciproco di un logaritmo : $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;
logaritmo del reciproco : $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

FUNZIONI LOGARITMICHE
Le funzioni logaritmiche sono le funzioni elementari ottenute assegnando alla variabile indipendente x il ruolo di argomento di un logaritmo. L'argomento della funzione logaritmica, essendo questa l'inversa della funzione esponenziale, può assumere solo valori reali strettamente positivi.
Scrivemo allora $y = f(x) = \log_a x, \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ per indicare una generica funzione logaritmica.
Le caratteristiche e le proprietà delle funzioni logaritmiche variano a seconda che la base a sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.
Non esiste funzione logaritmica in base $a = 1$; non hanno senso funzioni logaritmiche in base $a \leq 0$.

FUNZIONI LOGARITMICHE CON BASE $a > 1$
Dato $a > 1$, consideriamo la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x, \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
La funzione logaritmica con base maggiore di uno è definita $\forall x > 0$, ha un codominio che risulta illimitato sia superiormente che inferiormente, è strettamente crescente $\forall x > 0$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$.

FUNZIONI LOGARITMICHE CON BASE $0 < a < 1$
Dato $0 < a < 1$, consideriamo la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x, \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
La funzione logaritmica con base minore di uno è definita $\forall x > 0$, ha un codominio che risulta illimitato sia superiormente che inferiormente, è strettamente decrescente $\forall x > 0$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$.
La figura di sinistra rappresenta il grafico di due funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$, con $0 < b < a < 1$.

La figura di destra rappresenta il grafico di due funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$, con $1 < a < b$.



EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

L'**equazione** logaritmica $\log_a x = k$ ha sempre l'unica soluzione $x = a^k$, qualunque sia il valore $k \in \mathbb{R}$. L'equazione logaritmica $\log_a x = 0$ ha l'unica soluzione $x = 1$, qualunque sia il valore a.

Per quanto riguarda le **disequazioni** logaritmiche, valgono le seguenti:

se $a > 1, x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, per cui la disequazione $\log_a x > k$:
è risolta per $x > a^k$, qualunque sia il valore k;

se $0 < a < 1, x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, per cui la disequazione $\log_a x > k$:
è risolta per $0 < x < a^k$, qualunque sia il valore k.

Valgono poi le seguenti ulteriori proprietà:

se $1 < a < b$: $\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{per } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$

se $0 < b < a < 1$: $\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{per } 0 < x < 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{per } x > 1 \end{cases}$.

FUNZIONI POTENZA

Le funzioni potenza sono le funzioni elementari ottenute assegnando alla variabile indipendente il ruolo di base di una potenza ad esponente costante, diversamente dalle funzioni esponenziali nelle quali è variabile l'esponente mentre è la base ad essere costante.

POTENZE AD ESPONENTE NATURALE, INTERO E RAZIONALE

Presi $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si definisce la **potenza ad esponente naturale** x^n come il prodotto del numero x per sè stesso n volte: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$.

Preso $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $z \in \mathbb{Z}_-$, posto $z = -n, n \in \mathbb{N}$, si definisce la **potenza ad esponente intero** (negativo) x^z come: $x^z = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Preso $n \in \mathbb{N}^*$ si definisce la **potenza ad esponente razionale** $x^{\frac{1}{n}}$ come $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Tale definizione è valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se n è un numero dispari: $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$.
Se n invece è un numero pari, $n = 2m, m \in \mathbb{N}$, la definizione vale solo per $x \geq 0$.

Sia ora $q \in \mathbb{Q}, q = \dfrac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$, e siano m e n primi tra loro, ovvero privi di sottomultipli comuni.
Preso $q \in \mathbb{Q}_+$, si definisce la **potenza ad esponente razionale** $x^{\frac{m}{n}}$ come $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.
Tale definizione è valida $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}$, se n è un numero dispari: $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.
Se n invece è un numero pari, $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, la definizione vale solo per $x \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}$, con m numero dispari, dato che $q = \dfrac{m}{n}$ è stata ridotta ai minimi termini.
Per quanto detto in precedenza, è bene prestare attenzione ad espressioni quali, ad esempio, $x^{\frac{6}{4}}$. L'esponente $\dfrac{6}{4}$ non è una frazione ridotta ai minimi termini. E' vero che $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, ma non è vero che $x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{3}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$.
Questa uguaglianza è valida solo per $x \geq 0$, mentre per $x < 0$ esiste $x^{\frac{6}{4}}$ ma non esiste $x^{\frac{3}{2}}$.
Una volta garantita l'esistenza di $x^{\frac{m}{n}}$, si ha che $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$.
E vale anche l'uguaglianza, per $x \neq 0$: $x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$.

PROPRIETA' DELLE POTENZE
Se $x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ m, n \in \mathbb{Z}$, valgono le seguenti proprietà :

$$\begin{cases} x^m \cdot x^n = x^{m+n} \\ \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \\ (x^m)^n = x^{m\,n} \end{cases} \quad \text{e le} \quad \begin{cases} x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \\ \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n \end{cases} .$$

Ricordiamo infine che $x^0 = 1, \forall x \neq 0$ (0^0 non è definito !).
Tali proprietà valgono anche per $m, n \in \mathbb{Q}$, però con la limitazione $x \geq 0$ o $x > 0$, per i motivi esposti in precedenza.

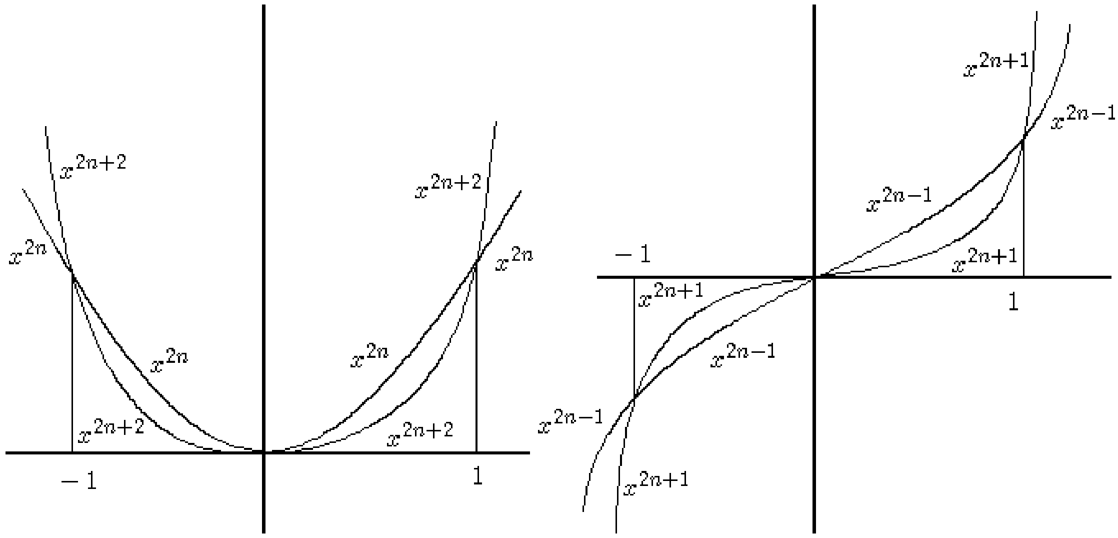
Esempio 45 : La potenza $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ è definita solamente per $x \geq 0$, e per tali valori risulta $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$, mentre $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, e risulta $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|x^{\frac{1}{3}}\right|$ (Valore Assoluto di $x^{\frac{1}{3}}$). Non è quindi vero, in generale, che $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$.

FUNZIONI POTENZA
Le funzioni potenza sono quelle funzioni elementari nelle quali la variabile indipendente compare come base di una potenza con esponente reale assegnato $\alpha : f(x) = x^\alpha$. Il campo d'esistenza di una funzione potenza varia a seconda che l'esponente α sia un numero naturale, un intero, un razionale o un reale.
Avremo infatti che:
se $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, f(x) = x^\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$;
se $\alpha \in \mathbb{Z}_-, f(x) = x^\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
mentre, dati m e n primi tra loro, ovvero $\dfrac{m}{n}$ frazione irriducibile:
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \dfrac{m}{n} > 0$, con n dispari, $f(x) = x^\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$,
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \dfrac{m}{n} > 0$, con n pari, $f(x) = x^\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}_+$, cioè per $x \geq 0$;
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \dfrac{m}{n} < 0$, con n dispari, $f(x) = x^\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \dfrac{m}{n} < 0$, con n pari, $f(x) = x^\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, cioè per $x > 0$.

Le funzioni potenza $f(x) = x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ovvero con α numero irrazionale, sono definite per $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, e sono definite per $x > 0$ se $\alpha < 0$.

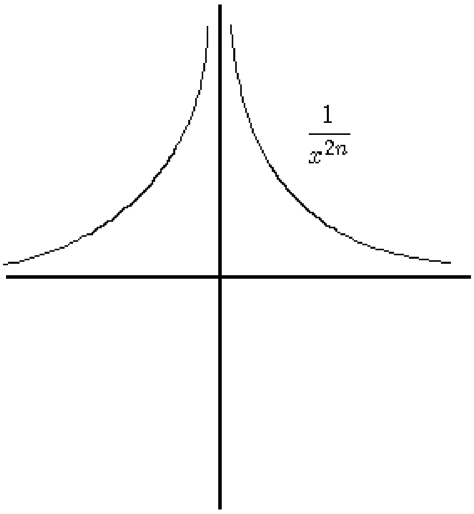
FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE NATURALE

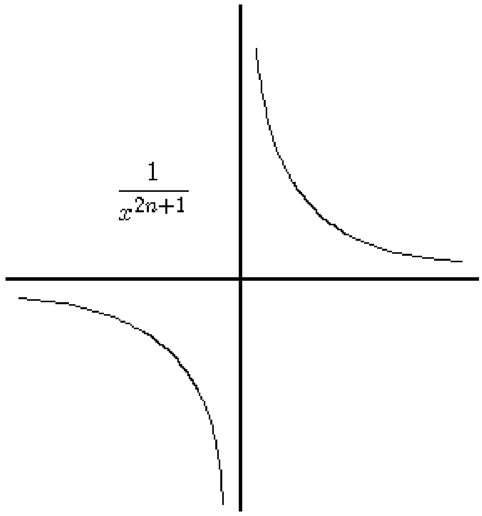
Le funzioni potenza ad esponente naturale $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}^*$, vanno scisse in due gruppi: quelle per cui $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}^*$, ovvero con α numero pari, e quelle per cui $\alpha = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero con α numero dispari.
La funzione potenza ad esponente pari $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$, è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, è una funzione pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente in quanto $x^{2n} \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$; è strettamente crescente $\forall x > 0$, strettamente decrescente $\forall x < 0$.
La funzione potenza ad esponente dispari $f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$, è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, è una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi; ha un codominio illimitato sia superiormente che inferiormente; è strettamente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$.



FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE INTERO NEGATIVO

Le funzioni potenza ad esponente intero negativo $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Z}$, vanno scisse in due gruppi: quelle per cui $\alpha = -2n, n \in \mathbb{N}^*$, ovvero α è l'opposto di un numero pari, e quelle per cui $\alpha = -(2n+1), n \in \mathbb{N}$, ovvero α è l'opposto di un numero dispari.
La funzione potenza $f(x) = x^{-2n}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; è una funzione pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente, in quanto $x^{-2n} > 0 \, \forall x$; ha per asintoto verticale la retta $x = 0$, ha per asintoto orizzontale la retta $y = 0$; è crescente in $\mathbb{R}_{-}$, decrescente in $\mathbb{R}_{+}$.
La funzione potenza $f(x) = x^{-(2n+1)}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; è una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e inferiormente; ha per asintoto verticale la retta $x = 0$, ha per asintoto orizzontale la retta $y = 0$; è decrescente in $\mathbb{R}_{-}$, decrescente in $\mathbb{R}_{+}$.





FUNZIONI RADICE

Vengono dette funzioni radice le funzioni $f(x) = x^\alpha, \alpha = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, da cui $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Le funzioni radice sono le funzioni inverse delle funzioni potenza ad esponente naturale.

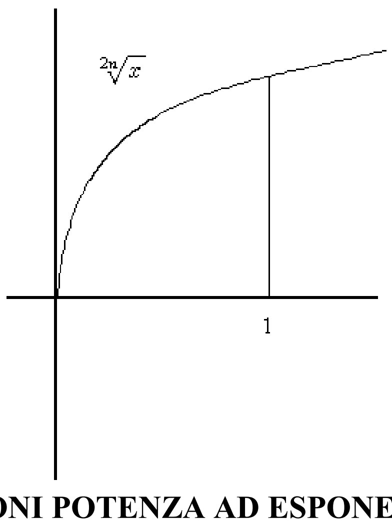
Dato che le funzioni potenza ad esponente pari $f(x) = x^{2n}$, al contrario di quelle ad esponente dispari $f(x) = x^{2n+1}$, non sono funzioni iniettive su $\mathbb{R}$, avremo:

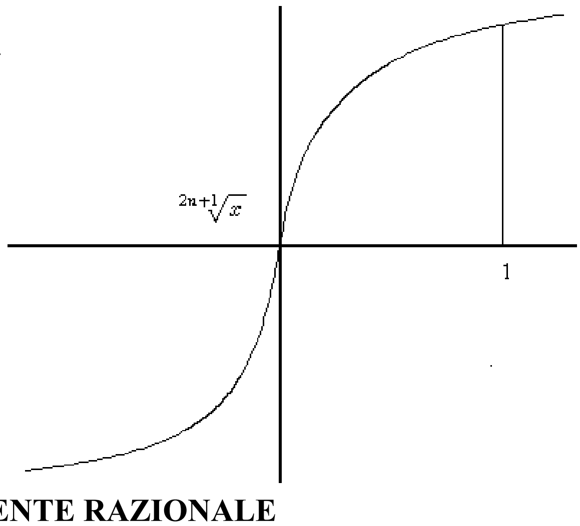
$x \to x^{2n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ per cui l'inversa è: $x \to \sqrt[2n]{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x \to x^{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui l'inversa è: $x \to \sqrt[2n+1]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La funzione radice ad indice pari $f(x) = \sqrt[2n]{x}, n \in \mathbb{N}$, è definita $\forall\, x \geq 0$; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente in quanto $\sqrt[2n]{x} \geq 0, \forall\, x \geq 0$; è strettamente crescente $\forall\, x \geq 0$.

La funzione radice ad indice dispari $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}, n \in \mathbb{N}$, è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, è una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e inferiormente; è strettamente crescente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.





FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE RAZIONALE

Le funzioni potenza ad esponente razionale $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \dfrac{m}{n}$, hanno un grafico il cui andamento è riconducibile a quelli esposti nei casi precedentemente descritti. Supposto che $\dfrac{m}{n}$ sia una frazione irriducibile, occorre distinguere vari casi, vedendo se l'esponente $\dfrac{m}{n}$ è positivo o negativo, se in quantità è maggiore o minore di 1, se m e n sono ambedue dispari oppure uno pari ed uno dispari.

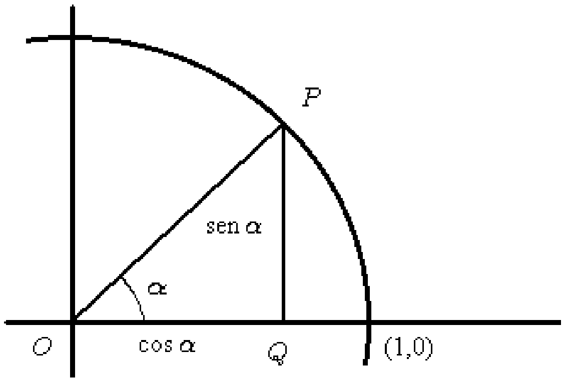
FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE
Le funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ovvero con α numero irrazionale, sono definite per $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, e sono definite per $x > 0$ se $\alpha < 0$. I loro grafici hanno un andamento riconducibile a quelli esposti nei casi precedentemente descritti; anche ora si tratta di distinguere a seconda che l'esponente α sia positivo o negativo, e se, in quantità, maggiore o minore di 1.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE O CIRCOLARI

MISURA DEGLI ANGOLI IN RADIANTI
Dato un angolo, la cui misura in gradi sessagesimali sia $\alpha°$, esso risulta individuato da due semirette aventi un punto in comune O. Scelto un punto qualunque sulla prima semiretta, A, si tracci, internamente all'angolo dato, l'arco di circonferenza di centro O e raggio $\overline{OA}$, fino ad incontrare l'altra semiretta in un punto B. Si definisce misura in **radianti** dell'angolo, e si indica con α_R, il rapporto $\alpha_R = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{OA}}$ tra la lunghezza dell'arco sotteso e la misura del raggio che lo sottende.
Un angolo giro, $\alpha° = 360°$, avrà ad esempio misura in radianti pari a $\alpha_R = \dfrac{2\,\pi\, r}{r} = 2\,\pi$, mentre l'angolo di 180° avrà misura in radianti pari a $\alpha_R = \dfrac{\pi\, r}{r} = \pi$.
Vale la proporzione: $\alpha° : \alpha_R = 360° : 2\pi$, oppure $\alpha° : \alpha_R = 180° : \pi$, che permette di calcolare la misura in radianti di un angolo, nota quella in gradi, come $\alpha_R = \dfrac{\pi\, \alpha°}{180°}$, e viceversa : $\alpha° = \dfrac{180°\, \alpha_R}{\pi}$.
La misura in radianti, vista la definizione, è un numero reale compreso tra 0 e 2π.

SENO E COSENO DI UN ANGOLO
Sia dato un angolo, la cui misura in radianti sia $\alpha_R = \alpha$, e si consideri, nel piano cartesiano, la circonferenza di centro l'origine O e raggio pari a 1, di equazione $x^2 + y^2 = 1$, la cosiddetta circonferenza trigonometrica. Vediamo in che modo ogni numero reale può essere visto come la misura in radianti di un angolo.
Per ogni angolo della geometria si ha che: $0 \leq \alpha° \leq 360°$, ovvero, in radianti, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.
Iniziando dal punto $(1, 0)$ si percorra un tratto di circonferenza di lunghezza pari ad α, girando in senso antiorario, e determinando così in modo univoco un punto P.
Se $\alpha = 2\pi$ riotteniamo il punto $(1, 0)$, dopo aver percorso una volta la circonferenza. Sia l'angolo $\alpha = 0$ che l'angolo $\alpha = 2\pi$ vengono quindi a corrispondere al punto $P = (1, 0)$.
Si consideri ora di poter percorrere sulla circonferenza trigonometrica, sempre partendo da $(1, 0)$, lunghezze anche superiori a quella del singolo giro.
Percorrendo la circonferenza in senso antiorario, e facendo quanti giri occorrono, si definiscono gli angoli di misura positiva grande quanto si vuole, mentre percorrendola in senso orario si definiscono quelli di misura negativa, anche questi senza limitazione di grandezza.
Ogni numero reale, positivo o negativo, grande o piccolo, determina in questo modo un unico punto P sulla circonferenza. Angoli di misure diverse determineranno lo stesso punto P se le loro misure differiscono per un multiplo intero, positivo o negativo, di 2π.
Visto che, con la procedura sopra descritta, ad ogni numero reale corrisponde un unico punto P sulla circonferenza trigonometrica, definiamo:
il **seno** dell'angolo α come: $\quad \text{sen}\,\alpha = \text{ordinata del punto } P$

il **coseno** dell'angolo α come: $\cos\alpha =$ ascissa del punto P .



Vista la definizione, segue subito che: $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$.
Vale anche l'**identità trigonometrica** fondamentale: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, verificabile sia mediante la $x^2 + y^2 = 1$, che deve essere soddisfatta dalle coordinate di $P = (\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$, sia applicando il Teorema di Pitagora al triangolo di vertici O, P e Q.

SENO E COSENO DEGLI ANGOLI PRINCIPALI
Vediamo i valori di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ per alcuni **angoli particolari**. Risulta:

$\operatorname{sen}0 = \operatorname{sen}2\pi = 0$ $\qquad$ $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$\operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$ $\qquad$ $\cos\pi = \cos(-\pi) = -1$

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\qquad$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI ANGOLI COMPLEMENTARI
Siano dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$; valgono allora le seguenti formule, che esprimono le relazioni intercorrenti tra le funzioni circolari di due **angoli complementari**:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$

ovvero per due angoli complementari avviene lo scambio delle funzioni trigonometriche: il coseno dell'uno è uguale al seno dell'altro. Come esempio notevole abbiamo che:

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Valgono anche altre relazioni, inerenti angoli che differiscono di multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha.$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI ANGOLI SUPPLEMENTARI

Siano dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha + \beta = \pi$; valgono allora le seguenti formule, che esprimono le relazioni intercorrenti tra le funzioni circolari di due **angoli supplementari**:

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Valgono anche le seguenti relazioni, inerenti angoli che differiscono per multipli di π:

$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{sen}(2\pi + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha.$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti, dette formule di **addizione e sottrazione**:

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.$

FORMULE DI DUPLICAZIONE E BISEZIONE

Ponendo, nelle formule di addizione, $\alpha = \beta$, si ricavano le formule, dette di **duplicazione**:

$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

Dalla $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ e dalla $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ si ricavano, a meno di un cambio di segno, le seguenti formule, dette di **bisezione**:

$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$.

La scelta del segno viene fatta in base al quadrante a cui appartiene il punto che rappresenta α.

FORMULE DI PROSTAFERESI

Partendo dalle formule di addizione e sottrazione, e ponendo: $\alpha + \beta = v, \alpha - \beta = w$, si ricavano le seguenti formule, dette formule di **prostaferesi**:

$\operatorname{sen}v + \operatorname{sen}w = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{v+w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{v-w}{2}\right)$

$\operatorname{sen}v - \operatorname{sen}w = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{v-w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{v+w}{2}\right)$

$\cos v + \cos w = 2\cos\left(\dfrac{v+w}{2}\right)\cos\left(\dfrac{v-w}{2}\right)$

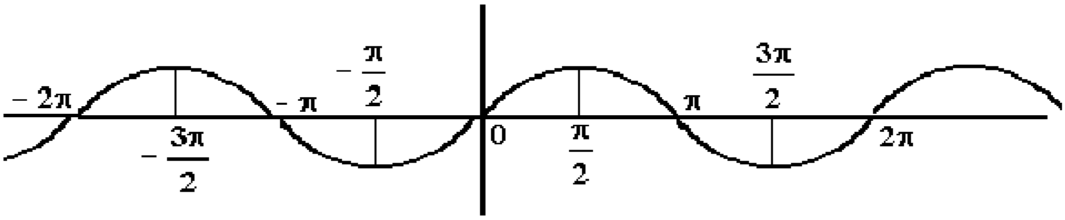
$\cos v - \cos w = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{v+w}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{v-w}{2}\right)$

FUNZIONE SENO

La **funzione seno** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore del seno dell'angolo stesso. Avremo allora: $f(x) = \operatorname{sen}x, \mathbb{R} \to [-1;1]$.

La funzione seno è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta limitato, è periodica di periodo 2π, ovvero: $\operatorname{sen}x = \operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$.

La funzione seno è una funzione dispari, ovvero $\operatorname{sen}x = -\operatorname{sen}(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

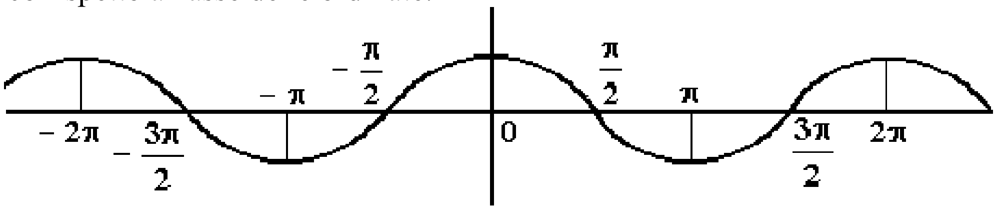


FUNZIONE COSENO

La **funzione coseno** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore del coseno dell'angolo stesso. Avremo allora: $f(x) = \cos x, \mathbb{R} \to [-1;1]$.

La funzione coseno è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta limitato, è periodica di periodo 2π, ovvero: $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$.

La funzione coseno è una funzione pari, ovvero $\cos x = \cos(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



TANGENTE E COTANGENTE DI UN ANGOLO

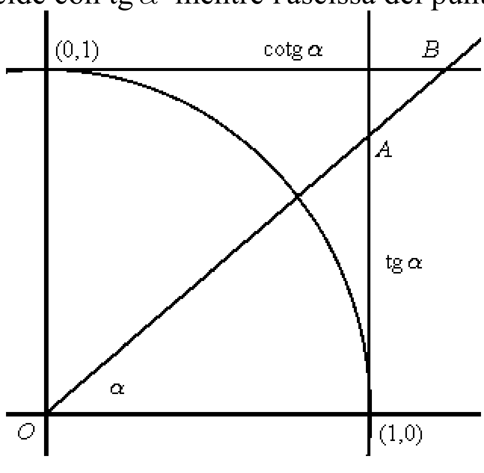
Sia dato un angolo, la cui misura in radianti sia α. Si definiscono:

la **tangente** dell'angolo α, come: $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$

la **cotangente** dell'angolo α, come: $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Avremo quindi anche che $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Della tangente e della cotangente di un angolo α si può dare una rappresentazione nel piano Cartesiano, utilizzando due nuovi assi di riferimento: per la tangente, una parallela all'asse delle ordinate passante per il punto $(1,0)$ e per la cotangente una parallela all'asse delle ascisse passante per il punto $(0,1)$.

L'ordinata del punto A coincide con $\operatorname{tg}\alpha$ mentre l'ascissa del punto B coincide con $\operatorname{cotg}\alpha$.



TANGENTE E COTANGENTE DEGLI ANGOLI PRINCIPALI

Vediamo i valori di $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{cotg}\alpha$ per alcuni angoli particolari. Sarà:

$\operatorname{tg}0 = \operatorname{tg}\pi = \operatorname{tg}2\pi = 0$ mentre $\operatorname{cotg}0$, $\operatorname{cotg}\pi$, $\operatorname{cotg}2\pi$ non esistono

$\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{3\pi}{2} = 0$ mentre $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{2}$ non esistono

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{7\pi}{4} = -1$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

FUNZIONE TANGENTE

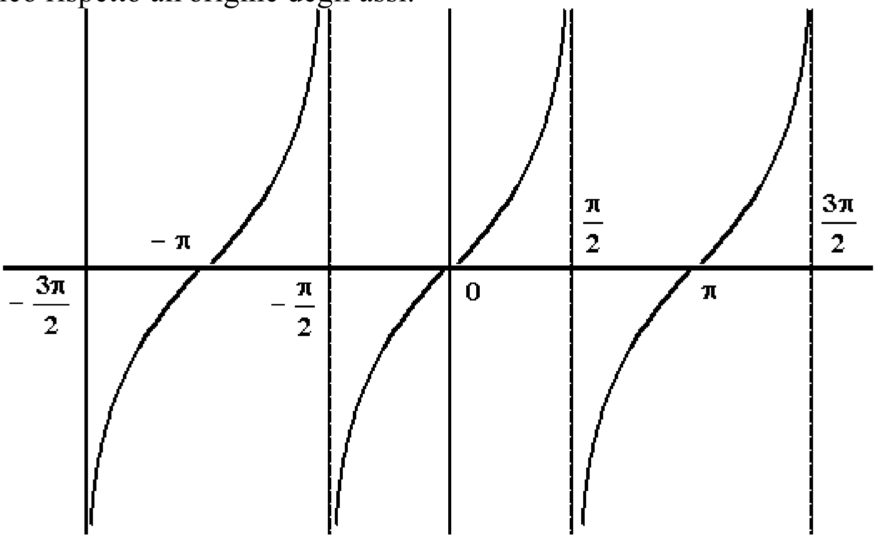
La **funzione tangente** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore della tangente dell'angolo stesso.

Sarà allora: $f(x) = \operatorname{tg} x, \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$.

La funzione tangente è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$; ha un codominio illimitato inferiormente e superiormente, è periodica di periodo π, ovvero: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\,\pi), \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

La funzione tangente è crescente in ogni intervallo del tipo $\left]\frac{2k-1}{2}\pi\,;\,\frac{2k+1}{2}\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.

La funzione tangente è una funzione dispari, ovvero $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.



SENO E COSENO MEDIANTE LA TANGENTE

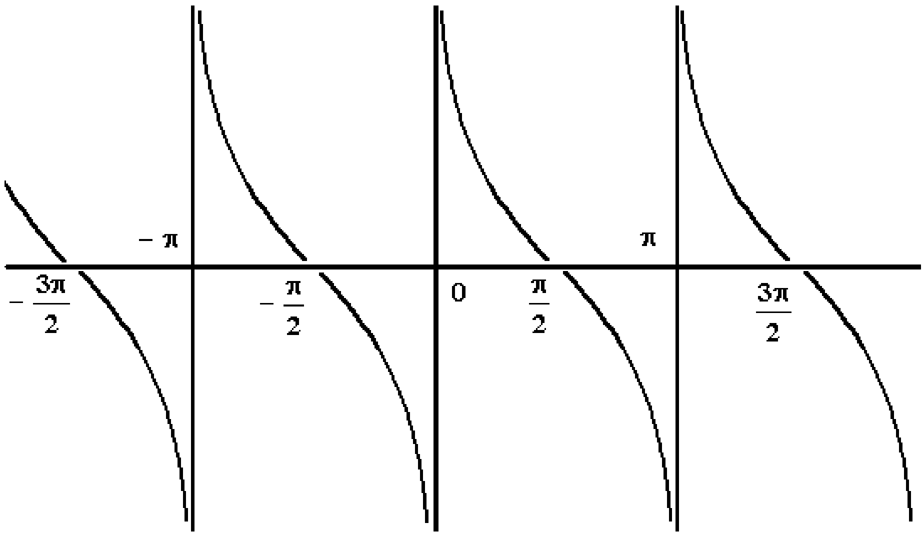
Valgono le seguenti formule, che, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, permettono di esprimere seno e coseno dell'angolo α mediante la tangente dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

FUNZIONE COTANGENTE

La **funzione cotangente** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore della cotangente dell'angolo stesso.

Sarà allora: $f(x) = \operatorname{cotg} x, \mathbb{R} \setminus \{x = k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.



La funzione cotangente è definita $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$; ha codominio illimitato inferiormente e superiormente, è periodica di periodo π, ovvero: $\text{cotg}\, x = \text{cotg}\,(x + k\,\pi), \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

La funzione cotangente è decrescente in ogni intervallo del tipo $\left]k\,\pi\,;\,(k+1)\,\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.

La funzione cotangente è una funzione dispari, ovvero $\text{cotg}\, x = -\,\text{cotg}\,(-\,x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

SECANTE E COSECANTE DI UN ANGOLO

Sia dato un angolo, la cui misura in radianti sia α. Si definiscono:

la **secante** dell'angolo α, come: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}\,,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$;

la **cosecante** dell'angolo α, come: $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}\,,\ \alpha \neq k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Risulta quindi $\dfrac{\sec\alpha}{\text{cosec}\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha$ e $\dfrac{\text{cosec}\,\alpha}{\sec\alpha} = \text{cotg}\,\alpha$.

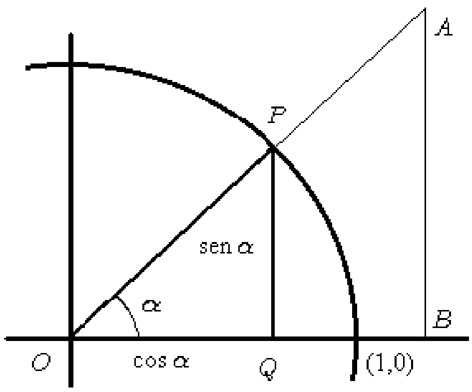
TEOREMI DI TRIGONOMETRIA PER TRIANGOLI RETTANGOLI

Dato un triangolo rettangolo OAB, retto in B, per le proprietà dei triangoli simili e per le definizioni del seno e del coseno, otteniamo:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{\overline{AO}}{1} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AO}\cdot\text{sen}\,\alpha$, ovvero: in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso.

Otteniamo anche:

$\dfrac{\overline{BO}}{\overline{QO}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \Rightarrow \dfrac{\overline{BO}}{\cos\alpha} = \dfrac{\overline{AO}}{1} \Rightarrow \overline{BO} = \overline{AO}\cdot\cos\alpha$, ovvero: in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto stesso.



Dalle due uguaglianze ottenute: $\overline{AB} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{BO} = \overline{AO} \cdot \cos\alpha$, dividendo, si ha: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{AO} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\overline{AO} \cdot \cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BO} \cdot \operatorname{tg}\alpha$, ovvero: in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto stesso.

ALTRE FUNZIONI

FUNZIONI IPERBOLICHE

Mediante la funzione $f(x) = e^x$, si definiscono le cosiddette funzioni iperboliche:

Seno iperbolico di x: $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

Coseno iperbolico di x: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

Tangente iperbolica di x: $\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

Cotangente iperbolica di x: $\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, per $x \neq 0$.

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

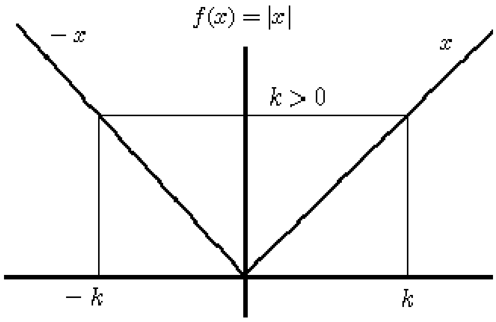
Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce il **valore assoluto** (o modulo) di x come: $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$.

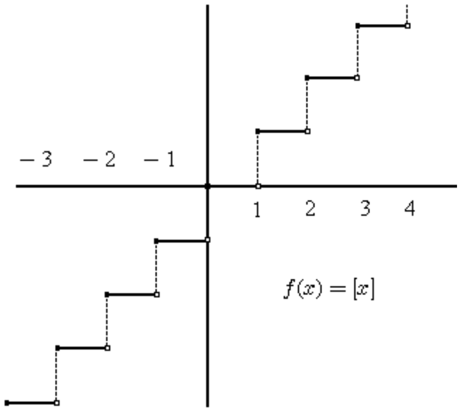
La funzione $f(x) = |x|$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio illimitato superiormente e limitato inferiormente, in quanto $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; il suo grafico è dato dalla semibisettrice del 2^ quadrante per $x < 0$ e dalla semibisettrice del 1^ quadrante per $x \geq 0$.

L'**equazione** $|x| = k$: $\begin{cases} \text{ha due soluzioni} : x = \pm k & \text{se } k > 0 \\ \text{ha la soluzione } x = 0 & \text{se } k = 0 \\ \text{non ha soluzioni} & \text{se } k < 0. \end{cases}$

La disequazione $|x| > k$ è risolta : $\begin{cases} \text{per } x < -k \text{ e per } x > k & \text{se } k > 0 \\ \text{per ogni } x \neq 0 & \text{se } k = 0 \\ \text{è sempre soddisfatta} & \text{se } k < 0. \end{cases}$

La disequazione $|x| < k$ è risolta : $\begin{cases} \text{per } -k < x < k & \text{se } k > 0 \\ \text{non è mai soddisfatta} & \text{se } k \leq 0. \end{cases}$





FUNZIONE PARTE INTERA

Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce la parte intera di x come: $[x] = \text{Ma}x\,\{\text{z} \in \mathbb{Z}, \text{z} \leq x\}$.

La funzione parte intera associa ad ogni numero reale x la sua parte intera.

Sarà quindi $f(x) = [x], \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$; la funzione parte intera è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio illimitato superiormente e inferiormente, è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ in quanto è costante a tratti.

LIMITI

L'OPERAZIONE DI PASSAGGIO AL LIMITE

Sia $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x)$ una funzione reale di variabile reale.
L'operazione di passaggio al limite intende formalizzare matematicamente un concetto operativo che può essere così riassunto :
"analizzare il comportamento della variabile dipendente $f(x)$ quando la variabile indipendente x assume valori sempre più vicini a x_0".
Questa analisi è basata esclusivamente sul comportamento della variabile dipendente $f(x)$ nei valori di x prossimi al valore x_0, e prescinde quindi dall'eventuale valore della funzione nel punto stesso, $f(x_0)$, che potrebbe anche non esistere.
Per unificare, quando occorra, la terminologia, introduciamo la **retta reale ampliata** (o compattificata) : $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ottenuta unendo ai numeri reali due simboli, quelli di $-\infty$ e di $+\infty$: meno infinito e più infinito.
Dire che la variabile indipendente x assume valori sempre più vicini a $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è cosa che può accadere anzitutto in tre modi:
-la variabile indipendente x assume valori sempre più vicini al valore reale x_0 :
diremo che x tende a x_0, o $x \to x_0$; per questo è necessario che x_0 sia punto di accumulazione per il dominio della funzione D_f;
-la variabile indipendente x assume valori sempre più grandi e positivi :
diremo che x tende a $+\infty$, o $x \to +\infty$; per questo è necessario che il dominio della funzione D_f sia illimitato superiormente e considereremo $+\infty$ come punto di accumulazione improprio per il dominio della funzione $f(x)$;
-la variabile indipendente x assume valori sempre più grandi e negativi :
diremo che x tende a $-\infty$, o $x \to -\infty$; per questo è necessario che il dominio della funzione D_f sia illimitato inferiormente e considereremo $-\infty$ come punto di accumulazione improprio per il dominio della funzione $f(x)$.
Analogamente, possono verificarsi tre casi per il comportamento della $f(x)$:
-la variabile dipendente $f(x)$ assume valori sempre più vicini ad un valore reale l. Diremo che $f(x)$ tende a l, o $f(x) \to l$, o che $f(x)$ converge a l;
-la variabile dipendente $f(x)$ assume valori sempre più grandi e positivi. Diremo che $f(x)$ tende a $+\infty$, o $f(x) \to +\infty$, o che $f(x)$ diverge positivamente;
-la variabile dipendente $f(x)$ assume valori sempre più grandi e negativi. Diremo che $f(x)$ tende a $-\infty$, o $f(x) \to -\infty$, o che $f(x)$ diverge negativamente.
Dalle varie combinazioni risultano allora anzitutto nove possibili casi di limite:
-limite finito al finito : $\mathcal{L}(x_0, l)$:
se x tende a x_0 allora $f(x)$ tende a l; scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
-limite infinito positivo al finito : $\mathcal{L}(x_0, +\infty)$:
se x tende a x_0 allora $f(x)$ tende a $+\infty$; scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
-limite infinito negativo al finito : $\mathcal{L}(x_0, -\infty)$:
se x tende a x_0 allora $f(x)$ tende a $-\infty$; scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
-limite finito all'infinito positivo : $\mathcal{L}(+\infty, l)$:
se x tende a $+\infty$ allora $f(x)$ tende a l; scriveremo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
-limite infinito positivo all'infinito positivo : $\mathcal{L}(+\infty, +\infty)$:
se x tende a $+\infty$ allora $f(x)$ tende a $+\infty$; scriveremo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
-limite infinito negativo all'infinito positivo : $\mathcal{L}(+\infty, -\infty)$:

se x tende a $+\infty$ allora $f(x)$ tende a $-\infty$; scriveremo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

-limite finito all'infinito negativo : $\mathcal{L}(-\infty, l)$:
se x tende a $-\infty$ allora $f(x)$ tende a l; scriveremo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

-limite infinito positivo all'infinito negativo : $\mathcal{L}(-\infty, +\infty)$:
se x tende a $-\infty$ allora $f(x)$ tende a $+\infty$; scriveremo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

-limite infinito negativo all'infinito negativo : $\mathcal{L}(-\infty, -\infty)$:
se x tende a $-\infty$ allora $f(x)$ tende a $-\infty$; scriveremo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Notiamo subito che parole quali "valori sempre più vicini" o "prossimi a" non esprimono, nell'ambito dei numeri reali, concetti dal chiaro significato; occorrerà formalizzare tutto questo in maniera opportuna e rigorosa con le varie definizioni di limite; a questo scopo ci serviremo degli intorni.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, assumendo per distanza la metrica Euclidea, l'**intorno** di x_0 di ampiezza ε è l'insieme: $\mathfrak{J}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Ponendo la condizione $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, imponiamo che $x \in \mathfrak{J}(x_0, \varepsilon)$ e che sia $x \neq x_0$.

Anche se sono simboli, è utile definire gli intorni di $+\infty$ e $-\infty$.

Definizione 53 : Si dice **intorno** di $+\infty$ ogni insieme del tipo:
$\mathfrak{J}(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x > \varepsilon\}$, mentre si dice **intorno** di $-\infty$ ogni insieme del tipo:
$\mathfrak{J}(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONI DI LIMITE

Presentiamo anzitutto un'unica definizione di limite, che verrà poi particolarizzata per ciascuno dei casi precedenti. Questa definizione "unificata" illustra come si articola una definizione di limite. Con la massima generalità, siano $x_0, l \in \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ovvero valori sia finiti che infiniti, con x_0 punto di accumulazione proprio o improprio per il dominio della funzione $f(x)$.

Dobbiamo tradurre in linguaggio matematico rigoroso una frase del tipo:
"la variabile dipendente $f(x)$ assume valori sempre più vicini a l quando la variabile indipendente x assume valori sempre più vicini a x_0".

Sostituiamo allora all'espressione "vicino a.." l'espressione "appartiene ad un intorno di.." e diamo la seguente:

Definizione 54 (unificata di limite) :
Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se $\forall \mathfrak{J}(l, \varepsilon) \, \exists \mathfrak{J}(x_0, \delta(\varepsilon)) : f(\mathfrak{J}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \subset \mathfrak{J}(l, \varepsilon)$.

Si dice cioè che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se, preso un qualunque intorno di l, si può determinare in corrispondenza un intorno di x_0, l'immagine di ogni punto del quale, escluso x_0, appartenga all'intorno scelto di l.

Scelto l'intorno $\mathfrak{J}(l, \varepsilon)$ del valore l, situato nel codominio, si deve poter determinare un intorno $\mathfrak{J}(x_0, \delta(\varepsilon))$ nel dominio; tutti i punti di questo intorno, escluso x_0, non devono avere una immagine che cada al di fuori dell'intorno $\mathfrak{J}(l, \varepsilon)$, e questo deve valere per ogni intorno, per quanto sempre più piccolo. Il "si deve poter determinare" è sintetizzato nella scrittura $\delta(\varepsilon)$, che ci esprime appunto δ come funzione di ε.

Possiamo allora enunciare in forma metrica ciascuna delle nove definizioni di limite.

limite finito al finito $\mathcal{L}(x_0, l)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

limite infinito positivo al finito $\mathcal{L}(x_0, +\infty)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

limite infinito negativo al finito $\mathcal{L}(x_0, -\infty)$:
si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.
limite finito all'infinito positivo $\mathcal{L}(+\infty, l)$:
si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
limite infinito positivo all'infinito positivo $\mathcal{L}(+\infty, +\infty)$:
si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.
limite infinito negativo all'infinito positivo $\mathcal{L}(+\infty, -\infty)$:
si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.
limite finito all'infinito negativo $\mathcal{L}(-\infty, l)$:
si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
limite infinito positivo all'infinito negativo $\mathcal{L}(-\infty, +\infty)$:
si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.
limite infinito negativo all'infinito negativo $\mathcal{L}(-\infty, -\infty)$:
si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito si dice anche che la funzione $f(x)$ è **convergente** per $x \to x_0$; se invece $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste infinito si dice che la funzione $f(x)$ è **divergente** per $x \to x_0$.

Esempio 46 : Sia $f(x) = k$ funzione costante. Risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = k, \forall x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
Infatti, basta considerare che $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ e $\forall x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
Esempio 47 : Sia $f(x) = x^2$. Vediamo che risulta $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Imponendo:
$|x^2 - 0| = x^2 < \varepsilon$ otteniamo: $-\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$, per cui, posto $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, si ha che:
$0 < |x| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$, ovvero è verificato che $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.
Esempio 48 : Sia $f(x) = 2^{-x}$. Vediamo che risulta $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Imponendo:
$|2^{-x} - 0| = 2^{-x} < \varepsilon$ otteniamo $-x < \log_2 \varepsilon$, ovvero $x > -\log_2 \varepsilon = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.
Per cui, posto $\delta(\varepsilon) = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ si ha che: $x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |2^{-x} - 0| < \varepsilon$, ovvero è verificato che $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$.

LIMITI DI SUCCESSIONI
Nel caso delle Successioni, ovvero delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \to a_n$ oppure $n \to f(n)$, il passaggio al limite ha senso solo al tendere della variabile n a $+\infty$.
Avremo quindi tre possibili definizioni di limite:
-**limite finito** $\mathcal{L}_S(+\infty, l)$:
si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta(\varepsilon) : n > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$.
-**limite infinito positivo** $\mathcal{L}_S(+\infty, +\infty)$:
si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : n > \delta(\varepsilon) \Rightarrow a_n > \varepsilon$.
-**limite infinito negativo** $\mathcal{L}_S(+\infty, -\infty)$:
si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se $\forall \varepsilon \, \exists \, \delta(\varepsilon) : n > \delta(\varepsilon) \Rightarrow a_n < \varepsilon$.

LIMITE DESTRO E SINISTRO

Può essere utile, se non addirittura necessario, nel calcolare $\lim_{x\to x_0} f(x)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$, scomporre in due parti l'analisi, studiando il comportamento della funzione per i soli valori minori o per i soli valori maggiori di x_0, quando ovviamente il campo di esistenza della funzione lo consenta. Parleremo in tal caso di limite sinistro $(x \to x_0^-)$ e di limite destro $(x \to x_0^+)$, ed avremo le seguenti definizioni:

-limite finito da sinistra $\mathcal{L}(x_0^-, l)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ se $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) : x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

-limite infinito positivo da sinistra $\mathcal{L}(x_0^-, +\infty)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ se $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta(\varepsilon) : x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

-limite infinito negativo da sinistra $\mathcal{L}(x_0^-, -\infty)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ se $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta(\varepsilon) : x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

-limite finito da destra $\mathcal{L}(x_0^+, l)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ se $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) : x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

-limite infinito positivo da destra $\mathcal{L}(x_0^+, +\infty)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ se $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta(\varepsilon) : x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

-limite infinito negativo da destra $\mathcal{L}(x_0^+, -\infty)$:
si dice che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ se $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta(\varepsilon) : x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$.

E' di immediata verifica il seguente:

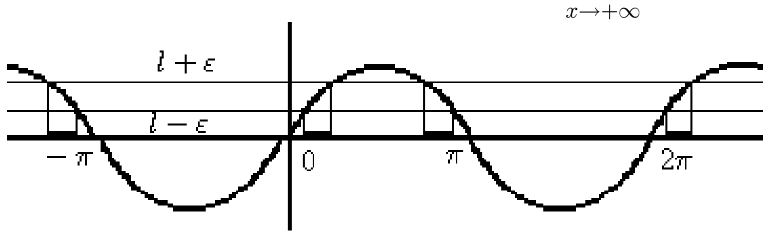
Teorema 5 : Sia $x_0 \in \mathbb{R}$; esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

NON ESISTENZA DEL LIMITE

Ogni volta che $\lim_{x\to x_0} f(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, non soddisfa ad alcuna delle definizioni precedentemente elencate, si conclude che tale limite non esiste, e scriveremo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \text{n.e.}$.

Diremo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \text{n.e.}$, se $x_0 \in \mathbb{R}$, anche quando, seguendo il Teorema 5, esistono sia $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ che $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, ma risulta $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

Esempio 49 : Vediamo che $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x = \text{n.e.}$, così come $\lim_{x\to +\infty} \cos x = \text{n.e.}$.
Essendo $-1 \le \operatorname{sen} x \le +1$, non può essere $\operatorname{sen} x > \varepsilon, \forall\, \varepsilon$, per avere $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$ nè può essere $\operatorname{sen} x < \varepsilon, \forall\, \varepsilon$, per avere $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x = -\infty$. La disequazione $|\operatorname{sen} x - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < \operatorname{sen} x < l + \varepsilon$, che verificherebbe il $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x = l$, e che ha senso solo se $-1 \le l \le +1$, per ε sufficientemente piccolo non è certo soddisfatta, per la periodicità della funzione $\operatorname{sen} x$, in un intorno di $+\infty$, ovvero $\forall\, x : x > \delta(\varepsilon)$.
Quindi $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x = \text{n.e.}$. Similmente si verifica che anche $\lim_{x\to +\infty} \cos x = \text{n.e.}$.



LIMITE INFINITO
Può essere utile introdurre un'ulteriore definizione, che possiamo chiamare di divergenza in quantità (o in modulo): $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, per indicare che i valori assunti dalla funzione divengono in quantità, indipendentemente dal segno, sempre più grandi.
Basta sostituire, nelle precedenti definizioni, al posto delle condizioni $f(x) < \varepsilon$ e $f(x) > \varepsilon$, relative a $f(x) \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$, la condizione $|f(x)| > \varepsilon$, relativa a $|f(x)| \to +\infty$.
Useremo talvolta nel seguito anche la scrittura: $x \to \infty$; questa viene usata solo per brevità, quando risulti $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Per non dover scrivere due limiti che hanno lo stesso risultato, abbrevieremo scrivendo $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Esempio 50 : Studiamo il $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.
Verifichiamo anzitutto che $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Per la definizione di limite $\mathcal{L}(x_0^+, +\infty)$, dovrà risultare $\frac{1}{x} > \varepsilon$. Preso $\varepsilon > 0$, e posto $x > 0$, otteniamo $0 < x < \frac{1}{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$.
Quindi $0 < x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$, cioè è verificato che $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
Verifichiamo poi che $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Per la definizione di limite $\mathcal{L}(x_0^-, -\infty)$, dovrà risultare $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Preso $\varepsilon < 0$, e posto $x < 0$, otteniamo $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} < x < 0$.
Quindi $\delta(\varepsilon) < x < 0 \Rightarrow f(x) < \varepsilon$, cioè è verificato che $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
Possiamo allora anche scrivere che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, in quantità indipendentemente dal segno.

LIMITI PER ECCESSO E PER DIFETTO
Nel $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, può essere utile precisare se $f(x) \to l$ assumendo solo valori inferiori o solo valori superiori al limite l. Se si verifica uno dei due casi, scriveremo allora rispettivamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$ e parleremo di limiti finiti per difetto e per eccesso (o da sotto e da sopra).
Nelle corrispondenti definizioni basterà sostituire la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$ rispettivamente con la : $l - \varepsilon < f(x) < l$ e con la : $l < f(x) < l + \varepsilon$.

Esempio 51 : Se abbiamo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^+$, la definizione per questo limite risulta:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) : x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0 \Rightarrow l < f(x) < l + \varepsilon$.

TEOREMI SUI LIMITI
Vediamo ora una serie di teoremi che sono immediata conseguenza della definizione di limite; la loro importanza non riguarda solo aspetti teorici ma anche, e soprattutto, pratici.
Ogni funzione che verrà utilizzata si intende definita nel seguente modo: $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema 6 (unicità del limite) : Data $f(x)$, sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per D_f.
Allora, se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste, esso è unico.

Dimostrazione : Vediamo come le tre disequazioni: $\begin{cases} |f(x)-l|<\varepsilon_1 \\ f(x)<\varepsilon_2 \\ f(x)>\varepsilon_3 \end{cases}$, che caratterizzano un limite finito oppure infinito (negativo o positivo), non possono sussistere contemporaneamente per qualsiasi valore di ε_1, ε_2 ed ε_3. Consideriamo ad esempio solo il caso di due limiti finiti. Se valessero sia la $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ che la $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_2$, con $l_1 \neq l_2$, basta prendere due intorni, $\mathfrak{I}(l_1,\varepsilon)$ di l_1 e $\mathfrak{I}(l_2,\varepsilon)$ di l_2, con $\varepsilon < \dfrac{|l_1-l_2|}{2}$, per cui $\mathfrak{I}(l_1,\varepsilon)\cap\mathfrak{I}(l_2,\varepsilon)=\emptyset$.
Per la definizione di limite $\mathcal{L}(x_0,l)$, esistono :
- un intorno $\mathfrak{I}(x_0,\delta_1(\varepsilon))$ di x_0 tale che $f(\ \mathfrak{I}(x_0,\delta_1(\varepsilon))\setminus\{x_0\})\subset\mathfrak{I}(l_1,\varepsilon)$ e
- un intorno $\mathfrak{I}(x_0,\delta_2(\varepsilon))$ di x_0 tale che $f(\ \mathfrak{I}(x_0,\delta_2(\varepsilon))\setminus\{x_0\})\subset\mathfrak{I}(l_2,\varepsilon)$.
Ma questo è assurdo, in quanto $\mathfrak{I}(l_1,\varepsilon)\cap\mathfrak{I}(l_2,\varepsilon)=\emptyset$. •

Teorema 7 (permanenza del segno) : Data $f(x)$, sia $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per D_f. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\neq 0$, oppure $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ oppure $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),=+\infty$ allora esiste almeno un intorno $\mathfrak{I}(x_0,\delta)$ di x_0 in cui, eccettuato caso mai x_0, la funzione $f(x)$ assume lo stesso segno di l.
Dimostrazione : Sappiamo che $\forall\,\mathfrak{I}(l,\varepsilon)\ \exists\,\mathfrak{I}(x_0,\delta(\varepsilon)) : f(\ \mathfrak{I}(x_0,\delta(\varepsilon))\setminus\{x_0\})\subset\mathfrak{I}(l,\varepsilon)$.
Se $x\in\mathfrak{I}(x_0,\delta(\varepsilon))$, dovrà risultare soddisfatta una delle tre conclusioni : $\begin{cases} |f(x)-l|<\varepsilon \\ f(x)<\varepsilon \\ f(x)>\varepsilon \end{cases}$.
Ma $|f(x)-l|<\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$. Dato che ε è arbitrario, se $l<0$ basta che sia anche $l+\varepsilon<0$ per avere $f(x)<0$; se $l>0$ basta che sia anche $l-\varepsilon>0$ per avere $f(x)>0$. Risulta ancora più rapida la verifica nel caso dei limiti infiniti: basta prendere $f(x)<\varepsilon<0$ oppure $f(x)>\varepsilon>0$. •

Questo Teorema ci permette di dedurre il segno della funzione una volta noto il segno del limite. Vediamo se e in che modo tale deduzione possa essere invertita; vediamo cioè se dal segno della funzione si può dedurre il segno del limite. Vale il seguente:
Teorema 8 : Sia $f(x)$ una funzione non negativa (oppure non positiva) in un intorno di $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$. Allora, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ esiste, esso è non negativo (oppure è non positivo).
Dimostrazione : Sia $f(x)\geq 0$ in $\mathfrak{I}(x_0,\delta)$. Supponendo per assurdo che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ fosse negativo, dal teorema della permanenza del segno seguirebbe l'esistenza di un intorno di x_0 in cui la funzione assume solo valori negativi, e questo è in contraddizione con l'ipotesi. •
Il caso $f(x)\leq 0$ con $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ positivo si tratta in modo del tutto analogo.
Riassumendo, se una funzione non è mai negativa (positiva), il suo limite, se esiste, sarà positivo (negativo) oppure uguale a zero.

Teorema 9 (del confronto) : Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni, x_0 punto di accumulazione per $D_f\cap D_g\cap D_h$, e supponiamo che in un intorno di x_0 risulti $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.
Allora:
-se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$, allora esiste $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ed è eguale a l;
-se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, allora esiste $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ed è eguale a $+\infty$;
-se infine $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=-\infty$, allora esiste $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ed è eguale a $-\infty$.
Dimostrazione : Per la definizione di limite, si potrà determinare un intorno $\mathfrak{I}(x_0,\delta)$ nei punti del quale si ha:

$l-\varepsilon<f(x)$ e $h(x)<l+\varepsilon$, per cui: $l-\varepsilon<f(x)\leq g(x)\leq h(x)<l+\varepsilon$.
Ma allora: $l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon$ e quindi $|g(x)-l|<\varepsilon$, ovvero $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$.
Se fosse $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, si potrà determinare un intorno $\mathfrak{J}(x_0,\delta)$ nei punti del quale si ha che $f(x)>\varepsilon$, e quindi $g(x)\geq f(x)>\varepsilon$, ovvero $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.
Se fosse $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=-\infty$, in maniera analoga da $h(x)<\varepsilon$ segue $g(x)\leq h(x)<\varepsilon$, e quindi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$. •

LIMITI E OPERAZIONI ALGEBRICHE
Enunciamo alcuni teoremi di notevole importanza che, sotto condizioni molto generali, assicurano la scambiabilità dell'operazione di passaggio al limite con le operazioni dell'aritmetica, con il valore assoluto, e, sotto opportune condizioni, anche con la composizione di funzioni.
Sintetizzando potremo dire che il limite di una somma è dato dalla somma dei limiti, il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti, ecc. .
Dei Teoremi che seguono si omette la dimostrazione.

Limite di somma e differenza di funzioni
Teorema 10 : Siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sia $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f\cap D_g$ e sia poi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$, con l_1 e l_2 numeri reali.
Allora $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=l_1+l_2$ e $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=l_1-l_2$. Ovvero:
$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Limite del prodotto di funzioni
Teorema 11 : Siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sia $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f\cap D_g$ e sia poi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$, con l_1 e l_2 numeri reali.
Allora $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=l_1\cdot l_2$. Ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
Come caso particolare del Teorema sul limite del prodotto abbiamo, data una costante reale k, che se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} k\cdot f(x)=k\cdot l_1$.

Limite del reciproco e del quoziente di funzioni
Teorema 12 : Siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sia $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f\cap D_g$ e sia poi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$, con $l_1,l_2\in\mathbb{R}$ e $l_2\neq 0$.
Allora $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$. Ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.
Inoltre: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{l_2}$. Ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Limite del valore assoluto
Teorema 13 : Sia $f(x)$ una funzione, $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per D_f e sia inoltre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.
Allora $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|l|$. Ovvero $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.

E' opportuno fare una osservazione importante circa i Teoremi operativi sui limiti.
L'esistenza di $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e di $\lim_{x\to x_0} g(x)$ è condizione solo sufficiente e non necessaria per l'esistenza del limite di somma, differenza, prodotto e quoziente delle due funzioni.

Esempio 52 : Siano $f(x) = \text{sen}^2 x$ e $g(x) = \cos^2 x$. Con una dimostrazione analoga a quella vista nell'Esempio 49, non esistono nè $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ nè $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
Eppure $\lim_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to+\infty} \left[\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right] = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

Limite della funzione composta
Siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, tali che $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ e $\lim_{x\to\beta} f(x) = \alpha$, con $\alpha, \beta \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
Possiamo dire che allora $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \alpha$? Sussiste a tal fine il seguente:
Teorema 14 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $g(D_g) \subseteq D_f$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per D_g, $\beta \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per D_f e sia poi $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ e $\lim_{x\to\beta} f(x) = \alpha$, $\alpha \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \alpha$ è che sia :
1) $g(x) \neq \beta$ nel caso in cui $f(x)$ sia divergente;
2) $g(x) \neq \beta$ oppure $f(\beta) = \alpha$ nel caso in cui $f(x)$ sia convergente;
Nessuna ipotesi è necessaria nel caso in cui $g(x)$ sia divergente.

Esempio 53 : Date le funzioni $g(x) = \begin{cases} \beta & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ e $f(x) = \begin{cases} \alpha & : x \neq \beta \\ k & : x = \beta \end{cases}$, costruiamo la funzione composta $f(g(x))$ ed esaminiamo il $\lim_{x\to 0} f(g(x))$, supponendo che sia $\beta \neq 0$.
Risulta $f(g(x)) = \begin{cases} f(\beta) & : x \neq 0 \\ f(0) & : x = 0 \end{cases} = \begin{cases} k & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases}$, per cui sarà $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = k$.
D'altra parte $\lim_{x\to 0} g(x) = \beta$ e $\lim_{x\to\beta} f(x) = \alpha$.
Non sussiste quindi l'uguaglianza tra $\lim_{x\to\beta} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(g(x))$, a meno che non sia $\alpha = k$, ovvero se $f(x)$ è funzione costante.

LA CONTINUITA'

La definizione di funzione continua caratterizza una classe molto importante nell'ambito delle funzioni reali di variabile reale.
Mentre l'operazione di passaggio al limite analizza il comportamento della funzione nei punti "vicini" ad un dato punto x_0, il calcolo del valore $f(x_0)$ ci dice quanto vale la funzione nel punto stesso. La definizione di continuità verifica se il comportamento della funzione vicino al punto è "coerente" con quanto avviene nel punto.

DEFINIZIONE DI CONTINUITA' IN UN PUNTO
La definizione di funzione continua in un punto è la seguente:
Definizione 55 : Data $f(x)$, sia $x_0 \in D_f$ punto d'accumulazione per D_f; la funzione $f(x)$ si dice **continua** nel punto x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Se x_0 è un punto isolato del dominio di $f(x)$, allora la funzione $f(x)$ si definisce continua nel punto x_0.

Non ha senso parlare di continuità se $x \to +\infty$ o se $x \to -\infty$.
Esaminiamo i vari punti di questa definizione.
La funzione $f(x)$ deve esistere nel punto (per avere $f(x_0)$), poi, in ogni intorno del punto x_0 devono esserci punti in cui la funzione è definita (per poter effettuare il passaggio al limite), infine il valore della funzione nel punto ed il valore del limite (comportamento nei punti "vicini") devono essere uguali. Se x_0 è punto isolato per D_f, mancando l'analisi nei punti vicini, la funzione si dice comunque continua.
In analogia con la definizione di limite, diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ se :
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Si noti la richiesta $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ al posto della $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, tipica della definizione di limite; ora è importante, e molto, il comportamento della funzione nel punto x_0 stesso, che invece non interessa affatto nel caso del limite.
Scriveremo $f(x) \in \mathcal{C}(x_0)$ per indicare che $f(x)$ è continua in x_0.
Dal punto di vista operativo essere una funzione continua significa che il calcolo dell'immagine $f(x_0)$ fornisce anche il valore del limite della funzione nel punto.
Daremo nel seguito regole atte a saper "riconoscere" le funzioni continue, in modo da poter utilizzare questa proprietà.

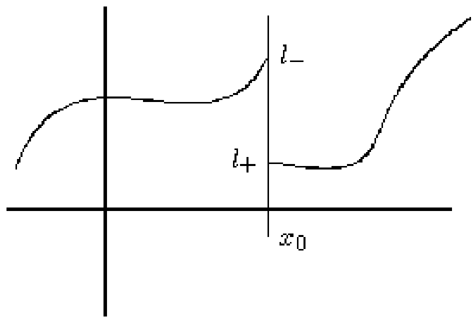
CONTINUITA' DA DESTRA E DA SINISTRA
Definizione 56 : Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, la funzione si dice **continua da sinistra** nel punto x_0, mentre se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ allora la funzione si dice, in x_0, **continua da destra**.
Facilmente si vede che:
Teorema 15 : Una funzione è continua nel punto x_0 se e solo se in x_0 è continua sia da destra che da sinistra.

CONTINUITA' IN UN INSIEME
Dato che la definizione di funzione continua è una definizione puntuale, diremo che una funzione $f(x)$ è **continua in un insieme** quando essa è continua in tutti i punti dell'insieme.
Potremo quindi dire che la funzione $f(x)$ è continua nell'insieme $\mathbb{A}$ se:
$\forall \, x_0 \in \mathbb{A}, \forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

PUNTI DI DISCONTINUITA'
Approfondiamo il concetto di continuità con l'esame dei casi nei quali una funzione risulta non essere continua, ovvero discontinua.
Vediamo allora come può accadere che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non coincide con $f(x_0)$.
Esistono quattro casi, che ora elenchiamo, dicendo anche che tradizionalmente questi quattro casi vengono divisi in tre tipi di discontinuità, e che non tutti gli Autori usano, a livello terminologico, la stessa classificazione.

Discontinuità di I^ specie
Si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ in quanto non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, e $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste in quanto $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono finiti, ma sono diversi tra loro:
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_- \neq l_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
La funzione potrebbe, nel punto x_0, essere continua solo da sinistra, oppure continua solo da destra o da nessuna delle due parti, a seconda dell'esistenza e del valore di $f(x_0)$ e della sua uguaglianza con uno dei due limiti unilateri.

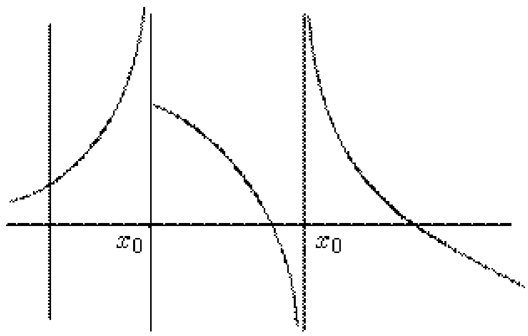
Si dice che la funzione presenta un **salto** nel punto x_0, pari a $|l_+ - l_-|$, e si dice anche che la funzione presenta, nel punto x_0, una discontinuità di I^ specie.



Discontinuità di I specie

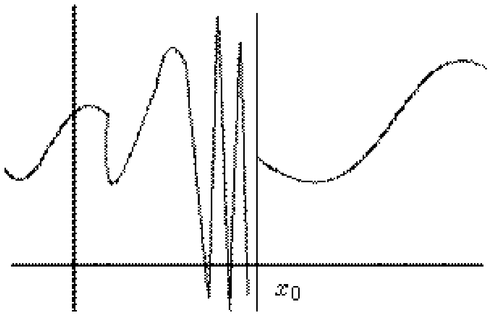
Esempio 54 : La funzione Parte intera $f(x) = [x]$ presenta infinite discontinuità di I^ specie nei punti di ascissa $x_0 \in \mathbb{Z}$, con salto pari a 1.
Se $x_0 \in \mathbb{Z}$, si ha che $\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1$, mentre $\lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0$.

Discontinuità di II^ specie per limite infinito
Si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ in quanto, almeno da una parte, destra o sinistra, o da ambedue, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ma è infinito, potendo essere uguale a $+\infty$, a $-\infty$ oppure a ∞.
Questo è un primo caso di quella che solitamente si chiama discontinuità di II^ specie.
Geometricamente parlando, diciamo che il grafico della funzione ha la retta $x = x_0$ come **asintoto verticale**, dalla parte sinistra, o dalla destra o da ambedue le parti.
Diviene del tutto insignificante in questo caso l'eventuale valore $f(x_0)$, che potrebbe esistere o anche non esistere. Esso potrebbe caso mai interessare, se esistesse, per vedere se la funzione è almeno continua da destra o da sinistra.



Due esempi di Discontinuità di II specie per limite infinito

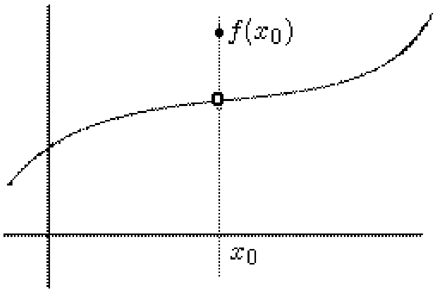
Discontinuità di II^ specie per limite non esistente
Si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ in quanto $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste, e $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste o perchè non esiste il limite da sinistra $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, o non esiste quello da destra $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, oppure non esistono entrambi.
Anche ora, a seconda del valore $f(x_0)$ (se esiste), e a seconda del valore dei limiti unilateri, la funzione potrebbe essere continua da una sola parte.
La maggioranza degli Autori classifica anche questa come discontinuita di II^ specie, alcuni la chiamano invece di III^ specie.



Discontinuità di II specie per limite non esistente

Discontinuità di III^ specie o eliminabile

Si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ in quanto $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste ed è finito, ma non è soddisfatta la definizione di continuità in quanto $f(x_0)$ o non esiste, oppure esiste ma è un valore diverso da quello del limite. Si parla di **discontinuità eliminabile** oppure di discontinuita di III^ specie.
La prima dizione si spiega con il fatto che partendo dalla funzione data se ne può costruire una nuova che risulta continua nel punto x_0. Basta cambiare il valore dell'ordinata $f(x_0)$, prendendolo uguale al valore del $\lim_{x \to x_0} f(x)$.



Discontinuità di III specie

E' da notare come in questo caso di discontinuità la funzione non possa essere continua solo da una parte.

CONTINUITA' E LIMITI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Vista l'enorme importanza operativa della continuità, specialmente per quello che riguarda il calcolo del limite, è utile poter sapere, anche senza ricorrere alla verifica della definizione, quando una data funzione sia o no continua.
Inizieremo con l'analisi della continuità delle funzioni elementari, dopodichè, utilizzando i Teoremi operativi sui limiti, vedremo che molte operazioni, sotto ipotesi abbastanza semplici, conservano la continuità, e potremo così analizzare facilmente la continuità di funzioni più complesse delle funzioni elementari.
Per le funzioni elementari, con la sola eccezione della funzione Parte intera, vale una proprietà molto importante: le funzioni elementari, dove esistono, sono continue.

Continuità e limiti dei Polinomi

Ogni funzione polinomiale:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
esiste ed è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, per cui, se $x_0 \in \mathbb{R}$:
$\lim_{x \to x_0} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0$.
Vedremo in seguito come calcolare i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ di un polinomio.

Per citare i casi più importanti, vediamo che le funzioni costanti (polinomi di grado 0), le rette (polinomi di grado 1) e le parabole (polinomi di grado 2) sono funzioni continue $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ed inoltre:
-le funzioni costanti $y = k, k \in \mathbb{R}$ sono tali che $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$, $\forall\, x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$;
-le rette $y = mx + q$ sono tali che :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} mx+q = -\infty & \text{se } m>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} mx+q = +\infty & \text{se } m<0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} mx+q = +\infty & \text{se } m>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} mx+q = -\infty & \text{se } m<0 \end{cases} .$$

-le parabole $y = ax^2 + bx + c$ sono tali che :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} ax^2+bx+c = +\infty & \text{se } a>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ax^2+bx+c = -\infty & \text{se } a<0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} ax^2+bx+c = +\infty & \text{se } a>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ax^2+bx+c = -\infty & \text{se } a<0 \end{cases} .$$

Continuità delle funzioni razionali fratte
Le funzioni razionali fratte sono espresse come quoziente di due polinomi:

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + ... + b_1\, x + b_0} .$$

Esse sono continue $\forall\, x : b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + ... + b_1\, x + b_0 \neq 0$, ovvero nei punti in cui non si annulla il denominatore. Vedremo nel seguito come calcolarne i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$, nonchè nei punti in cui si annulla il denominatore.

Continuità e limiti delle funzioni trigonometriche
Le funzioni $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$ sono continue $\forall\, x \in \mathbb{R}$, per cui:
$\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$.
Come visto nell'Esempio 49, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x =$ n.e. così come anche $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x =$ n.e..
La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è continua $\forall\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Inoltre $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\,\pi\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\,\pi\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$.
La funzione $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ è continua $\forall\, x \neq k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Inoltre $\lim\limits_{x\to(k\,\pi)^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to(k\,\pi)^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$.
Non esistono, per tutte le funzioni trigonometriche, i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

Continuità e limiti delle funzioni esponenziali
Le funzioni esponenziali $f(x) = a^x, a > 0$, sono continue $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se $0 < a < 1$, si ha : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0^+ \end{cases}$;

se $1 < a$, si ha : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \end{cases}$.

Continuità e limiti delle funzioni logaritmiche
Le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, sono continue $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* : x > 0$.

Se $0 < a < 1$, si ha : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$;

se $1 < a$, si ha : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$.

Continuità e limiti delle funzioni potenza

Le funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, dove esistono, sono continue. Quindi:
Se $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Per i limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ occorre distinguere i casi α pari e α dispari:
se α è pari (ad esempio $f(x) = x^2$) si ha $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$;
se α è dispari (ad esempio $f(x) = x^3$) si ha $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.
Se $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, $f(x) = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Per i limiti occorre distinguere due casi: $-\alpha$ pari e $-\alpha$ dispari:
se $-\alpha \neq 0$ è pari $\left(\text{ad esempio } f(x) = \dfrac{1}{x^2}\right)$ si ha: $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0^+$ mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$;
se $-\alpha$ è dispari $\left(\text{ad esempio } f(x) = \dfrac{1}{x^3}\right)$ si ha: $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = 0^-$ mentre $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0^+$;
invece $\lim\limits_{x\to 0^-} x^\alpha = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

Se $\alpha \in \mathbb{Q}_+{}^*$, abbiamo tre casi:
.) $\alpha = \dfrac{m}{n}$, m pari e n dispari $\left(\text{ad esempio } f(x) = x^{\frac{2}{3}}\right)$, $y = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$;
..) $\alpha = \dfrac{m}{n}$, m dispari e n dispari $\left(\text{ad esempio } f(x) = x^{\frac{5}{3}}\right)$, $y = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$;
...) $\alpha = \dfrac{m}{n}$, m dispari e n pari, $\left(\text{ad esempio } f(x) = x^{\frac{3}{2}}\right)$, $y = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}_+$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ mentre $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.
Se $\alpha \in \mathbb{Q}_-$, valgono gli stessi tre casi precedenti, dovendosi ora però anche escludere dal campo d'esistenza il punto $x = 0$:
.) $\alpha = -\dfrac{m}{n}$, m pari e n dispari $\left(\text{ad es. } f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$, $y = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}^*$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0^+$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$;
..) $\alpha = -\dfrac{m}{n}$, m dispari e n dispari $\left(\text{ad es. } f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$, $y = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}^*$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to -\infty} x^\alpha = 0^-$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0^+$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} x^\alpha = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$;
...) $\alpha = -\dfrac{m}{n}$, m dispari e n pari, $\left(\text{ad es. } f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[2]{x^3}}\right)$, $y = x^\alpha$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, ed inoltre $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0^+$.
Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $y = x^\alpha$ risulta :

$$\begin{cases} \text{continua } \forall\, x \in \mathbb{R}_+ \text{ se } \alpha > 0 & \text{ed inoltre: } \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0^+ \text{ e } \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty \\ \text{continua } \forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \text{ se } \alpha < 0 & \text{ed inoltre: } \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \text{ e } \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0^+ \end{cases}.$$

Continuità e limiti della funzione Valore assoluto

La funzione Valore assoluto $f(x) = |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$ è continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ed inoltre risulta: $\lim\limits_{x\to -\infty} |x| = \lim\limits_{x\to +\infty} |x| = +\infty$.

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE IN UN PUNTO

Questi Teoremi, diretta conseguenza di quelli enunciati per l'operazione di limite, dimostrano come la continuità "si mantenga", quasi senza condizioni, attraverso le quattro operazioni dell'aritmetica e la composizione di funzioni. Vedremo che sommando, moltiplicando e componendo funzioni continue si ottengono sempre funzioni continue.

Continuità della somma e differenza di funzioni

Teorema 16 : Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue nel punto x_0, ovvero sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Allora si ha che le funzioni $f(x) + g(x)$ e $f(x) - g(x)$ sono continue nel punto x_0, ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = f(x_0) - g(x_0)$.

Continuità del prodotto di funzioni

Teorema 17 : Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue nel punto x_0, ovvero sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Allora si ha che la funzione $f(x) \cdot g(x)$ è continua nel punto x_0, ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0) \cdot g(x_0)$.

Come caso particolare del prodotto, se k è una costante, allora la funzione $k \cdot f(x)$ è continua nel punto x_0, ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot f(x_0)$.

Continuità del reciproco e del quoziente di funzioni

Teorema 18 : Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue nel punto x_0, ovvero sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, e sia inoltre $g(x_0) \neq 0$.

Allora si ha che le funzioni $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\dfrac{1}{g(x)}$ sono continue nel punto x_0, ovvero:

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ e $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{g(x_0)}$.

Continuità della funzione composta

Teorema 19 : Siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$. Sia $g(x)$ continua nel punto x_0, ovvero $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, e sia $f(x)$ continua nel punto $y_0 = g(x_0)$, ovvero: $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$.

Allora la funzione $f(g(x))$ è continua nel punto x_0, ovvero: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$.

Ovvero componendo funzioni continue si ottengono funzioni ancora continue.

Esempio 55 : Continuità del Valore assoluto di una funzione $f(x)$. Data una funzione $f(x)$ che sia continua in un punto x_0, ovvero tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, allora si ha che $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, ovvero è continua in x_0 anche la funzione $|f(x)|$.

LIMITI PER SOSTITUZIONE
Nel calcolo di molti limiti risulta spesso di grande utilità operare dei cambiamenti di variabile nell'espressione che definisce la funzione in oggetto. La sostituzione della variabile originaria con un'altra, ad essa a sua volta legata da una specifica relazione funzionale, si rivela opportuna se riconduce il limite da calcolare ad un altro già noto, o più semplice. Questa tecnica, tutto sommato, non è altro che una riformulazione del Teorema sul limite di funzione composta.

Esempio 56 : Si debba calcolare $\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(\log_2 x)$. Abbiamo la composizione di due funzioni: $x \to \log_2 x \to \operatorname{sen}(\log_2 x)$. Dato che $\lim_{x \to 1} \log_2 x = 0$, si ha, posto $t = \log_2 x$, che: $\lim_{x \to 1} \operatorname{sen}(\log_2 x) = \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0$.

Esempio 57 : Si debba calcolare $\lim_{x \to 0^+} \log_2(\operatorname{sen} x)$. Abbiamo la composizione di due funzioni: $x \to \operatorname{sen} x \to \log_2(\operatorname{sen} x)$. Dato che $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0^+$, si ha, posto $t = \operatorname{sen} x$, che: $\lim_{x \to 0^+} \log_2(\operatorname{sen} x) = \lim_{t \to 0^+} \log_2 t = -\infty$.

Esempio 58 : Si debba calcolare $\lim_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$. Abbiamo la composizione di due funzioni: $x \to \frac{1}{x} \to 2^{\frac{1}{x}}$. Dato che $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ mentre $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, si ha, posto $t = \frac{1}{x}$, che: $\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} 2^t = 0$ mentre $\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} 2^t = +\infty$.

FORME INDETERMINATE
I Teoremi operativi sui limiti e sulle funzioni continue in un punto non valgono quando il risultato si presenta in una delle cosiddette forme indeterminate, sette casi che non consentono di stabilire con certezza quello che sarà il risultato effettivo del limite. Di seguito elenchiamo le 7 forme indeterminate che sono: $+\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0.
Quando il risultato del limite si presenta sotto forma indeterminata, questo non è mai un risultato definitivo ma rappresenta solo una temporanea difficoltà, che non va assolutamente confusa con la non esistenza del limite. Il vero valore del limite dovrà invece essere ottenuto mediante opportune semplificazioni o trasformazioni o artifici, oppure usando quei Teoremi noti sotto il nome di Regola di De L'Hopital, che valgono per le funzioni derivabili.

FORME INDETERMINATE ARITMETICHE
Sono quelle che si incontrano nel limite di somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni, e sono le seguenti: $+\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.
Si può avere il primo caso quando, ad esempio, si considera la differenza di due funzioni ambedue divergenti positivamente oppure la somma di una funzione divergente positivamente con una divergente negativamente. Il secondo caso si incontra nel prodotto tra una funzione convergente a zero e una funzione divergente. Il terzo e quarto caso provengono infine dal quoziente di due funzioni che tendono ambedue a zero oppure ambedue all'infinito.

Esempio 59 : Si considerino la funzione $f(x) = x^2 + 1$, e le seguenti altre funzioni:
a) $g(x) = x$, b) $g(x) = x^2$, c) $g(x) = x^3$, d) $g(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$,
e si calcoli poi $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$.
Si ottiene sempre la forma indeterminata $+\infty - \infty$, ma, con semplici calcoli, vediamo che:
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 + 1 - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$;
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 + 1 - x^2\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$;
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 + 1 - x^3\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 1\right) = -\infty$;
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 + 1 - x^2 + \operatorname{sen} x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}(1 + \operatorname{sen} x) = \text{n.e.}$.

OPERAZIONI DI LIMITE IN $\mathbb{R}$ ESTESO
Vediamo vari casi di limite che non conducono a forme indeterminate, ma danno luogo sempre ad un unico e ben preciso risultato. Partendo dalle quattro forme indeterminate, modifichiamo uno dei due termini della forma, ottenendo così un risultato di limite univocamente determinato. Non potendosi trattare l'infinito alla stregua di un qualunque numero reale, non possiamo formalmente inserire questi risultati nei Teoremi operativi sui limiti; parleremo allora di operazioni di limite in $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$: $\mathbb{R}$ esteso.
In alcuni degli enunciati che seguiranno useremo, quando sarà utile, il valore assoluto $|f(x)|$ della funzione $f(x)$ per non dover discutere anche dell'eventuale segno del limite, che andrà determinato anche in base ai limiti unilateri e ad ulteriori opportune considerazioni.
Sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, punto di accumulazione proprio o improprio per il dominio della funzione $f(x)$.
Nel seguito useremo frequentemente le seguenti:
Definizione 57 (di infinitesimo) :
La funzione $f(x)$ si dice un **infinitesimo** per $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
Definizione 58 (di infinito) :
La funzione $f(x)$ si dice un **infinito** per $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (indipendentemente dal segno).
Definizione 59 : La funzione $f(x)$ è detta "**lontana da zero**" per $x \to x_0$ se esiste un intorno $\mathfrak{I}(x_0)$ ed un valore ε tale che : $x \in \mathfrak{I}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.
Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice limitata (superiormente e/o inferiormente) in un insieme $\mathbb{A} \subseteq D_f$ se il suo codominio $f(\mathbb{A})$ risulta limitato (superiormente e/o inferiormente).
Avremo allora anche la
Definizione 60 : Si dice che la funzione $f(x)$ risulta **limitata** per $x \to x_0$ se esiste un intorno $\mathfrak{I}(x_0)$ ed un valore ε tale che : $x \in \mathfrak{I}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
Notiamo l'antitesi tra la definizione di infinitesimo e quella di funzione lontana da zero, così come sono antitetiche la definizione di infinito e quella di funzione limitata.

Esempio 60 : Date $f_1(x) = \log_2 x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$, $f_3(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e $f_5(x) = 1 + x^2$, vediamo per quali valori $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ esse risultano infinitesimi e per quali valori esse risultano infiniti. Avremo che:
$f_1(x) = \log_2 x$ è infinitesima per $x \to 1$; infinita per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$.
Quindi è lontana da zero $\forall x \neq 1$, ed è limitata $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.
$f_2(x) = \operatorname{sen} x$ è infinitesima per $x \to k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e non è mai infinita.
Quindi è lontana da zero $\forall x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ed è sempre limitata.

$f_3(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ è infinitesima per $x \to \pm\infty$ e infinita per $x \to \pm\,1$.
Quindi è lontana da zero $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ed è limitata $\forall\, x \neq \pm\,1$.
$f_4(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ è infinitesima per $x \to \pm\infty$ e non è mai infinita.
Quindi è lontana da zero $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ed è sempre limitata.
$f_5(x) = 1 + x^2$ non è mai infinitesima ed è infinita per $x \to \pm\infty$.
Quindi è lontana da zero $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ed è limitata $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Passiamo quindi a vedere i casi che non danno luogo a forme indeterminate.

Limite della somma di funzione divergente con funzione limitata
La somma (o differenza) di due funzioni, una delle quali è divergente e l'altra è limitata, è divergente : la loro funzione somma (o differenza) è divergente.Vale infatti il seguente:
Teorema 20 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e sia $g(x)$ limitata per $x \to x_0$. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \infty$.
In particolare, quando nel limite della somma (o differenza) una delle due funzioni tende all'infinito e l'altra tende ad un limite finito l, il limite della somma (o differenza) tende anch'esso all'infinito. Ovvero, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \infty$.

Esempio 61 : Abbiamo che $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x^2 - \operatorname{sen} x\right] = +\infty$ in quanto $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, e anche se $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{sen} x = \text{n.e.}$, la funzione $g(x) = \operatorname{sen} x$ è limitata $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Limite del reciproco di un infinitesimo o di un infinito
Vale il seguente:
Teorema 21 : Data $f(x)$, con x_0 punto di accumulazione per D_f, sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.
E vale anche, con opportuna inversione, il
Teorema 22 : Data $f(x)$, con x_0 punto di accumulazione per D_f, sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Limite del prodotto di funzione divergente per funzione lontana da zero
Il prodotto di due funzioni, una delle quali è divergente e l'altra è lontana da zero, è divergente. Il segno del limite, se determinato, dipende naturalmente dai segni dei due fattori. Vale il seguente:
Teorema 23 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e sia $g(x)$ lontana da zero per $x \to x_0$. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.
In particolare, quando nel limite del prodotto una delle due funzioni tende all'infinito e l'altra tende ad un limite finito e diverso da 0, il limite del prodotto tende anch'esso all'infinito.
Ovvero, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \neq 0$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$.

Esempio 62 : Abbiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 (2 + \operatorname{sen} x) = +\infty$ dato che risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, e anche se $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + \operatorname{sen} x) = \text{n.e.}$, la funzione $g(x) = (2 + \operatorname{sen} x)$ è lontana da zero $\forall\, x \in \mathbb{R}$, in quanto $1 \leq (2 + \operatorname{sen} x) \leq 3$.
Un ragionamento simile non vale per $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \operatorname{sen} x$, che vedremo in seguito essere un limite che non esiste, in quanto $g(x) = \operatorname{sen} x$ non è lontana da zero per $x \to +\infty$, dato che si annulla infinite volte, nei punti $x = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$.

Limite del prodotto di funzione infinitesima per funzione limitata
Non è indeterminato il limite del prodotto di due funzioni quando una delle due è infinitesima mentre l'altra, che ammetta o non ammetta limite, è limitata : il prodotto delle due funzioni ha limite uguale a zero. Vale il:
Teorema 24 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e sia $g(x)$ limitata in un intorno del punto x_0.
Allora $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Esempio 63 : Abbiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = 0$ dato che risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, e anche se $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = \text{n.e.}$, la funzione $g(x) = \operatorname{sen} x$ è comunque limitata $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Limite del quoziente tra funzione lontana da zero e funzione infinitesima
Non è indeterminato il limite del quoziente di due funzioni quando il numeratore è una funzione lontana da zero mentre il denominatore tende a zero : il limite del quoziente delle due funzioni è infinito, con eventuale segno da determinare. Vale infatti il:
Teorema 25 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $f(x)$ lontana da zero e sia $g(x)$ infinitesima per $x \to x_0$. Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Esempio 64 : Abbiamo che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{x} = \infty$ dato che risulta $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, mentre la funzione $g(x) = (2 + \operatorname{sen} x)$ è lontana da zero per $x \to 0$, in quanto $\lim\limits_{x \to 0} (2 + \operatorname{sen} x) = 2$.
Si può poi vedere che $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{x} = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{x} = +\infty$.

Limite del quoziente tra funzione infinitesima e funzione lontana da zero
Non è indeterminato il limite del quoziente di due funzioni quando il numeratore tende a zero mentre il denominatore è una funzione lontana da zero : il quoziente delle due funzioni tende a zero. In particolare risulta infinitesimo il quoziente tra una funzione infinitesima e una funzione infinita. Vale il:
Teorema 26 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e sia $g(x)$ lontana da zero per $x \to x_0$. Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Esempio 65 : Si ha che $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^x}{2 + \operatorname{sen} x} = 0$ dato che risulta $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, mentre la funzione $g(x) = (2 + \operatorname{sen} x)$ è lontana da zero per $x \to -\infty$, in quanto $1 \leq (2 + \operatorname{sen} x) \leq 3$.

Limite del quoziente tra funzione divergente e funzione limitata

Non è indeterminato il limite del quoziente di due funzioni quando il numeratore tende all'infinito ed il denominatore è limitato: il limite del quoziente tende all'infinito, del quale resta da stabilire il segno. In particolare tende all'infinito il limite del quoziente quando il numeratore tende all'infinito ed il denominatore è infinitesimo. Vale il:

Teorema 27 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ e sia $g(x)$ limitata per $x \to x_0$. Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Esempio 66 : Abbiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{\operatorname{sen} x} = \infty$ dato che risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$, mentre la funzione $g(x) = \operatorname{sen} x$ è limitata, ed assume valori sia positivi che negativi per $x \to +\infty$.

Esempio 67 : Abbiamo che $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{\log_2(1+x)} = +\infty$ essendo $\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$, (vedi Esempio 58) mentre risulta $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_2(1+x) = \log_2 1^+ = 0^+$.

Limite del quoziente tra funzione limitata e funzione divergente

Non è indeterminato il limite del quoziente di due funzioni quando il numeratore è una funzione limitata ed il denominatore tende all'infinito: il quoziente delle due funzioni tende a zero. Vale il:

Teorema 28 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f \cap D_g$. Sia $f(x)$ limitata per $x \to x_0$ e sia $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Esempio 68 : Si ha che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$ dato che $g(x) = \cos x$ è limitata per $x \to +\infty$, mentre risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

RIASSUNTO DELLE FORME NON INDETERMINATE

Possiamo, a conclusione, riepilogare i casi che non conducono a forme indeterminate:

$$Divergente \pm limitata \to \infty \quad \text{e} \quad Divergente \pm convergente \to \infty$$

$$\frac{1}{Infinitesima} \to \infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{Divergente} \to 0$$

$$Divergente \cdot Lontana\ da\ 0 \to \infty \quad \text{e} \quad Infinitesima \cdot Limitata \to 0$$

$$\frac{Lontana\ da\ 0}{Infinitesima} \to \infty \quad \text{e} \quad \frac{Infinitesima}{Lontana\ da\ 0} \to 0$$

$$\frac{Divergente}{Limitata} \to \infty \quad \text{e} \quad \frac{Limitata}{Divergente} \to 0$$

LIMITI DI POLINOMI E DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Come applicazione dei casi precedentemente trattati, ed utilizzando i Teoremi sul limite della somma, del prodotto e del quoziente, studiamo i limiti delle funzioni polinomiali e delle funzioni razionali fratte.

Data una funzione di tipo polinomiale $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$, calcoliamo $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0 \right)$. Essendo :

$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0 = x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n} \right)$, ed essendo:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_k}{x^{n-k}} = 0\,,\ \forall\, k : 0 \leq k < n$, avremo che:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n} \right) = sgn(a_n) \cdot (+\infty)$,

ovvero il limite è infinito, con lo stesso segno del coefficiente a_n.

Se calcoliamo poi $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0 \right)$, con analoga procedura, si ha:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n} \right) = sgn(a_n) \cdot (+\infty) & \text{, per } n \text{ pari} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n} \right) = sgn(a_n) \cdot (-\infty) & \text{, per } n \text{ dispari} \end{cases} .$$

Questo perchè nella determinazione del segno dell'infinito a cui tende la funzione ora concorre anche il fattore x^n, che è negativo per n dispari e positivo per n pari.

I limiti del tipo $\lim\limits_{x \to x_0} \left(a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0 \right)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, sono stati già trattati nel paragrafo sulla continuità delle funzioni polinomiali.

Passiamo ora a trattare il caso dei limiti delle funzioni razionali fratte, ovvero delle funzioni esprimibili come $f(x) = \dfrac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + ... + b_1\, x + b_0}$, ovvero i quozienti di due polinomi.

Calcoliamo anzitutto: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + ... + b_1\, x + b_0}$, per il quale, operando in analogia con il caso dei polinomi, sarà:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + ... + b_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n} \right)}{x^m \left(b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + ... + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m} \right)} .$$

Occorre a questo punto confrontare gli esponenti n e m.

Risulta:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-m} \cdot \dfrac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + ... + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}} = sgn\left(\dfrac{a_n}{b_m} \right) \cdot (+\infty) & \text{se } n > m \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{m-n}} \cdot \dfrac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + ... + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}} = 0 & \text{se } n < m \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_n + \dfrac{b_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{b_1}{x^{n-1}} + \dfrac{b_0}{x^n}} = \dfrac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m \end{cases} .$$

Passiamo infine a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + ... + b_1\, x + b_0}$.

Operando in maniera analoga ai casi precedenti avremo:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-m}\cdot\dfrac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}} = sgn\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)\cdot(+\infty) & \text{se } n>m \\ & n-m \text{ pari} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-m}\cdot\dfrac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}} = sgn\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)\cdot(-\infty) & \text{se } n>m \\ & n-m \text{ dispari} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{m-n}}\cdot\dfrac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+...+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}} = 0 & \text{se } n<m \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+...+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_n+\dfrac{b_{n-1}}{x}+...+\dfrac{b_1}{x^{n-1}}+\dfrac{b_0}{x^n}} = \dfrac{a_n}{b_n} & \text{se } n=m \end{cases}.$$

Passiamo a considerare ora i limiti al finito, ovvero:
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_1\,x+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+...+b_1\,x+b_0}$.

Occorre distinguere due casi, a seconda che x_0 sia o meno una radice del denominatore.

Se $b_m\,x_0^m+b_{m-1}\,x_0^{m-1}+...+b_1\,x_0+b_0\neq 0$, nel trattare la continuità delle funzioni razionali fratte si è visto che :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_1\,x+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+...+b_1\,x+b_0}=\frac{a_n\,x_0^n+a_{n-1}\,x_0^{n-1}+...+a_1\,x_0+a_0}{b_m\,x_0^m+b_{m-1}\,x_0^{m-1}+...+b_1\,x_0+b_0}.$$

Se invece $b_m\,x_0^m+b_{m-1}\,x_0^{m-1}+...+b_1\,x_0+b_0=0$, occorrerà distinguere tre casi, ipotizzando che x_0 sia una radice di ordine α (eventualmente anche con $\alpha=0$) per il numeratore e di ordine β (ovviamente con $\beta\neq 0$) per il denominatore.

Potremo allora scrivere : $\dfrac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_1\,x+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+...+b_1\,x+b_0}=\dfrac{(x-x_0)^\alpha}{(x-x_0)^\beta}\cdot\dfrac{\mathcal{P}_{n-\alpha}(x)}{\mathcal{P}_{m-\beta}(x)}$,

con $\mathcal{P}_{n-\alpha}(x_0)\neq 0$ e $\mathcal{P}_{m-\beta}(x_0)\neq 0$.

Avremo:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+...+b_0}=\dfrac{\mathcal{P}_{n-\alpha}(x_0)}{\mathcal{P}_{m-\alpha}(x_0)}\in\mathbb{R} & \text{se } \alpha=\beta \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+...+b_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\mathcal{P}_{n-\alpha}(x_0)}{\mathcal{P}_{m-\beta}(x_0)}=0 & \text{se } \alpha>\beta \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+...+a_0}{b_m\,x^m+b_{m-1}\,x^{m-1}+...+b_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{(x-x_0)^{\beta-\alpha}}\cdot\dfrac{\mathcal{P}_{n-\alpha}(x_0)}{\mathcal{P}_{m-\beta}(x_0)}=\infty & \text{se } \alpha<\beta \end{cases}$$

Il segno dell' infinito nel caso $\alpha<\beta$ dovrà essere determinato combinando vari fattori :

a) l'essere $\beta-\alpha$ numero pari o numero dispari;

b) il segno di $\dfrac{\mathcal{P}_{n-\alpha}(x_0)}{\mathcal{P}_{m-\beta}(x_0)}$;

c) i limiti unilateri per $x\to x_0^-$ e per $x\to x_0^+$.

Esempio 69 : Vediamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x-1)}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}$.

Esempio 70 : Vediamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-x^3}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x-1)}{x^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{x-1}{x-2}=0$.

Esempio 71 : Vediamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x^4-2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(x-1)}{x^3(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x-2}=\infty$.

Più precisamente: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{x-2} = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{x-1}{x-2} = +\infty$.

Esempio 72 : Vediamo che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{x^5-2x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(x-1)}{x^4(x-2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x-1}{x-2} = +\infty$.

Infatti $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x-1}{x-2} = +\infty$.

LIMITI DI FUNZIONI E LIMITI DI SUCCESSIONI

Esiste un Teorema che stabilisce la relazione intercorrente tra limiti di funzioni e limiti di successioni. Vale infatti il seguente:

Teorema 29 : Data una funzione $f(x)$, sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per D_f. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ per ogni successione $\{x_n\} \subset D_f$ tale che $x_n \to x_0$.

E' bene osservare come questo Teorema sia utilizzabile principalmente per la verifica della non esistenza di un limite di funzione, come si può vedere dal seguente esempio.

Esempio 73 : Vediamo che non esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$.

Consideriamo le due successioni $a_n = n\pi, n\in\mathbb{N}$ e $b_n = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n\in\mathbb{N}$.

Si verifica immediatamente che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, dopo di che abbiamo:

$\operatorname{tg} a_n = \operatorname{tg}(n\pi) = 0$ mentre $\operatorname{tg} b_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = 1$.

Dovendo l'immagine di ogni successione, per l'esistenza del limite della funzione, convergere allo stesso limite, concludiamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$ non esiste.

LIMITI DI FUNZIONI E SUCCESSIONI MONOTONE

La proprietà di essere funzione o successione monotòna consente di stabilire Teoremi che riguardano l'esistenza ed il valore dei limiti per le funzioni che soddisfano tale proprietà. La principale conseguenza della monotonia consiste nel fatto che essa garantisce l'esistenza del limite, ovvero funzioni e successioni monotòne non possono non ammettere limite (eventualmente solo sinistro o destro per le funzioni).

Le funzioni crescenti o decrescenti (strettamente e non) vengono dette **monotòne**.

Per le **successioni** le analoghe definizioni possono essere così enunciate:

$$\begin{cases} a_n \text{ successione strettamente crescente} & \text{se } n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} > a_{n_1} \\ a_n \text{ successione crescente (non decrescente)} & \text{se } n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1} \\ a_n \text{ successione strettamente decrescente} & \text{se } n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} < a_{n_1} \\ a_n \text{ successione decrescente (non crescente)} & \text{se } n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \leq a_{n_1} \end{cases}.$$

Per avere una successione monotòna basta che l'opportuna implicazione valga almeno da un certo indice in poi.

Per funzioni e successioni monotòne valgono i seguenti Teoremi:

Teorema 30 : Ogni successione monotòna ammette limite, ed inoltre si ha:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \operatorname{Sup}\{a_n\}$ se a_n è monotòna crescente

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \operatorname{Inf}\{a_n\}$ se a_n è monotòna decrescente.

Dopo le successioni, vediamo l'analogo Teorema per le funzioni.

Teorema 31 : Data una funzione $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $]a,b[\subset D_f$. Allora si ha che:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \operatorname{Inf}\{f(]a,b[)\}$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \operatorname{Sup}\{f(]a,b[)\}$ se $f(x)$ è crescente in $]a,b[$;

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \text{Sup}\{f(]a,b[)\}$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \text{Inf}\{f(]a,b[)\}$ se $f(x)$ è decrescente in $]a,b[$.
Dovranno distinguersi due casi: quello di $f(x)$ limitata e quello di $f(x)$ non limitata in $]a,b[$, con l'ulteriore distinzione tra non limitatezza di $f(x)$ solo superiore, solo inferiore od entrambe.
Avremo ad esempio, nel caso di $f(x)$ limitata in $]a,b[$:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$,
(con $l_1 < l_2$ se $f(x)$ è crescente in $]a,b[$, con $l_1 > l_2$ se $f(x)$ è decrescente in $]a,b[$.
Nei casi di non limitatezza invece:
se $f(x)$ è crescente, limitata inferiormente ma non superiormente in $]a,b[$, allora:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$;
se $f(x)$ è crescente, limitata superiormente ma non inferiormente in $]a,b[$, allora:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$;
se $f(x)$ è crescente e non limitata, sia superiormente che inferiormente in $]a,b[$, allora:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$;
se $f(x)$ è decrescente, limitata inferiormente ma non superiormente in $]a,b[$, allora:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$;
se $f(x)$ è decrescente, limitata superiormente ma non inferiormente in $]a,b[$, allora:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$;
se $f(x)$ è decrescente e non limitata, sia superiormente che inferiormente in $]a,b[$:
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.

LIMITI NOTEVOLI

Vediamo ora il calcolo di tre limiti: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$, nonchè varie loro importanti applicazioni.
Si tratta di tre limiti particolari, che verranno usati per calcolare le derivate fondamentali della funzione esponenziale e logaritmica, delle potenze nonchè delle funzioni trigonometriche. Anche se danno luogo a forme indeterminate, non possono essere risolti con la Regola di De L'Hopital, che richiede l'uso delle derivate, altrimenti si origina un circolo vizioso: per risolvere tali limiti si userebbero le derivate, ma per calcolare le derivate occorrono questi limiti. Dei tre limiti notevoli vedremo anche numerose applicazioni che verranno usate nel seguito.

IL NUMERO DI NEPERO e

Introduciamo ora una delle più importanti costanti della matematica: il numero irrazionale e.
Questo numero viene definito come il limite della seguente successione:
$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e risulta $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
La dimostrazione si articola su due fasi: si verifica che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente, poi si verifica che risulta limitata superiormente, per cui, per il Teorema 30 sul limite delle successioni monotòne, essa ammette limite finito.
Tale valore viene denotato con la lettera e, è chiamato numero di Nepero, è un numero irrazionale e vale circa $e \cong$ 2,71828182845..... .
Vediamo varie applicazioni del $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

e1) Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Avremo: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$.

e2) Abbiamo anche: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k}=e\,,\ \forall\, k\in\mathbb{R}$.

Infatti : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}=e\cdot 1^k=e\cdot 1=e$.

Ovvero: sommando (o sottraendo) una costante nell'esponente il limite non cambia.

e3) Vediamo ora che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e$. Infatti, posto $m=n+1$, otteniamo:

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}=e$, per il limite e2).

In maniera analoga si vede che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n}=e\,,\ \forall\, k\in\mathbb{R}$.

Ovvero: sommando (o sottraendo) una costante nel denominatore il limite non cambia.

e4) Passiamo ora a considerare il limite di funzione $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Essendo: $\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$, dove $[x]$ indica la Parte intera di x, e dato che $x>0$, avremo anche:

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, avendo posto $n=[x]$.

Per il Teorema del confronto e per i limiti e1) ed e3) segue che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Quindi il limite non cambia se la variabile tende a $+\infty$ nel continuo invece che attraverso i soli valori naturali.

e5) Calcoliamo ora $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. Con la sostituzione $x=-y$ otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=e\text{, per il limite e3).}$$

Possiamo sintetizzare i limiti e4) ed e5) con $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Se la variabile è reale il limite è lo stesso, basta che la variabile x assuma valori sempre più grandi indipendentemente dal segno.

e6) Da $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, posto $t=\frac{1}{x}$, otteniamo anche :

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

e7) Calcoliamo infine $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Posto $\frac{\alpha}{x}=\frac{1}{t}$ si ha $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha\beta t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$.

Ovvero : moltiplicando per una costante o l'esponente o il termine variabile contenuto nella base si ottengono, come limite, le potenze del numero e.

Esempio 74 : Calcoliamo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$. Essendo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)}{x}\right)^x$, per il limite e7) sarà $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

LOGARITMI NATURALI O NEPERIANI

Usando come base il numero e, definiamo la funzione esponenziale $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+, f(x)=e^x$, il cui grafico è quello di una esponenziale a base maggiore di 1. La funzione inversa dell'esponenziale in base e è la funzione logaritmica $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, f(x)=\log x$, dove per convenzione si evita di scrivere la base proprio per significare che questa è il numero di Nepero e.
Altri scrivono $f(x)=\ln x$, dove ln sta per logaritmo naturale.
Particolarmente utilizzata è la trasformazione $a=e^{\log a}, a>0$, che consente di scrivere un qualsiasi numero $a>0$ come potenza del numero e.
Per quanto riguarda le funzioni, posto $f(x)>0$, possiamo scrivere :
$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\log f(x)}$.

Esempio 75 : Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$. Essendo:
$\dfrac{\log(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot\log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$, sarà, per il Teorema 14:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log e = 1$.

LIMITI DI FUNZIONI DEL TIPO $f(x)^{g(x)}$

Passiamo ad esaminare i limiti di una funzione che sia espressa come una potenza avente variabile tanto la base quanto l'esponente. Dovrà per questo essere $f(x)>0$ per non rendere priva di significato l'espressione. Vale il seguente:
Teorema 32 : Siano date $f(x)$ e $g(x)$, con $x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per $D_f\cap D_g$, sia $f(x)>0$ in un intorno del punto x_0, e sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1, l_1>0$, e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2\in\mathbb{R}$. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2}$.
Dimostrazione : Essendo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log f(x)}$, basta applicare il Teorema 14 sul limite della funzione composta : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\log f(x)}$ e poi il Teorema sul limite del prodotto nell'esponente $g(x)\cdot\log f(x)$ per avere la tesi. ●

LE FORME INDETERMINATE 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0

Ci sono altri casi di forme indeterminate oltre a quelle cosidette aritmetiche, e sono le tre forme 1^∞, 0^0 e ∞^0 che si possono incontrare per limiti di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$.
Esse non sono delle effettive novità rispetto alle quattro forme indeterminate originarie, in quanto, potendosi scrivere $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\log f(x)}$, vediamo come queste tre forme indeterminate di tipo esponenziale altro non sono che una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$ che si presenta nell'esponente $g(x)\cdot\log f(x)$.

Il limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ può essere considerato come il caso più notevole di forma indeterminata 1^∞: anche se le potenze dell'unità sono tutte uguali a 1, quando la base tende a 1 (non è uguale a 1) e l'esponente diventa sempre più grande, positivo oppure negativo, nulla si può dire su quello che sarà il risultato del limite.
Studiamo ora quei casi che non sono invece indeterminati.

Limite di funzione convergente elevata a funzione divergente
Nel caso del limite di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, quando $f(x)$ è convergente ad un valore reale $l > 0$ e $g(x)$ tende all'infinito, occorre distinguere il segno dell'infinito a cui tende l'esponente $g(x)$ e se il valore del limite l è minore o maggiore di 1.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 1$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$;
se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l < 1$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0^+$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l > 1$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0^+$;
se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l < 1$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$.
La verifica di questi risultati si ottiene analizzando il limite dell'esponente di $e^{g(x)\cdot\log f(x)}$ e ricordando i limiti all'infinito della funzione esponenziale.

Esempio 76 : Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{x+2}\right)^x$. Abbiamo che $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{x+2}\right) = 3$ mentre $x \to +\infty$, per cui $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{x+2}\right)^x = +\infty$.

Esempio 77 : Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{5x+2}\right)^x$. Abbiamo che $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{5x+2}\right) = \frac{3}{5}$ mentre $x \to +\infty$, per cui $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{5x+2}\right)^x = 0$.

Esempio 78 : Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = 1$ e che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = +\infty$.

Per il primo limite abbiamo: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = 1$,

in quanto $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$ mentre $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Per il secondo avremo : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x = +\infty$,

in quanto $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ mentre l'esponente tende a $+\infty$.

Limite di funzione infinitesima elevata a funzione divergente
Nel caso del limite di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, quando $f(x)$ tende a zero e $g(x)$ tende all'infinito, occorre distinguere il segno dell'infinito a cui tende l'esponente $g(x)$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0^+$;
se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$.

La verifica di questi risultati si ottiene analizzando il limite dell'esponente di $e^{g(x)\cdot\log f(x)}$ e ricordando i limiti all'infinito della funzione esponenziale.

Esempio 79 : Calcoliamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3x}{5x^2+2}\right)^{-x}$. Abbiamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3x}{5x^2+2}\right)=0^+$ mentre l'esponente tende a $-\infty$, per cui $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3x}{5x^2+2}\right)^{-x}=+\infty$.

Limite di funzione divergente elevata a funzione divergente
Non è poi indeterminato il limite di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, quando $f(x)$ diverge positivamente mentre $g(x)$ diverge, positivamente oppure negativamente. Infatti:
Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ e se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=+\infty$;
se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ e se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=0^+$.
La verifica di questi risultati si ottiene analizzando il limite dell'esponente di $e^{g(x)\cdot\log f(x)}$ e ricordando i limiti all'infinito della funzione esponenziale.

Esempio 80 : Calcoliamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x^3}{x^2+2}\right)^{1-x}$. Abbiamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x^3}{x^2+2}\right)=+\infty$ mentre l'esponente tende a $-\infty$, per cui $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x^3}{x^2+2}\right)^{1-x}=0^+$.

IL LIMITE $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$ E SUE APPLICAZIONI

Vogliamo calcolare il valore del $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$, che si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.
Posto $a^x-1=\dfrac{1}{y}$, se $x\to0$ allora $y\to\infty$ ed inoltre $x=\log_a\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$, per cui, operando per sostituzione, otteniamo:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y\cdot\log_a\left(1+\dfrac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log_a\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y}=$$

$$=\frac{1}{\log_a\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y}=\frac{1}{\log_a e}=\log a\,.$$ Quindi $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log a$.

Come caso particolare abbiamo $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Esempio 81 : Se vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-1}{x}$, avremo:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-1}{x^2}\cdot x=\log a\cdot0=0$; infatti posto $t=x^2$, si ha :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{a^t-1}{t}=\log a$ per il limite notevole già calcolato.

Esempio 82 : Se calcoliamo $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x^2}$, otterremo: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$, il cui segno è determinato dal segno di $\log a$, positivo se $a>1$ e negativo se $0<a<1$, e da quello di $x\to0$, a seconda che sia $x\to0^+$ oppure $x\to0^-$.

Esempio 83 : Vediamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$. Tale limite servirà per calcolare la derivata di una potenza. Posto $1+x=e^t$, si ha $x=e^t-1$, da cui otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1}{e^t-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha t}\cdot\alpha\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\alpha\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{e^t-1}{t}}=1\cdot\alpha\cdot 1=\alpha\,.$$

IL LIMITE $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ E SUE APPLICAZIONI

Vediamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$. Infatti, se $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, vale la disequazione: $\operatorname{sen}x<x<\operatorname{tg}x$, dalla quale, dividendo per $\operatorname{sen}x>0$, si ha : $1<\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}<\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x}=\dfrac{1}{\cos x}$ e passando ai reciproci : $\cos x<\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}<1$.

Per il Teorema 9 (del confronto), essendo $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$, otteniamo che $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

Passando al limite sinistro, essendo $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ e $\operatorname{sen}x<0$, dalla $\operatorname{tg}x<x<\operatorname{sen}x$, dividendo per $\operatorname{sen}x<0$ e passando ai reciproci otteniamo ancora $\cos x<\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}<1$, dalla quale, per identiche considerazioni, segue $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ e quindi la tesi.

Esempio 84 : Visto il precedente risultato, abbiamo anche:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1\,.$$

Esempio 85 : Se vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{x}$, avremo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}=\lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}=3\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}=3\,.$$

Esempio 86 : Se vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x^2}{x}$, avremo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}\cdot x=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\cdot\lim_{x\to 0}x=1\cdot 0=0\,.$$

Esempio 87 : Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$. Moltiplicando e dividendo per $(1+\cos x)$ si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\operatorname{sen}x\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0\,.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$.

Esempio 88 : Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Con procedura analoga all'Esempio 87 sarà invece:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Esempio 89 : Per concludere calcoliamo $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{a^{x^2}-1}$.

Sarà $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{a^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{a^{x^2}-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\log a}=\dfrac{1}{2}\cdot\log_a e=\log_a\sqrt{e}$.

INFINITESIMI E INFINITI

Può essere di notevole aiuto, nel calcolo dei limiti ed in altri problemi ad esso collegati, un'analisi della maggiore o minore "rapidità" con cui una data funzione tende a zero oppure tende all'infinito rispetto ad altre funzioni presenti nell'espressione del limite.

Il passo successivo consisterà nel definire, in termini rigorosi, cosa intendiamo quando affermiamo che una funzione tende a zero (tende in quantità a sparire) più velocemente di un'altra, oppure quando diciamo che una funzione diventa sì illimitatamente grande, ma più lentamente o più velocemente di un'altra funzione altrettanto divergente. Vedremo come usare questi concetti nel calcolo dei limiti e nella risoluzione delle forme indeterminate.

Passiamo a definire il confronto tra infinitesimi e, analogamente, il confronto tra infiniti.

CONFRONTO TRA INFINITESIMI

Siano date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, ambedue infinitesime per $x\to x_0$, ovvero tali che : $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$.

Definizione 61 : Diremo che:

1) $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ se $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$;

2) $f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ se $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$;

3) $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine se $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

4) $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili se $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ non esiste .

Esaminiamo, a titolo esemplificativo, solo la prima di queste definizioni.

Abbiamo il limite di un quoziente, dove sia numeratore che denominatore tendono a zero. L'annullarsi del numeratore dovrebbe far tendere a zero la frazione, mentre il tendere a zero del denominatore dovrebbe far tendere la frazione all'infinito.

Se supponiamo che risulti $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, ciò significa che l'azione del numeratore prevale su quella del denominatore, e ciò avviene per la maggiore rapidità del numeratore stesso nel tendere a zero rispetto al denominatore. Possiamo sintetizzare dicendo che il numeratore, cioè l'infinitesimo di ordine superiore, tende a zero più rapidamente del denominatore.

Esempio 90 : Essendo $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$, l'infinitesimo $f(x)=1-\cos x$, per $x\to 0$, è di ordine superiore rispetto a $g(x)=x$.

Esempio 91 : Se consideriamo le due funzioni $f(x)=x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ e $g(x)=x$, ambedue infinitesime per $x\to 0$, dato che $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\operatorname{sen}t=\text{n.e.}$, risulta che i due infinitesimi non sono tra loro confrontabili.

CONFRONTO TRA INFINITI

Siano date due funzioni, $f(x)$ e $g(x)$, ambedue infinite per $x\to x_0$, ovvero tali che :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (indipendentemente dal segno).
Definizione 62 : Diremo che:
1) $f(x)$ è infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;
2) $f(x)$ è infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
3) $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
4) $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste .
Possiamo interpretare queste definizioni, in maniera analoga a quelle degli infinitesimi, dicendo, ad esempio nel primo caso, che il numeratore tende all'infinito più rapidamente del denominatore, ecc... Intendiamo, nel caso di infiniti e infinitesimi non confrontabili, che non è possibile stabilire alcuna relazione tra le rispettive "rapidità".

INFINITESIMI E INFINITI CAMPIONE
Solitamente si scelgono, per fare confronti, infinitesimi ed infiniti che, per la semplicità della loro espressione, vengono chiamati infinitesimi o infiniti campione. La scelta di questi non è vincolante, ma viene adattata anche al tipo di confronto a cui si intende procedere, e dipende ovviamente, questa volta in modo vincolante, dal valore x_0 a cui tende la variabile x.
Ad esempio:
se $x \to 0$ si usa come infinitesimo campione $f(x) = x$;
se $x \to 0$, si usa come infinito campione $f(x) = \frac{1}{x}$;
se $x \to x_0$, $x_0 \neq 0$ si usa come infinitesimo campione $f(x) = x - x_0$;
se $x \to x_0$, $x_0 \neq 0$ si usa come infinito campione $f(x) = \frac{1}{x - x_0}$;
se $x \to \infty$ si usa come infinitesimo campione $f(x) = \frac{1}{x}$;
se $x \to \infty$ si usa come infinito campione $f(x) = x$.

PARTE PRINCIPALE DI UN INFINITESIMO (O DI UN INFINITO)
Considerata una funzione $f(x)$ che sia un infinitesimo (o un infinito), ma non quello campione, confrontiamola con un'opportuna potenza dell'infinitesimo (o infinito) campione da noi scelto, sia esso $h(x)$.
Definizione 63 : Diremo che $k \cdot [h(x)]^\alpha$, con $k, \alpha \in \mathbb{R}^*$ è la **parte principale** dell'infinitesimo (o dell'infinito) $f(x)$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{k\,[h(x)]^\alpha} = 1$. Si dirà anche che l'infinitesimo (o infinito) $f(x)$ è di ordine α rispetto all'infinitesimo (o all'infinito) $h(x)$.
A seconda del valore dell'esponente reale α potrà talvolta non essere calcolabile il limite ma solo un limite unilatero.
Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[h(x)]^\alpha} = k \neq 0$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{k\,[h(x)]^\alpha} = 1$, ovvero, quando $x \to x_0$, le due funzioni $f(x)$ e $k \cdot [h(x)]^\alpha$ tendono ad essere "quasi uguali", dato che il limite del loro rapporto tende ad 1. Abbiamo così una informazione più completa sul comportamento di $f(x)$ quando $x \to x_0$, prendendo a paragone la rapidità dell'infinitesimo (o dell'infinito) $k \cdot [h(x)]^\alpha$.

Esempio 92 : Da $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, preso come infinitesimo campione $h(x) = x$, avremo che x è la parte principale dell'infinitesimo $f(x) = \operatorname{sen} x$, per $x \to 0$.

Esempio 93 : Da $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, preso ancora come infinitesimo campione $h(x) = x$, avremo che $\frac{1}{2} x^2$ è la parte principale dell'infinitesimo $f(x) = 1 - \cos x$, per $x \to 0$.

Lo scopo pratico di queste definizioni consiste nella possibilità di poter sostituire, nel calcolo di un limite, una funzione (infinitesima o infinita) con un'altra che renda più agevole la determinazione del limite. Questa procedura andrà comunque eseguita sempre con estrema cautela, specie in presenza di somme e differenze di funzioni.

Esempio 94 : Calcoliamo $\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$. Per il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ avremo:

$$\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \right]^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{t \to 0} \left[(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right]^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^1 = e .$$

Potevamo quindi calcolare: $\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Passiamo infine al cosiddetto principio di sostituzione degli infinitesimi o degli infiniti, per enunciare il quale occorrono alcune ulteriori definizioni.

EQUIVALENZA ASINTOTICA

Definizione 64 : Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si dicono **asintoticamente equivalenti** per $x \to x_0$, e scriveremo $f(x) \sim g(x)$, se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ovviamente, se due infinitesimi (o due infiniti) $f(x)$ e $g(x)$ sono asintoticamente equivalenti, essi sono anche dello stesso ordine. Non è vero il viceversa, ovvero due infinitesimi (o due infiniti) dello stesso ordine non sono necessariamente asintoticamente equivalenti, in quanto se fosse $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, allora sarebbe anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{k \cdot g(x)} = 1$ e quindi saranno asintoticamente equivalenti gli infinitesimi (o gli infiniti) $f(x)$ e $k \cdot g(x)$.

Osserviamo comunque come la definizione di equivalenza asintotica riguardi funzioni qualunque e non solo gli infinitesimi o gli infiniti.

Esempio 95 : Da $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, otteniamo che $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$.

Da $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ otteniamo che $a^x - 1 \sim x \cdot \log a$, che si può trasformare anche nella $a^x \sim 1 + x \cdot \log a$, sempre ovviamente per $x \to 0$.

Da $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ si ha : $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ da cui: $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2} x^2$, per $x \to 0$.

RELAZIONE DI "*o* PICCOLO"

Definizione 65 : Date $f(x)$ e $g(x)$, si dice che la funzione $f(x)$ è, per $x \to x_0$, **trascurabile** rispetto a $g(x)$, e si scrive $f(x) = o(g(x))$ (che si legge $f(x)$ è "***o* piccolo**" rispetto a $g(x)$), se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ovvero, vista la definizione: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$.

Esempio 96 : Essendo $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$, scriveremo che $1-\cos x=o(x)$ per $x\to 0$, ed anche che $\cos x=1-o(x)$, che si può leggere come "$\cos x$ è circa uguale ad 1 meno un termine trascurabile rispetto ad x".

Se $f(x)$ è infinitesima per $x\to x_0$, risulta $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1}=0$, e per dire che $f(x)$ è un infinitesimo si può allora anche scrivere: $f(x)=o(1)$.

La definizione di funzione trascurabile comporta una interpretazione diversa a seconda che venga applicata agli infinitesimi oppure agli infiniti.
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi, allora $f(x)=o(g(x))$ significa che $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$, ovvero è trascurabile l'infinitesimo che scompare più rapidamente.
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti, allora $f(x)=o(g(x))$ significa che $f(x)$ è infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$, ovvero è trascurabile l'infinito che cresce più lentamente.

Valgono i seguenti:
Teorema 33 : Siano date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, tali che $f(x)\sim g(x)$ per $x\to x_0$. Allora $f(x)-g(x)=o(f(x))$ e $f(x)-g(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$, ovvero la differenza tra due funzioni asintoticamente equivalenti risulta trascurabile rispetto ad ambedue le funzioni.
Dimostrazione : Da $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ segue:
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f(x)}-\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1-1=0$, ovvero $f(x)-g(x)=o(f(x))$.
Analogamente per la seconda relazione. ●
Teorema 34 : Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, si ha che $f(x)\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x))$.
Dimostrazione : Immediata, basta calcolare:
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot o(g(x))}{f(x)\cdot g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{f(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{o(g(x))}{g(x)}=1\cdot 0=0$. ●

E' bene notare come certe relazioni quantitative che scaturiscono da risultati di limite non consentono assolutamente deduzioni analoghe a quelle che valgono in campo numerico. Se a e b sono due numeri reali diversi da zero, sappiamo che $a-b=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$: se la loro differenza è 0 allora il loro quoziente è pari a 1 e viceversa.
Non è assolutamente vero invece che se il limite del quoziente di due funzioni tende ad 1, ovvero sono funzioni asintoticamente equivalenti, allora il limite della loro differenza tende a 0 e viceversa. Vediamo due esempi.
Siano, per $x\to+\infty$, $f(x)=x^2+x$ e $g(x)=x^2$. Essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2}=1$, risulta $f(x)\sim g(x)$, ma $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+x-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\neq 0$.
Siano poi $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ e $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Si ha che $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, ma

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty\neq 1.$$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Supponiamo di dover calcolare un limite che coinvolga, in un rapporto, somme o differenze di funzioni. Vale il seguente cosiddetto Principio di sostituzione:

Teorema 35 : Siano date le funzioni $f_1(x),\ f_2(x),\ g_1(x)$ e $g_2(x)$, e sia poi, per $x \to x_0$, $f_2(x) = o(f_1(x))$ e $g_2(x) = o(g_1(x))$.

Allora si ha che $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Dimostrazione : Da $f_2(x) = o(f_1(x))$ si ha $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0$ mentre da $g_2(x) = o(g_1(x))$ si ha $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0$. Allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)\cdot\left(1+\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)}{g_1(x)\cdot\left(1+\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1+\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \dfrac{1+0}{1+0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$. •

Ovvero, le due funzioni che sono trascurabili possono, nella somma a numeratore e in quella a denominatore, essere scartate.

Se le funzioni $f_1(x),\ f_2(x),\ g_1(x)$ e $g_2(x)$ fossero infinitesime, possiamo dire che in una somma conta solo l'infinitesimo di ordine inferiore, ovvero quello più lento, e quindi in una somma di infinitesimi si possono scartare gli infinitesimi di ordine superiore.

Se le funzioni $f_1(x),\ f_2(x),\ g_1(x)$ e $g_2(x)$ fossero invece infinite, il principio di sostituzione si può enunciare dicendo che in una somma di infiniti si possono trascurare gli infiniti più lenti, ovvero quelli di ordine inferiore.

Nel tendere a zero prevale la funzione più lenta, nell'andare all'infinito prevale invece la funzione più veloce.

Si noti che si parla solo di scartare quegli infinitesimi (infiniti) di ordine superiore (inferiore), e non si parla assolutamente di sostituire un infinitesimo (o un infinito) con un altro dello stesso ordine.

Se la somma coinvolge infiniti, infinitesimi e altre funzioni, nè infinite nè infinitesime, allora occorre basarsi sugli infiniti, e quindi considerare alla stregua di infiniti di ordine inferiore tutte le altre funzioni.

Esempio 97 : Si debba calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sqrt[3]{x}+\operatorname{sen}^3 x}{x+x^2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)}{g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)}$.

Tutte le funzioni sono infinitesime per $x \to 0$, ed inoltre $f_1(x) = o(f_2(x))$, così come $f_3(x) = o(f_2(x))$, dato che $\operatorname{sen}^3 x \sim x^3$; infine $g_1(x) = o(g_3(x))$ e $g_2(x) = o(g_3(x))$. Per il principio di sostituzione avremo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sqrt[3]{x}+\operatorname{sen}^3 x}{x+x^2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 1$.

Esempio 98 : Si debba calcolare $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}-x^3}{x+x^2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)}{g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)}$.

Tutte le funzioni sono infinite per $x \to +\infty$, inoltre $f_1(x) = o(f_3(x))$, $f_2(x) = o(f_3(x))$, $g_1(x) = o(g_2(x))$ e $g_3(x) = o(g_2(x))$. Per il principio di sostituzione avremo:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}-x^3}{x+x^2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x) = -\infty$.

Esempio 99 : Si debba calcolare $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x-\cos x}{x+\operatorname{sen}^2 x+2^{-x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)}{g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)}$.

Vediamo anzitutto che $f_3(x) = \cos x$ e $g_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$ sono due funzioni limitate.
Invece $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = g_1(x) = x$ sono infiniti, mentre $g_3(x) = 2^{-x}$ è un infinitesimo.
Essendo, per $x \to +\infty$, $f_2(x) = o(f_1(x))$, per il Principio di sostituzione otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - \cos x}{x + \operatorname{sen}^2 x + 2^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty .$$

E' bene notare come non esista un principio analogo per il prodotto ed il quoziente.

ASINTOTI DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Abbiamo visto, nel caso di un punto di discontinuità di II specie per limite infinito, cosa si intenda per asintoto verticale per il grafico di una funzione. Ci sono poi altri due tipi di asintoti: quelli orizzontali e quelli obliqui.
Se il campo d'esistenza della funzione è illimitato (superiormente e/o inferiormente), possiamo calcolare il limite della funzione per $x \to +\infty$ e/o per $x \to -\infty$.
Definizione 66 : La retta $y = k$ è detta un **asintoto orizzontale destro** per il grafico della funzione $f(x)$ se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$.
Definizione 67 : La retta $y = k$ è detta un **asintoto orizzontale sinistro** per il grafico della funzione $f(x)$ se $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$.
Per il Teorema di unicità del limite, da una stessa parte, destra o sinistra, può esserci al massimo un asintoto orizzontale.

Esempio 100 : Dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$, l'esponenziale ha per asintoto orizzontale destro la retta $y = 0$, e a tale asintoto la funzione si dirige da sopra.
Esempio 101 : Dato che $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$, l'iperbole ha per asintoto orizzontale sinistro la retta $y = 0$, e a tale asintoto la funzione si dirige da sotto.
Esempio 102 : Dato che $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, la funzione ha per asintoto orizzontale sia destro che sinistro la retta $y = 0$, e a tale asintoto la funzione si dirige sia da sopra che da sotto, dato che $\operatorname{sen} x$ cambia periodicamente di segno per $x \to \infty$.

Vediamo infine il caso dell'asintoto obliquo.
Definizione 68 : La retta $y = mx + q$ è detta un **asintoto obliquo** per il grafico della funzione $f(x)$ se $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$, potendo tale limite valere solo per $x \to +\infty$ oppure per $x \to -\infty$, o da entrambe le parti.
Si deduce che condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè esista un asintoto obliquo è che risulti $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
Se $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$, a maggior ragione sarà: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - (mx + q)}{x} = 0$.
Ma allora: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x) - (mx + q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{mx + q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} - m = 0$,
da cui otteniamo: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Dovrà ovviamente risultare $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$. Trovato il possibile coefficiente angolare dell'asintoto obliquo, da $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ si ottiene anche:
$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + q)] = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] - \lim\limits_{x\to\infty} q = 0$, ovvero: $q = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$.

Affinchè esista l'asintoto obliquo deve esistere, finito e diverso da zero, il $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, che ci dà il coefficiente angolare m dell'asintoto, e deve poi esistere finito il $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, che ci fornisce invece l'aggiunta all'origine q.

Esempio 103 : Sia $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$. Dato che $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, potrebbe esserci, sulla destra e/o sulla sinistra, un asintoto obliquo.
Calcoliamo anzitutto: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1$, e calcoliamo poi:
$\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$.
Quindi $m=1$ e $q=-1$, per cui esiste l'asintoto obliquo ed ha equazione $y=x-1$.
Dato che i risultati trovati valgono per $x\to\infty$, tale retta è asintoto obliquo sia sulla destra che sulla sinistra.
Esempio 104 : Sia $f(x)=x+\operatorname{sen}x$. Dato che $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, potrebbe esserci, sulla destra e/o sulla sinistra, un asintoto obliquo.
Calcoliamo allora: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x}=1$.
Quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo con coefficiente angolare $m=1$.
Ma $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}[x+\operatorname{sen}x-x]=\lim_{x\to\infty}\operatorname{sen}x$, che non esiste, e quindi non c'è asintoto obliquo, anche se è risultata soddisfatta la prima condizione.

I TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO
Vediamo ora una serie di Teoremi che descrivono le proprietà, non puntuali ma locali, di una funzione che risulta continua in tutti i punti di un intervallo. Vedremo che una funzione continua trasforma intervalli limitati e chiusi in intervalli limitati e chiusi.

Teorema 36 (di Weierstrass) : Una funzione $f:D_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua in un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$, ammette minimo e massimo assoluti.
Detti m e M il minimo ed il massimo del codominio, possiamo così formalizzare tale Teorema :
$f(x)\in\mathcal{C}([a,b])\Rightarrow\exists\,x_1,x_2\in[a,b]:f(x_1)=m$ e $f(x_2)=M$.
Come caso più generale del Teorema, si ha che una funzione continua in un insieme limitato e chiuso (insieme compatto) ammette minimo e massimo assoluti.
Notiamo che tale Teorema esprime una condizione solo sufficiente e non necessaria per l'esistenza del minimo e del massimo assoluti di una funzione.

Teorema 37 (di Darboux o dei valori intermedi) : Se una funzione $f:D_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ risulta continua in un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$, essa assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo assoluti.
Ovvero : $f(x)\in\mathcal{C}([a,b])\Rightarrow\forall\,y:m\le y\le M,\exists\,x\in[a,b]:y=f(x)$.
Quindi ogni valore compreso tra il minimo ed il massimo del codominio è un valore effettivamente assunto dalla funzione, ovvero anche il codominio è un intervallo.
Questo Teorema può essere generalizzato. Se la funzione è continua in un intervallo, che può essere illimitato oppure non chiuso, non abbiamo più la garanzia che esistano minimo e massimo assoluti, ma esistono comunque gli estremi Inferiore e Superiore (anche infiniti) del codominio.

Possiamo allora concludere che la funzione assume tutti i valori compresi tra Inf$(\mathcal{C}D_f)$ e Sup$(\mathcal{C}D_f)$.
In ogni caso, quindi, una funzione continua trasforma un intervallo del dominio in un intervallo del codominio. Se l'intervallo del dominio è limitato e chiuso si ha che :
$f(x) \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow f([a,b]) = [m,M]$.

Come caso particolare del Teorema di Darboux vale il seguente:
Teorema 38 (degli zeri) : Una funzione $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in un intervallo $[a,b]$, che abbia minimo negativo e massimo positivo, si annulla almeno una volta:
$(f(x) \in \mathcal{C}([a,b]))$ **e** $(m \cdot M < 0) \Rightarrow \exists\, x \in [a,b] : f(x) = 0$.
Questo Teorema stabilisce che una funzione continua non può passare da valori negativi a valori positivi senza annullarsi almeno una volta.
Generalizzando, se la funzione risulta continua in un intervallo, che può essere illimitato oppure non chiuso, possiamo sostituire al segno del minimo e del massimo quello dell'estremo Inferiore e dell'estremo Superiore del codominio. Se la funzione è continua su tutta la retta reale $\mathbb{R}$, possiamo considerare come segni quelli del $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e del $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Esempio 105 : Sia $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1}$. La funzione è continua su tutta la retta reale $\mathbb{R}$; inoltre $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1} = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1} = +\infty$, per cui tale funzione si deve annullare almeno una volta.

Per le funzioni continue in un intervallo limitato e chiuso vale anche il
Teorema 39 (di Brouwer o del punto fisso) : Una funzione $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in un intervallo $[a,b]$, che lo trasforma in sè stesso : $f([a,b]) = [a,b]$, ammette almeno un punto fisso (o unito), ovvero un punto x_0 nel quale $f(x_0) = x_0$.
Dimostrazione : La funzione $y = f(x) - x$ è continua in $[a,b]$ in quanto differenza di due funzioni continue. Risulta $f(b) - b \leq 0$ e $f(a) - a \geq 0$ in quanto b è il massimo mentre a è il minimo del codominio. Se fosse $f(b) - b = 0$ oppure $f(a) - a = 0$ allora sarebbe $f(b) = b$ oppure $f(a) = a$ ed il punto unito sarebbe b oppure a. Altrimenti la funzione continua $f(x) - x$ va dal valore positivo $f(a) - a$ al valore negativo $f(b) - b$, e quindi, per il Teorema degli zeri, si deve annullare almeno una volta, ovvero $\exists\, x_0 : f(x_0) - x_0 = 0$, da cui segue $f(x_0) = x_0$.•

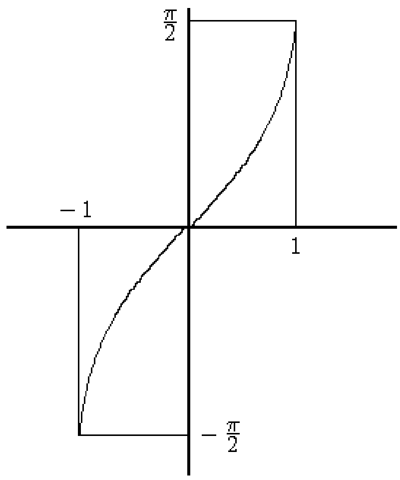
Vediamo infine il Teorema che si occupa dell'esistenza e della continuità della funzione inversa. Vale il seguente :
Teorema 40 : Se una funzione $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e strettamente monotòna in un intervallo, allora essa ammette funzione inversa f^{-1}, ed anche l'inversa è continua e strettamente monotòna.
Non occorre comunque che l'intervallo sia limitato o che sia chiuso, e si deve notare come la continuità nell'intervallo sia condizione sufficiente, ma non necessaria, per l'esistenza della funzione inversa.

LE INVERSE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Utilizzando il Teorema 40, determiniamo esistenza ed espressione dell'inversa per le funzioni trigonometriche $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

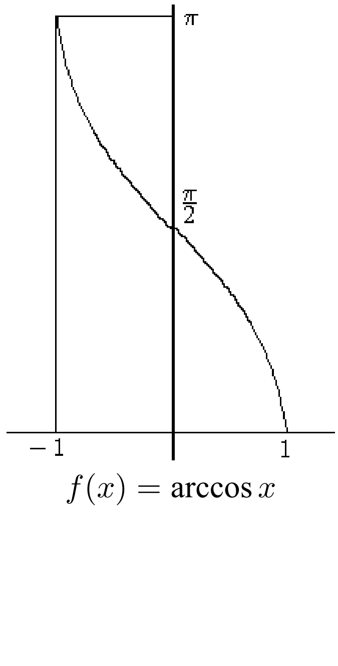
Le funzioni $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ **e** $f^{-1}(x) = \arccos x$

La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, e quindi in ogni intervallo di $\mathbb{R}$. Per renderla strettamente monotòna restringiamo il suo dominio all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dove la funzione è strettamente crescente. Quindi per il Teorema 40 essa risulta invertibile.
Da $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ risulta $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Se $y = \operatorname{sen} x$ allora si pone $x = \operatorname{arcsen} y$, e quindi l'inversa sarà $y = \operatorname{arcsen} x$.
Anzitutto, dato che gli angoli vengono misurati in radianti, e dato che la lunghezza del raggio della circonferenza trigonometrica è pari a 1, la misura di un angolo coincide con la lunghezza dell'arco da esso sotteso, quindi il termine arco può essere sostituito ad angolo.
Dire $y = \operatorname{sen} x$ significa che y è il seno dell'angolo x e quindi, equivalentemente, possiamo dire che x è l'arco (angolo) il cui seno vale y; questo spiega la notazione $x = \operatorname{arcsen} y$.
Per rappresentare il grafico dell'inversa nel piano cartesiano sappiamo che si devono poi scambiare le variabili, e quindi l'inversa sarà $y = \operatorname{arcsen} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



$f(x) = \operatorname{arcsen} x$

La funzione $f(x) = \cos x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, e quindi in ogni intervallo di $\mathbb{R}$. Per renderla strettamente monotòna restringiamo il suo dominio all'intervallo $[0, \pi]$, dove la funzione è strettamente decrescente. Quindi per il Teorema 40 essa risulta invertibile.
Da $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ risulta $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
Se $y = \cos x$ allora si pone $x = \arccos y$, e quindi l'inversa sarà $y = \arccos x$.



$f(x) = \arccos x$

Essendo:

$$
\begin{array}{lll}
\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 & \text{otteniamo} & \operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2} \\
\operatorname{sen} 0 = 0 & \text{otteniamo} & \operatorname{arcsen} 0 = 0 \\
\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \text{otteniamo} & \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \\
\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{otteniamo} & \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \\
\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{otteniamo} & \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \\
\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 & \text{otteniamo} & \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}
\end{array}
$$

Essendo:

$$
\begin{array}{lll}
\cos 0 = 1 & \text{otteniamo} & \arccos 1 = 0 \\
\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{otteniamo} & \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \\
\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{otteniamo} & \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \\
\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \text{otteniamo} & \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \\
\cos \frac{\pi}{2} = 0 & \text{otteniamo} & \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \\
\cos \pi = -1 & \text{otteniamo} & \arccos(-1) = \pi
\end{array}
$$

Siano dati due angoli complementari α e β : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, con $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$.
Sappiamo che $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta$.
Posto $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = t$, invertendo le due funzioni otteniamo:
$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arcsen} t \\ \beta = \arccos t \end{cases}$ da cui : $\begin{cases} \alpha = \operatorname{arcsen} t \\ \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos t \end{cases}$, e sommando le due uguaglianze si ha:
$\operatorname{arcsen} t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$.

Dato che le funzioni $y = \operatorname{arcsen} x$ e $y = \arccos x$ sono definite in $[-1, 1]$, per determinare il campo d'esistenza di funzioni composte del tipo $y = \operatorname{arcsen} f(x)$ oppure $y = \arccos f(x)$, una volta determinato il campo d'esistenza della $f(x)$, si dovrà imporre anche la condizione $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Esempio 106 : Sia $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x - 3)$. Dato che $e^x - 3$ è definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$, per determinare il campo d'esistenza dovremo imporre:
$-1 \leq e^x - 3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq e^x \leq 4 \Rightarrow \log 2 \leq x \leq \log 4$.

Le funzioni $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$

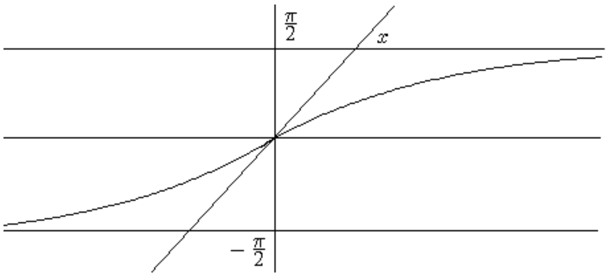
La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$. Per renderla strettamente monotòna restringiamo il suo dominio all'intervallo $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, dove la funzione è strettamente crescente. Quindi per il Teorema 40 essa risulta invertibile.
Da $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ risulta $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Se $y = \operatorname{tg} x$ allora si pone $x = \operatorname{arctg} y$, e quindi l'inversa sarà $y = \operatorname{arctg} x$.
Essendo:

$\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ otteniamo $\operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

$\operatorname{tg} 0 = 0$ otteniamo $\operatorname{arctg} 0 = 0$

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ otteniamo $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

Da $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ otteniamo $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}^+$;
da $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ otteniamo $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}^-$.



$f(x) = \operatorname{arctg} x$

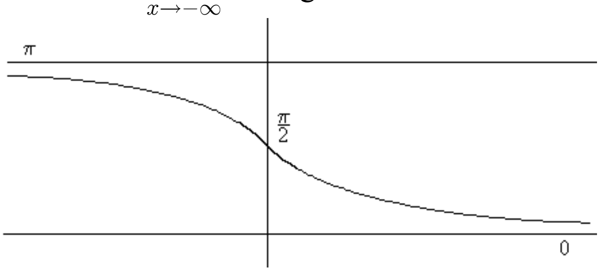
La funzione $f(x) = \operatorname{cotg} x$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$. Per renderla strettamente monotòna restringiamo il suo dominio all'intervallo $]0; \pi[$, dove la funzione è strettamente decrescente. Quindi per il Teorema 40 essa risulta invertibile.
Da $f :]0; \pi[\to \mathbb{R}$ risulta $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0; \pi[$.
Se $y = \operatorname{cotg} x$ allora si pone $x = \operatorname{arccotg} y$, e quindi l'inversa sarà $y = \operatorname{arccotg} x$.
Essendo:

$\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ otteniamo $\operatorname{arccotg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

$\operatorname{cogtg}\dfrac{\pi}{2} = 0$ otteniamo $\operatorname{arccotg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$

$\operatorname{cotg}\dfrac{3\pi}{4} = -1$ otteniamo $\operatorname{arccotg}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$

Da $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$ otteniamo $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0^+$;
da $\lim\limits_{x \to \pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$ otteniamo $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi^-$.



$f(x) = \operatorname{arccotg} x$

Presi due angoli complementari α e β: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, con $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$, sappiamo che $\operatorname{sen}\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta$. Quindi : $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\operatorname{cotg}\beta$.
Posto $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{cotg}\beta=t$, invertendo le due funzioni otteniamo :
$\begin{cases}\alpha=\operatorname{arctg}t\\ \beta=\operatorname{arccotg}t\end{cases}$ da cui si ha : $\begin{cases}\alpha=\operatorname{arctg}t\\ \frac{\pi}{2}-\alpha=\operatorname{arccotg}t\end{cases}$, e sommando le due uguaglianze si ha:
$\operatorname{arctg}t+\operatorname{arccotg}t=\frac{\pi}{2}$.