



UNIVERSITÀ  
DI SIENA  
1240

Prof. Lonzi Marco

**Dispense per il Corso di  
MATEMATICA GENERALE**

**Volume 2**

**AA. 2024/25**

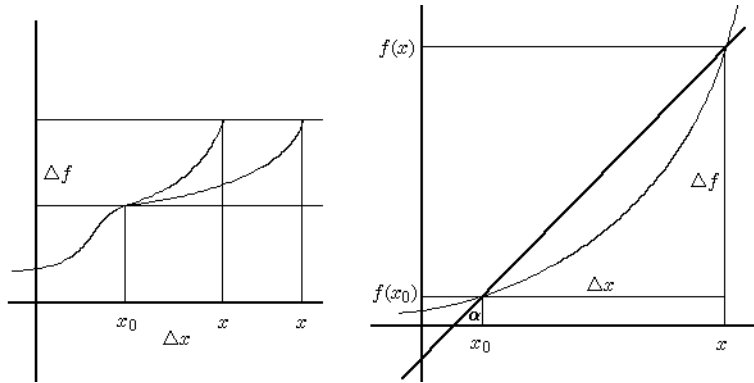
# CALCOLO DIFFERENZIALE

## INTRODUZIONE AL CONCETTO DI DERIVATA

Siano, d'ora in poi,  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$ , e  $x_0 \in D_f$  punto d'accumulazione per  $D_f$ . Il concetto di derivata intende esprimere quella che possiamo chiamare la "tendenza istantanea al cambiamento" della funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$ .

Misurare la differenza  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$  non fornisce una informazione esauriente in quanto funzioni diverse possono subire uno stesso incremento  $\Delta f$ , ottenuto però con incrementi diversi  $\Delta x = x - x_0$  della variabile indipendente. Per avere una indicazione più significativa si misura l'incremento relativo  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , ovvero si rapporta l'incremento della variabile dipendente a quello della variabile indipendente.

Il rapporto  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  prende il nome di **rapporto incrementale** della funzione nel punto  $x_0$ ; dato che  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m = \text{tg } \alpha$ , coefficiente angolare della retta passante per i due punti  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x, f(x))$ , vediamo come il rapporto incrementale rappresenti geometricamente la pendenza della retta secante al grafico di  $f(x)$  nei due punti dati.



Per avere infine la variazione relativa "istantanea" operiamo il passaggio al limite :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

L'ultima espressione è ottenuta dalla seconda ponendo  $x = x_0 + h = x_0 + \Delta x$ .

## DEFINIZIONE DI DERIVATA

Possiamo enunciare la

**Definizione 1** : Si dice che la funzione  $f(x)$  è **derivabile** nel punto  $x_0$  se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ esiste ed è finito.}$$

Se  $f(x)$  risulta derivabile in  $x_0$ , porremo  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

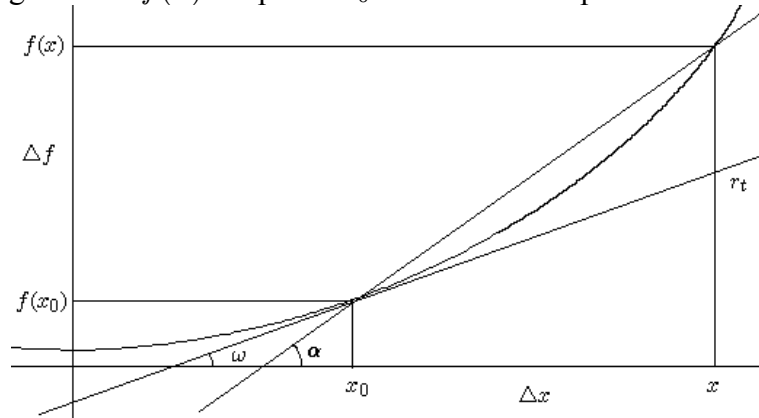
$f'(x_0)$  si legge "effe primo di  $x_0$ ".

Si può usare anche un'altra notazione, attribuita a Leibnitz, scrivendo  $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$ , che si legge "derivata di  $f(x)$ , fatta rispetto a  $x$ , nel punto  $x_0$ ".

## SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

Geometricamente il rapporto incrementale esprime il coefficiente angolare della retta secante al grafico di  $f(x)$  nei due punti  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x, f(x))$ :  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$ ; una volta operato il passaggio al limite i due punti in cui la retta taglia il grafico della funzione vengono a coincidere; avere due intersezioni coincidenti trasforma la retta da secante a tangente. Il **significato geometrico della derivata** è quindi quello di esprimere il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $f(x)$  nel punto  $x_0$ .

Sarà quindi  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = m = \operatorname{tg} \omega$ , dove  $\omega$  è l'angolo formato dalla retta tangente  $r_t(x)$  al grafico di  $f(x)$  nel punto  $x_0$  con il semiasse positivo delle ascisse.



## EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE

Dato che  $f'(x_0) = m = \operatorname{tg} \omega$ , possiamo scrivere l'**equazione della retta tangente** al grafico della funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$ . Essa sarà data da:  $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = m = f'(x_0)$ , da cui otteniamo l'equazione della retta tangente:  $y = r_t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

## DERIVATA DESTRA E SINISTRA

**Definizione 2** : Si dice che la funzione  $f(x)$  è **derivabile da sinistra** o **derivabile da destra** nel punto  $x_0$  se esistono e sono finiti, rispettivamente:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  oppure

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se  $f(x)$  risulta derivabile in  $x_0$  da sinistra porremo  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$ , che viene detta derivata sinistra in  $x_0$ ; se  $f(x)$  risulta derivabile in  $x_0$  da destra porremo  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$ , derivata destra in  $x_0$ .

Ovviamente vale il

**Teorema 1** : La funzione  $f(x)$  risulta derivabile in  $x_0$  se e solo se risulta derivabile in  $x_0$  sia da sinistra che da destra, e se risulta  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ .

## DERIVABILITA' E CONTINUITA'

Supponiamo di avere un funzione  $f(x)$  che sia derivabile in  $x_0$ . Vale allora il

**Teorema 2** : Se la funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f(x)$  è continua in  $x_0$ .

**Dimostrazione** : Facciamo vedere che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , cioè che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ ,

nell'ipotesi che sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .

Infatti, moltiplicando e dividendo per  $x - x_0$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

ed il Teorema è dimostrato. •

Si vede dalla dimostrazione l'esigenza, per la derivabilità, che  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  esista finito; altrimenti si sarebbe ottenuta la forma indeterminata  $\infty \cdot 0$ , che non avrebbe permesso di dimostrare il Teorema.

Possiamo sintetizzare scrivendo che  $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}$ , ovvero che la derivabilità implica la continuità.

La derivabilità è quindi condizione sufficiente per la continuità, ma anche, e questo è forse il rilievo più importante, la continuità è condizione necessaria per la derivabilità.

Per una funzione essere derivabile è condizione più restrittiva che essere continua; quindi, prima di vedere se una funzione risulta derivabile nel punto  $x_0$ , si deve controllare che essa sia, in quel punto, continua.

## DERIVABILITA' E INFINITESIMI - PUNTI STAZIONARI

Nel  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  il denominatore è chiaramente un infinitesimo; alla luce del Teorema 2, anche il numeratore deve essere un infinitesimo. Affinchè una funzione risulti derivabile l'infinitesimo a numeratore  $f(x) - f(x_0)$  deve quindi essere dello stesso ordine, oppure di ordine superiore, rispetto all'infinitesimo  $x - x_0$ .

Nel secondo caso si ha che  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$ .

Quando  $f'(x_0) = 0$ , si dice che  $x_0$  è un **punto stazionario**.

Dato che  $f'(x_0) = 0 = m$ , coefficiente angolare della retta tangente, si ha che nei punti stazionari la retta tangente è orizzontale, ovvero parallela all'asse  $x$ .

## PUNTI DI NON DERIVABILITA'

Dopo aver visto che la continuità è condizione necessaria per la derivabilità, vediamo come la continuità non sia condizione sufficiente per la derivabilità. Sono tre i casi nei quali una funzione, pur essendo continua in  $x_0$ , può risultare non derivabile in  $x_0$ .

**Punti angolosi** : Si ha un **punto angoloso** quando in  $x_0$  esistono sia la derivata sinistra che la derivata destra, ma sono diverse tra loro :  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ .

Non esiste un'unica retta tangente al grafico di  $f(x)$  nel punto  $x_0$ , ma esistono due semirette tangenti, una per la parte sinistra e una per la parte destra del grafico.

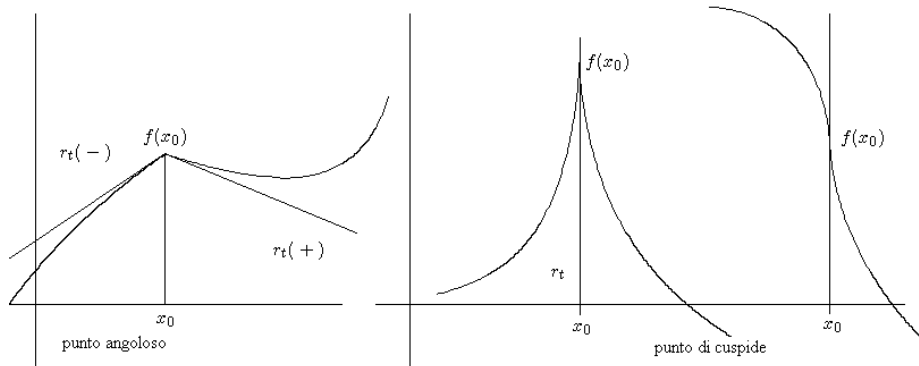
**Esempio 1** : Consideriamo la funzione Valore assoluto  $f(x) = |x|$  nel punto  $x_0 = 0$ , dove sappiamo che risulta continua.

Si ha che  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & : x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & : x < 0 \end{cases}$  e quindi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 = f'_-(0) \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'_+(0).$$

La funzione  $f(x) = |x|$  non è derivabile nel punto  $x_0 = 0$  dove presenta un punto angoloso.

**Punti di cuspid** : Si ha un **punto di cuspid** quando il limite del rapporto incrementale in  $x_0$  esiste ma è infinito, indipendentemente dal segno, anche solo da sinistra o solo da destra. In un punto di cuspid esiste la retta tangente al grafico, ma risulta una retta verticale, di equazione  $x = x_0$ .



**Esempio 2** : Consideriamo la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , nel punto  $x_0 = 0$ , dove sappiamo che risulta continua.

Si ha :  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ , per cui risulta  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ .

Alcuni allora scrivono  $f'(x_0) = +\infty$ ; noi diciamo che la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  non risulta derivabile nel punto  $x_0 = 0$ , dove presenta un punto di cuspid, con retta tangente verticale di equazione  $x = 0$ .

Esiste anche un terzo ed ultimo tipo di punto nel quale una funzione risulta continua ma non derivabile. Questo accade quando il limite del rapporto incrementale, da sinistra o da destra o da ambedue le parti, non esiste.

**Esempio 3** : Consideriamo la funzione  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ . La funzione è conti-

nua nel punto  $x = 0$  in quanto  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ , dato che si tratta del prodotto di un infinitesimo per una funzione limitata. Per vedere se risulta derivabile in  $x = 0$  calcoliamo :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \text{n.e.}$$

La funzione è quindi continua ma non derivabile nel punto  $x = 0$ . A causa delle infinite oscillazioni della funzione per  $x \rightarrow 0$  non è possibile tracciare la retta tangente nel punto  $x = 0$ .

## FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Supponiamo che  $f(x)$  risulti derivabile in  $x_0$ , ovvero sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

Ma allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$ , ovvero

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = o(1), \text{ da cui : } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1), \text{ ovvero:}$$

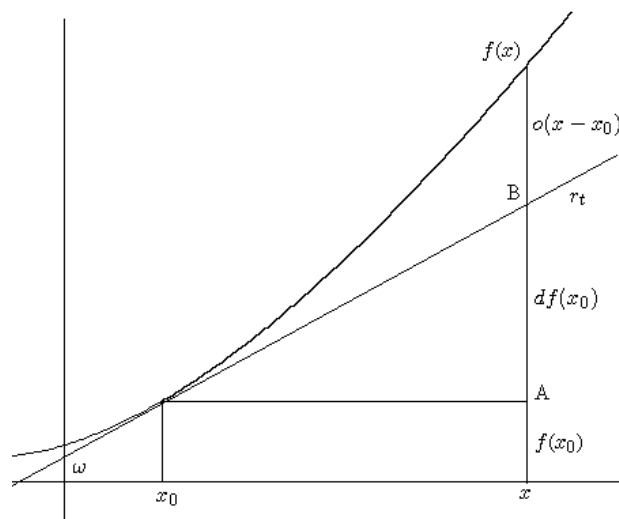
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot o(1), \text{ da cui infine :}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0),$$

dato che  $(x - x_0) \cdot o(1) = o(x - x_0)$ .

Dato che  $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  rappresenta l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in  $x_0$ , l'espressione trovata ci dice che, se la funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x_0$ , essa può essere approssimata mediante la retta tangente, con un errore espresso da  $o(x - x_0)$ , ovvero "trascurabile" rispetto all'incremento  $x - x_0$ .

Possiamo vedere in figura la scomposizione del valore  $f(x)$  nella somma dei tre termini.



Il termine  $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ , prodotto della derivata in  $x_0$  per l'incremento  $(x - x_0)$ , prende il nome di **differenziale** di  $f(x)$  in  $x_0$  e viene indicato con:  $df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

Dato che  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \omega$ , il differenziale  $df(x_0) = \operatorname{tg} \omega \cdot (x - x_0)$ , per i Teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli, coincide con la lunghezza del cateto verticale AB.

### DEFINIZIONE DI FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO

Data  $f(x)$  e dato  $x_0 \in D_f$ , formalizziamo quanto visto in precedenza con la definizione di funzione differenziabile.

**Definizione 3** : Si dice che la funzione  $f(x)$  è **differenziabile** nel punto  $x_0$  se esiste una costante  $k \in \mathbb{R}$  per la quale risulta:

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ ovvero :}$$

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Dato che  $y = f(x_0) + k(x - x_0)$  è l'equazione di una generica retta passante per  $(x_0, f(x_0))$ , dire che una funzione risulta differenziabile significa affermare che essa è approssimabile in modo lineare, ovvero mediante una retta, con un errore esprimibile come  $o(x - x_0)$ , ovvero tale da risultare infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $x - x_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

Dalla Definizione 3 segue subito il

**Teorema 3** : Se  $f(x)$  è differenziabile in  $x_0$ , allora  $f(x)$  è derivabile in  $x_0$  e risulta inoltre:

$$k = f'(x_0).$$

**Dimostrazione** : Se per ipotesi  $f(x)$  è differenziabile nel punto  $x_0$ , possiamo scrivere :

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ da cui, sostituendo, si ha:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x - x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} k + 0 = k, \text{ dato che } k \text{ è costante e vista la definizione di } o(x - x_0). \end{aligned}$$

Dato che, per la Definizione 3,  $k \in \mathbb{R}$ , si ha che  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  esiste finito.

Ma allora la funzione  $f(x)$  è derivabile nel punto  $x_0$  e quindi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k = f'(x_0). \bullet$$

Se  $f(x)$  è differenziabile in  $x_0$  scriveremo allora:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Vediamo cioè che essere differenziabile significa essere approssimabile non con una retta qualunque ma mediante la retta tangente, con un errore esprimibile come  $o(x - x_0)$ .

Tutto quanto visto finora costituisce la dimostrazione del seguente

**Teorema 4** :  $f(x)$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se  $f(x)$  è derivabile in  $x_0$ .

Per le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'essere derivabile e l'essere differenziabile sono quindi proprietà equivalenti; vedremo che questo non risulta invece vero per le funzioni di variabile vettoriale. Notiamo anche che la continuità è quindi condizione necessaria pure per la differenziabilità.

## FUNZIONE DERIVATA

Quando calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , se non fissiamo il punto

$x_0$  e calcoliamo invece  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , facendo variare l'incremento  $h$  e lasciando indeterminata la variabile  $x$ , nei punti in cui  $f(x)$  risulta derivabile avremo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x), \text{ ovvero otteniamo una funzione, } x \rightarrow f'(x), \text{ le cui immagini}$$

ci danno i valori della derivata di  $f(x)$ . Tale funzione viene detta **funzione derivata**, anche se è poi di uso comune chiamarla semplicemente derivata.

Per il calcolo pratico delle derivate useremo allora la funzione derivata: determineremo anzitutto le cosiddette derivate fondamentali, che sono le funzioni derivate delle funzioni elementari, per passare poi a stabilire le regole di derivazione, che ci diranno come trovare la derivata di somma, prodotto, quoziente e composizione di due o più funzioni di cui si conosca la derivata. In questo modo disporremo di regole di calcolo che ci permetteranno di trovare la funzione derivata  $f'(x)$  di una generica funzione. Per avere la derivata nel punto  $x_0$  basterà allora calcolare il valore  $f'(x_0)$ .

L'uguaglianza  $\mathcal{D}(f(x)) = f'(x)$  esprime, operativamente parlando, l'applicazione di queste regole di calcolo, sintetizzate con l'operatore di derivata  $\mathcal{D}$ , che opera su  $f(x)$ , e fornisce come risultato, quando esiste, la derivata  $f'(x)$ .

## DERIVATE FONDAMENTALI

Calcoliamo la funzione derivata delle principali funzioni elementari.

**Derivata della funzione costante**  $f(x) = k$

Una funzione costante esiste ed è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Se  $f(x) = k$  abbiamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0, \forall x.$$

Quindi una funzione costante è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$  e risulta  $\mathcal{D}(k) = 0$ .

**Derivata della funzione**  $f(x) = mx + q$

Una funzione polinomiale esiste ed è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Se  $f(x) = mx + q$  abbiamo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x + h) + q - (mx + q)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m, \forall x.$$

Quindi un polinomio di primo grado, ovvero una funzione che ha per grafico una retta, è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$  e risulta  $\mathcal{D}(mx + q) = m$ .

Possiamo osservare come questo risultato ed il precedente si sarebbero potuti ottenere anche mediante considerazioni geometriche; dato che la derivata è il coefficiente angolare della retta tangente, dato che sia la  $f(x) = k$  che la  $f(x) = mx + q$  rappresentano rette, e dato che la tangente ad una retta è la retta stessa, ecco giustificati per via geometrica i due risultati.

### Derivata della funzione esponenziale $f(x) = a^x$

Una funzione esponenziale esiste ed è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Se  $f(x) = a^x$  abbiamo,  $\forall x$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \log a.$$

Questo perchè  $a^x$  è costante rispetto ad  $h$  mentre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a$ , per il limite notevole.

Quindi una funzione esponenziale è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$  e risulta  $\mathcal{D}(a^x) = a^x \cdot \log a$ .

### Derivata della funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$

Notiamo che la funzione  $f(x) = \log_a x$  esiste ed è continua solo per  $x > 0$ . Per tali  $x$  si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right]^{\frac{1}{x}} = \\ &= \log_a \lim_{t \rightarrow 0} \left[ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right]^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e, \end{aligned}$$

avendo utilizzato le proprietà dei logaritmi, il teorema sul limite della funzione composta ed il limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ .

Quindi una funzione logaritmica è derivabile  $\forall x > 0$ , e risulta  $\mathcal{D}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$ .

### Derivata della funzione potenza $f(x) = x^\alpha$

Rimandiamo alla rassegna delle funzioni elementari per quanto riguarda il campo d'esistenza e la continuità della funzione potenza  $f(x) = x^\alpha$  al variare dell'esponente  $\alpha$ . Nei punti  $x$  in cui tale funzione esiste ed è continua avremo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[ \left( \frac{x+h}{x} \right)^\alpha - 1 \right]}{h} = \\ &= x^\alpha \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^\alpha - 1 \right]}{\frac{h}{x} \cdot x} = x^{\alpha-1} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ dato che } x^{\alpha-1} \text{ è da} \end{aligned}$$

trattarsi come costante, ed avendo applicato il limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$ .

Quindi una funzione potenza risulta derivabile, al variare di  $\alpha$ , nei punti  $x$  in cui esiste ed è continua  $g(x) = x^{\alpha-1}$  e risulta  $\mathcal{D}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

**Esempio 4:** Data  $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ , avremo:  $\mathcal{D}\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$ .

Notiamo che sia  $f(x)$  che  $f'(x)$  esistono e sono continue per  $x \neq 0$ .



**Esempio 5 :** Data  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , avremo:  $\mathcal{D}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0$ .

Notiamo che  $f(x) = \sqrt{x}$  esiste per  $x \geq 0$  mentre  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  esiste solo per  $x > 0$ .

**Esempio 6 :** Data  $f(x) = x^{\pi-3}$ , avremo:  $\mathcal{D}(x^{\pi-3}) = (\pi-3)x^{\pi-4}, \forall x > 0$ . Notiamo che  $f(x)$  esiste per  $x \geq 0$  mentre  $f'(x)$  esiste solo per  $x > 0$ , in quanto  $\pi-4 < 0$ .

### Derivata della funzione $f(x) = \sin x$

La funzione  $f(x) = \sin x$  è definita e continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Avremo allora:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h \cos x}{h} = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x, \text{ avendo applicato la formula di addizione del seno, e i limiti} \\ &\text{notevoli } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0. \end{aligned}$$

Quindi la funzione  $f(x) = \sin x$  è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e risulta  $\mathcal{D}(\sin x) = \cos x$ .

### Derivata della funzione $f(x) = \cos x$

La funzione  $f(x) = \cos x$  è definita e continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Avremo allora:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} = \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x, \text{ avendo applicato la formula di addizione del coseno, e i} \\ &\text{limiti notevoli } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0. \end{aligned}$$

Quindi la funzione  $f(x) = \cos x$  è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ , e risulta  $\mathcal{D}(\cos x) = -\sin x$ .

### Derivata della funzione $f(x) = |x|$

La funzione  $f(x) = |x|$  è definita e continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Abbiamo già visto che la funzione Valore assoluto non è derivabile nel punto  $x = 0$ . Dalla derivata  $\mathcal{D}(mx + q) = m$  si ha:

$$\mathcal{D}(|x|) = \begin{cases} \mathcal{D}(x) & : x > 0 \\ \mathcal{D}(-x) & : x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}.$$

## REGOLE DI DERIVAZIONE

Enunciamo alcuni teoremi di notevole importanza che, sotto condizioni molto generali, assicurano la derivabilità delle funzioni ottenute sommando, sottraendo, moltiplicando, dividendo e componendo funzioni derivabili. Otterremo delle regole, dette Regole di derivazione, che permettono di calcolare la funzione derivata di somma, prodotto, composizione ecc. di funzioni la cui derivata sia già nota. Diversamente dall'operazione di passaggio al limite, solo nel caso della somma e della differenza otterremo la scambiabilità dell'operazione di derivata con le operazioni dell'aritmetica. Considereremo funzioni che risultino derivabili in tutti i punti di un intervallo, anche se di questi Teoremi viene solitamente data una versione puntuale.

## DERIVATA E OPERAZIONI ALGEBRICHE

### Derivata di somma e differenza di funzioni

**Teorema 5 :** Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni derivabili in un intervallo.

Allora  $\mathcal{D}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$  e  $\mathcal{D}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$ .

**Dimostrazione :** Sia  $x_0$  un punto nel quale  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili. Risulta subito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0), \text{ e analogamente:} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) - g'(x_0), \text{ in quanto sia } f(x) \text{ che } g(x) \text{ sono derivabili in } x_0. \bullet \end{aligned}$$

Ovvero la derivata di una somma è la somma delle derivate, mentre la derivata di una differenza è la differenza delle derivate, e quindi l'operazione di derivata si scambia sia con la somma che con la differenza. Il Teorema si estende facilmente a somma e differenza di un numero qualunque di funzioni.

**Esempio 7 :** Calcoliamo la derivata di  $f(x) = 3^x - \cos x + x^\pi - 7$ . Avremo allora:

$$\mathcal{D}[3^x - \cos x + x^\pi - 7] = 3^x \log 3 + \sin x + \pi x^{\pi-1} - 0.$$

### Derivata del prodotto di due funzioni

**Teorema 6 :** Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni derivabili in un intervallo.

Allora  $\mathcal{D}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

**Dimostrazione :** Sia  $x_0$  un punto nel quale  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili.

Sottraendo e sommando  $f(x_0) \cdot g(x)$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] \cdot g(x) + f(x_0) \cdot [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) \right] + \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \end{aligned}$$

in quanto  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili e quindi continue in  $x_0$ , mentre  $f(x_0)$  è una costante. •

Come si vede, la derivata non si scambia con il prodotto, ovvero la derivata del prodotto di due funzioni non è data dal prodotto delle derivate, ma dalla somma di due termini, ciascuno dei quali è il prodotto di una funzione derivata per una non derivata.

**Esempio 8 :** Calcoliamo la derivata di  $f(x) = x^3 2^x$ . Avremo allora:

$$\mathcal{D}[x^3 2^x] = 3x^2 2^x + x^3 2^x \log 2.$$

### Derivata del prodotto di più funzioni

Se abbiamo da derivare il prodotto di più di due funzioni, tutte derivabili, usando la proprietà associativa del prodotto e la regola di derivazione del prodotto di due funzioni si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)) &= \mathcal{D}[(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)] = \\ &= \mathcal{D}[f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot \mathcal{D}(h(x)) = \\ &= [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \cdot h(x) + (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) = \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x), \end{aligned}$$

ovvero la somma di tanti prodotti in ciascuno dei quali una funzione viene derivata mentre tutte le altre non vengono derivate.

**Esempio 9 :** Calcoliamo la derivata di  $f(x) = x^3 2^x \sin x$ . Avremo allora:

$$\mathcal{D}[x^3 2^x \operatorname{sen} x] = 3x^2 2^x \operatorname{sen} x + x^3 2^x \log 2 \operatorname{sen} x + x^3 2^x \cos x.$$

Come caso particolare della regola sulla derivata del prodotto abbiamo, data una costante  $k \in \mathbb{R}$ , che  $\mathcal{D}[k \cdot f(x)] = \mathcal{D}(k) \cdot f(x) + k \cdot \mathcal{D}(f(x)) = 0 \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = k \cdot f'(x)$ . Quindi  $\mathcal{D}[k \cdot f(x)] = k \cdot \mathcal{D}(f(x))$ , ovvero il prodotto per una costante si scambia con la derivazione.

**Esempio 10** : Sia  $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5 \log x$ . Avremo allora:

$$\mathcal{D}(3x^4 - 2x^2 + 5 \log x) = 3 \mathcal{D}(x^4) - 2 \mathcal{D}(x^2) + 5 \mathcal{D}(\log x) = 12x^3 - 4x + \frac{5}{x}.$$

### Derivata del reciproco di una funzione

**Teorema 7** : Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in un intervallo, e sia  $f(x) \neq 0$ .

$$\text{Allora } \mathcal{D}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

**Dimostrazione** : Sia  $x_0$  un punto in cui  $f(x)$  risulta derivabile, con  $f(x_0) \neq 0$ . Si ha allora:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{f(x) \cdot f(x_0)} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) \cdot f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= - \frac{1}{f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}, \end{aligned}$$

in quanto  $f(x)$  è derivabile e quindi continua in  $x_0$  mentre  $f(x_0) \neq 0$  è una costante. •

### Derivata del quoziente di due funzioni

**Teorema 8** : Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni derivabili in un intervallo, e sia  $g(x) \neq 0$ .

$$\text{Allora } \mathcal{D}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Dimostrazione** : Sia  $x$  un punto nel quale  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili, con  $g(x) \neq 0$ . Avremo allora, applicando la regola di derivazione del prodotto e quella del reciproco:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \mathcal{D}\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \bullet \end{aligned}$$

**Esempio 11** : Sia  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Avremo allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\operatorname{tg} x) &= \mathcal{D}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\mathcal{D}(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \mathcal{D}(\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \mathcal{D}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Operando in maniera analoga si verifica che:

$$\mathcal{D}(\operatorname{cotg} x) = \mathcal{D}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x.$$

## DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA E DI FUNZIONE INVERSA

### Derivata della funzione composta

**Teorema 9** : Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni derivabili in un intervallo, esista la funzione composta  $f(g(x))$ , e sia  $f(x)$  derivabile nel punto  $g(x)$ . Risulta allora:

$$\mathcal{D}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Dimostrazione** : Sia  $g(x)$  derivabile nel punto  $x_0$  e sia  $f(x)$  derivabile nel punto  $g(x_0)$ .

Dato che  $g(x)$  è derivabile in  $x_0$ , sarà anche continua, e potremo scrivere:  $g(x) = g(x_0) + k$ , ovvero:  $g(x) - g(x_0) = k$ , con  $k \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Avremo allora:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x_0) + k) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x_0) + k) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0) + k) - f(g(x_0))}{k} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \bullet \end{aligned}$$

Il risultato trovato,  $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ , è spesso erroneamente confuso con  $f'(x) \cdot g'(x)$ , e questo rappresenta l'errore più frequente nell'applicazione di tale regola di derivazione.

Generalizzando il risultato alla composizione di tre funzioni, avremo:

$$\mathcal{D}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

**Esempio 12** : Sia  $f(x) = \log f(x)$ . Avremo allora:  $\mathcal{D}(\log f(x)) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

Confondere  $f'(g(x)) \cdot g'(x)$  con  $f'(x) \cdot g'(x)$  porta a calcolare:

$\mathcal{D}(\log f(x)) = \frac{1}{x} \cdot f'(x)$ , ovvero  $\mathcal{D}(\log x) \cdot \mathcal{D}(f(x))$ , che, come detto, non è il risultato corretto della derivazione.

**Esempio 13** : Sia  $f(x) = e^{f(x)}$ . Avremo allora:  $\mathcal{D}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} f'(x)$ .

**Esempio 14** : Sia  $g(x) = [f(x)]^n$ . Avremo allora:  $\mathcal{D}([f(x)]^n) = n [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ .

**Esempio 15** : Sia  $f(x) = \text{sen}(\text{sen } x)$ . Si ha allora:  $\mathcal{D}(\text{sen}(\text{sen } x)) = \cos(\text{sen } x) \cdot \cos x$ .

**Esempio 16** : Sia  $f(x) = 3^{x \text{sen}^2 x}$ . Sarà allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(3^{x \text{sen}^2 x}) &= 3^{x \text{sen}^2 x} \log 3 (1 \cdot \text{sen}^2 x + x \cdot 2 \text{sen } x \cdot \cos x) = \\ &= 3^{x \text{sen}^2 x} \log 3 (\text{sen}^2 x + x \cdot \text{sen } 2x). \end{aligned}$$

**Derivata della funzione  $f(x)^{g(x)}$**

Essendo  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$ , mediante la derivata di funzione composta otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f(x)^{g(x)}) &= \mathcal{D}(e^{g(x) \log f(x)}) = e^{g(x) \log f(x)} \cdot \left( g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right) = \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left( g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

**Esempio 17** : Sia  $f(x) = x^x$ . Sarà allora:

$$\mathcal{D}(x^x) = x^x \left( 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\log x + 1) = x^x \log(e x).$$

**Esempio 18** : Sia  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ . Sarà allora:

$$\mathcal{D}(x^{\frac{1}{x}}) = x^{\frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \cdot \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\frac{1}{x}-2} \log \frac{e}{x}.$$

**Derivata della funzione inversa**

**Teorema 10** : Sia  $y = f(x)$  invertibile e derivabile in un intervallo, e sia inoltre  $f'(x) \neq 0$ .

Allora la funzione inversa  $x = f^{-1}(y)$  è derivabile e risulta  $\mathcal{D}(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\mathcal{D}(f(x))}$ .

**Dimostrazione** : Sia  $x_0$  un punto in un intorno del quale la funzione  $y = f(x)$  risulta invertibile e derivabile con  $f'(x_0) \neq 0$ .

Se  $y = f(x)$  allora  $x = f^{-1}(y)$  e se  $y_0 = f(x_0)$  allora  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ .

La funzione  $f(x)$  è derivabile, quindi è continua, per cui se  $x \rightarrow x_0$  allora  $y \rightarrow y_0$ .

Vediamo che la funzione inversa è derivabile nel punto  $y_0$ . Avremo, sostituendo:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

avendo applicato il Teorema sul limite del reciproco, in quanto  $f'(x_0) \neq 0$ . •

**Esempio 19** : Calcoliamo  $\mathcal{D}(\arcsen x)$ . Da  $y = \arcsen x$  segue  $x = \sen y$  e quindi:

$$\mathcal{D}(\arcsen x) = \frac{1}{\mathcal{D}(\sen y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dall'uguaglianza:  $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  ricaviamo:  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$ , e quindi:

$$\mathcal{D}(\arccos x) = \mathcal{D}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsen x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

**Esempio 20** : Calcoliamo  $\mathcal{D}(\arctg x)$ . Da  $y = \arctg x$  segue  $x = \tg y$  e quindi:

$$\mathcal{D}(\arctg x) = \frac{1}{\mathcal{D}(\tg y)} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

In maniera analoga si ottiene:  $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{\mathcal{D}(\operatorname{cotg} y)} = -\frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$ .

Il risultato trovato:  $\mathcal{D}(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\mathcal{D}(f(x))}$  significa che la retta tangente al grafico di  $f(x)$

nel punto  $x_0$  ha un coefficiente angolare che è il reciproco di quello della retta tangente al grafico dell'inversa nel punto  $y_0$ , e quindi gli angoli formati da queste due rette tangenti con il semiasse positivo delle ascisse sono angoli complementari.

## TAVOLA DELLE DERIVATE FONDAMENTALI

Riassumiamo i risultati trovati relativi alle derivate delle funzioni elementari ed alle regole di derivazione:

$\mathcal{D}(k) = 0$	$\mathcal{D}(mx + q) = m$
$\mathcal{D}(a^x) = a^x \cdot \log a$	$\mathcal{D}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$\mathcal{D}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\mathcal{D}(x^x) = x^x \cdot (\log x + 1)$
$\mathcal{D}(\sen x) = \cos x$	$\mathcal{D}(\cos x) = -\sen x$
$\mathcal{D}(\tg x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tg^2 x$	$\mathcal{D}(\operatorname{cotg} x) = -\frac{1}{\sen^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$
$\mathcal{D}(\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\mathcal{D}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\mathcal{D}(\arctg x) = \frac{1}{1 + x^2}$	$\mathcal{D}(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$
$\mathcal{D}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\mathcal{D}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\mathcal{D}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$\mathcal{D}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$\mathcal{D}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$\mathcal{D}(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\mathcal{D}(f(x))}$

## PUNTI DI DISCONTINUITA' DELLA FUNZIONE DERIVATA

Abbiamo visto che la continuità è condizione necessaria, ma non sufficiente, per la derivabilità. Data una funzione  $f(x)$  continua in un intervallo, mediante le derivate fondamentali e le regole di derivazione possiamo associare a  $f(x)$  la sua funzione derivata  $f'(x)$ . Se la funzione  $f(x)$  è continua, non è detto che lo sia anche la funzione  $f'(x)$ . Essa infatti può presentare punti di discontinuità di I e di II specie, ma non di III specie, o eliminabili.

**Esempio 21** : La funzione  $f(x) = |x|$  è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ma non è derivabile in  $x = 0$  (Vedi Esempio 1). La sua funzione derivata è, per  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$ , che presenta in  $x = 0$  un punto di discontinuità di I specie, mentre  $f(x) = |x|$  ha in  $x = 0$  un punto angoloso.

**Esempio 22** : La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ma non è derivabile in  $x = 0$  (Esempio 2). La sua funzione derivata è, per  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , che presenta in  $x = 0$  un punto di discontinuità di II specie per limite infinito, mentre  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ha in  $x = 0$  un punto di cuspidè.

**Esempio 23** : La funzione  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$  è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ma non è derivabile in  $x = 0$  (Esempio 3). La sua funzione derivata è  $f'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ , per  $x \neq 0$ , che presenta in  $x = 0$  un punto di discontinuità di II specie per limite che non esiste.

## DERIVATE SUCCESSIVE

La derivazione associa alla funzione  $f(x)$  la sua funzione derivata :  $\mathcal{D}(f(x)) = f'(x)$ .

Se la funzione  $f'(x)$  risulta a sua volta derivabile, possiamo calcolare:

$\mathcal{D}(f'(x)) = \mathcal{D}(\mathcal{D}(f(x))) = f''(x)$ , che viene detta derivata seconda della funzione  $f(x)$ .

Iterando, avremo  $\mathcal{D}(f''(x)) = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{D}(f(x)))) = f'''(x)$ , derivata terza della funzione  $f(x)$ .

Dall'ordine 4 in poi si cessa di usare gli apici e si usano le notazioni  $f^{(4)}(x)$ ,  $f^{(5)}(x)$ , fino alla  $f^{(n)}(x)$ , per indicare la generica derivata  $n$ -esima della funzione  $f(x)$ . È importante notare l'uso delle parentesi nell'ordine di derivazione, per non confondere  $f^{(n)}(x)$  con  $f^n(x)$ , che indica la potenza  $n$ -esima di  $f(x)$  :  $f^n(x) = [f(x)]^n$ .

**Esempio 24** : Da  $f(x) = e^x$  otteniamo  $f'(x) = e^x$ ; da questa  $\mathcal{D}(f'(x)) = \mathcal{D}(e^x) = e^x$ , e così via, qualunque sia  $n$  :  $\mathcal{D}^n(e^x) = f^{(n)}(x) = e^x$ .

**Esempio 25** : Data  $f(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , si ha:

$f'(x) = n x^{n-1}$ ,  $f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$ , ..., fino alla derivata  $n$ -esima :  $f^{(n)}(x) = n!$  che risulta quindi costante; poi  $f^{(n+k)}(x) = 0, \forall k \geq 1$ .

## TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI IN UN INTERVALLO

Vediamo ora una serie di Teoremi, riguardanti le funzioni derivabili in un intervallo, che ci forniscono risultati importanti dal punto di vista pratico e applicativo.

Cominciamo con la seguente:

**Definizione 4 :** Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si dice **punto di massimo (di minimo) relativo** se esiste almeno un intorno  $\mathfrak{J}(x_0, \delta)$  nel quale risulta  $f(x) \leq f(x_0)$  (oppure  $f(x) \geq f(x_0)$ ),  $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0, \delta)$ .

Se tali disuguaglianze valgono per ogni  $x$  appartenente al dominio della funzione, allora  $x_0$  si dirà **punto di massimo (di minimo) assoluto**.

Si parla di punto di massimo (di minimo) **stretto** (o forte), sia relativo che assoluto, se le disuguaglianze valgono in senso stretto:  $f(x) < f(x_0)$  oppure  $f(x) > f(x_0)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0, \delta)$ .

Vale allora anzitutto il seguente:

**Teorema 11** (di Fermat) : Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in  $]a, b[$ , e sia  $x_0 \in ]a, b[$  punto di massimo (o di minimo) relativo per la funzione. Allora risulta  $f'(x_0) = 0$ .

**Dimostrazione :** Supponiamo, tra le due possibilità, che  $x_0$  sia punto di massimo relativo; la dimostrazione nel caso del minimo è analoga. Risulta quindi  $f(x) \leq f(x_0)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0, \delta)$ .

Consideriamo il rapporto incrementale  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  nell'intorno di  $x_0$ .

Per  $x < x_0$  si ha  $\begin{cases} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 < 0 \end{cases}$  mentre per  $x > x_0$  si ha  $\begin{cases} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 > 0 \end{cases}$ .

Quindi  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  per  $x < x_0$  mentre  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  per  $x > x_0$ .

Quindi, se esistono, sarà  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ .

Dato che la funzione è, per ipotesi, derivabile in  $x_0$ , dovrà risultare:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Per quanto visto, ciò è possibile solo se  $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ . •

**Esempio 26 :** Considerata la funzione  $f(x) = x^3$ , essendo  $f'(x) = 3x^2$ , si ha  $f'(x) = 0$  solo per  $x = 0$ . Ma  $x = 0$  non è punto di massimo nè di minimo relativo per  $f(x)$  in quanto  $f(0) = 0$  mentre  $f(x) < 0$  per  $x < 0$  ed invece  $f(x) > 0$  per  $x > 0$ .

Quindi non tutti i punti in cui si annulla la derivata prima sono punti di massimo o minimo relativo. La condizione espressa dal Teorema di Fermat è quindi una condizione necessaria ma non sufficiente ad individuare i punti di massimo o minimo relativo.

E' condizione necessaria, inoltre, solo per una funzione che sia derivabile; non è più nemmeno necessaria per funzioni non derivabili.

**Esempio 27 :** Consideriamo la funzione  $f(x) = |x|$ , Valore assoluto, che ha in  $x = 0$  un punto di minimo (relativo ed anche assoluto) ma che non ha derivata nulla in  $x = 0$  in quanto, in tale punto, non è derivabile.

In conclusione, possiamo dire che se  $x_0$  è punto di massimo o minimo relativo allora la derivata  $f'(x_0)$  o si annulla oppure non esiste.

I punti in cui  $f'(x_0) = 0$  sono detti **punti stazionari**, e sono i punti nei quali la tangente al grafico della funzione risulta orizzontale. All'insieme dei punti stazionari appartengono quindi i punti di massimo e di minimo relativo, ma questi non esauriscono i casi possibili: vedremo in seguito che vi è un terzo tipo di punto stazionario, riconducibile ai punti di flesso a tangente orizzontale.

Iniziamo la rassegna dei Teoremi sulle funzioni derivabili in un intervallo con quelli di Rolle e di Lagrange.

**Teorema 12** (di Rolle) : Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$ , intervallo limitato e chiuso, derivabile almeno nei punti interni di tale intervallo, e sia poi  $f(a) = f(b)$ .

Allora esiste almeno un punto  $x_0 \in ]a, b[$  nel quale risulta  $f'(x_0) = 0$ .

**Dimostrazione :** Se  $f(x) = k$ , costante, allora  $f'(x) = 0 \forall x \in ]a, b[$ .

Se  $f(x)$  non è costante, essendo continua ammette, per il Teorema di Weierstrass, un punto di massimo e un punto di minimo assoluti. Uno almeno di questi,  $x_0$ , deve cadere in un punto interno di  $]a, b[$ , e quindi sarà anche relativo. Per il Teorema di Fermat, essendo  $f(x)$  derivabile, sarà allora  $f'(x_0) = 0$ . •

**Teorema 13 (di Lagrange) :** Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a, b]$ , intervallo limitato e chiuso, e derivabile almeno nei punti interni di tale intervallo.

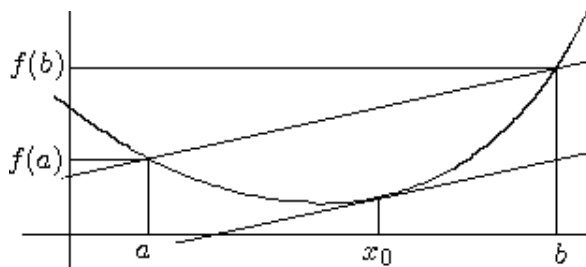
Allora esiste almeno un punto  $x_0 \in ]a, b[$  nel quale  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Dimostrazione :** Si consideri la funzione  $g(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) \right)$ ,

differenza tra la funzione  $f(x)$  e l'equazione della retta passante per i due punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . La funzione  $g(x)$  è continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$  in quanto differenza di due funzioni continue e derivabili. Inoltre  $g(a) = g(b) = 0$ , quindi a  $g(x)$  è applicabile il Teorema di Rolle, per cui esiste almeno un punto  $x_0$  nel quale :

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ da cui si ottiene } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \bullet$$

Il Teorema di Lagrange ha un interessante significato geometrico: sia  $f'(x_0)$  che  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  sono due coefficienti angolari: il primo è quello della retta tangente in  $x_0$ , il secondo quello della retta passante per i due punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ , ovvero della secante passante per gli estremi dell'arco. Il Teorema afferma che in almeno un punto  $x_0$  la tangente al grafico è parallela alla secante, avendo le due rette lo stesso coefficiente angolare.



Vediamo una prima applicazione del Teorema di Lagrange. Vale il seguente:

**Teorema 14 :** Una funzione  $f(x)$  ha la derivata sempre uguale a zero se e solo se è costante.

**Dimostrazione :** Sappiamo che  $\mathcal{D}(k) = 0$ , ovvero che se una funzione è costante allora la sua derivata è sempre nulla. Con il teorema di Lagrange proviamo che vale anche il viceversa, ovvero che se una funzione ha la derivata sempre nulla, allora è costante.

Infatti, sia  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a, b[$ . Essendo la funzione derivabile, ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange in un qualunque intervallo di estremi  $x_1$  e  $x_2$ .

Quindi esiste almeno un  $x_0$  per cui risulta  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0)$ . Ma  $f'(x_0) = 0$  per ipo-

tesi, quindi  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$ , ovvero  $f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in ]a, b[$ , ovvero la funzione è costante in  $]a, b[$ . •

## MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA



Vediamo ora una applicazione, forse la più importante, della derivata: quella relativa allo studio della crescita e della decrescita di una funzione. Ricordiamo le definizioni di funzione monotona (strettamente o non). La funzione  $f(x)$  si dice, nell'intervallo  $]a, b[$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{strettamente crescente} & \text{se } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \\ \text{crescente (o non decrescente)} & \text{se } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \\ \text{strettamente decrescente} & \text{se } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \\ \text{decrescente (o non crescente)} & \text{se } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \end{array} \right. , \forall x_1, x_2 \in ]a, b[, x_1 \neq x_2 .$$

La relazione tra monotonia e segno della derivata è fornita dal seguente

**Teorema 15** : Sia  $f(x)$  continua e derivabile in  $]a, b[$ , e monotona (crescente o decrescente, anche non strettamente). Allora  $f'(x)$  non cambia di segno in  $]a, b[$  e viceversa. Ovvero:

.)  $f(x)$  crescente in  $]a, b[ \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ ;

.)  $f(x)$  decrescente in  $]a, b[ \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ .

**Dimostrazione** : Dimostriamo il caso della funzione crescente, potendosi trattare analogamente quello della funzione decrescente.

Dimostriamo anzitutto che :  $f(x)$  crescente in  $]a, b[ \Rightarrow f'(x) \geq 0$ .

Se  $f(x)$  è crescente allora  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \forall x, x_0 \in ]a, b[$ .

Essendo  $f(x)$  derivabile in  $x_0$ , esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ , che, per le proprietà del limite, non può essere negativo, ovvero risulta  $f'(x_0) \geq 0, \forall x_0 \in ]a, b[$ .

Dimostriamo poi che :  $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$  crescente in  $]a, b[$ .

Presi due punti qualunque  $x_1, x_2 \in ]a, b[$ , essendo  $f(x)$  derivabile, ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo avente per estremi  $x_1$  e  $x_2$ . Quindi esiste almeno un  $x_0$

per cui risulta  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0)$ .

Ma  $f'(x_0) \geq 0$  per ipotesi, ovvero  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0, \forall x_1, x_2 \in ]a, b[$ , e quindi la funzione è crescente in  $]a, b[$ . •

Vale anche il

**Teorema 16** : Sia  $f(x)$  continua e derivabile in  $]a, b[$  e risulti  $f'(x) = 0$  solo in un numero finito di punti di  $]a, b[$ . Allora:

.)  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  strettamente crescente in  $]a, b[$ ;

.)  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  strettamente decrescente in  $]a, b[$ .

Non vale il viceversa, ovvero se una funzione è derivabile e strettamente crescente si può solo concludere che la sua derivata non sarà negativa:  $f'(x) \geq 0$ . Analogamente per una funzione strettamente decrescente, la cui derivata non sarà positiva.

**Esempio 28** : La funzione  $f(x) = x^3$  è strettamente crescente su tutto  $\mathbb{R}$ , anche se risulta  $f'(0) = 0$ .

**Esempio 29** : Data  $f(x) = \log^2 x$ , determiniamo dove la funzione risulta crescente. La funzione è definita per  $x > 0$ . Posto  $f'(x) = 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \geq 0$ , la disequazione è soddisfatta per  $\log x \geq 0$ , ovvero per  $x \geq 1$ . Quindi la funzione è crescente per  $1 \leq x < +\infty$ , e sarà decrescente per  $0 < x < 1$ . Essendo continua, il punto  $x = 1$  è un punto di minimo relativo.

Risulta  $f(1) = 0$  ed essendo  $f(x) > 0, \forall x > 0, x \neq 1$ , il punto  $x = 1$  è anche un punto di minimo assoluto.

### ESISTENZA DELLA FUNZIONE INVERSA

Dai Teoremi sulle funzioni continue sappiamo che una funzione continua e strettamente monotona ammette funzione inversa. Dal Teorema 16 sappiamo che se  $f'(x)$  ha sempre lo stesso segno, allora la funzione risulta monotona.

Per avere una funzione strettamente monotona, e quindi invertibile in  $]a, b[$ , è sufficiente che risulti  $f'(x) \geq 0 \forall x \in ]a, b[$  (oppure  $f'(x) \leq 0 \forall x \in ]a, b[$ ), purchè però sia  $f'(x) = 0$  solo in un numero finito di punti.

**Esempio 30** : Sia data  $f(x) = e^x + x$ . La funzione è definita, continua e derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ed inoltre  $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Quindi la funzione è strettamente crescente su tutto  $\mathbb{R}$ , per cui ammette inversa,  $y = f^{-1}(x)$ , la cui espressione non è però determinabile esplicitamente, in quanto l'equazione  $y = e^x + x$  non è risolvibile rispetto alla  $x$ . Posto  $x_0 = 0$ , dato che  $f(0) = e^0 + 0 = 1 = y_0$ , ed essendo  $f'(x) = e^x + 1$ , da cui  $f'(0) = e^0 + 1 = 2$ , mediante la regola di derivazione della funzione inversa otteniamo:

$$\mathcal{D}(f^{-1}(y_0)) = \mathcal{D}(f^{-1}(1)) = \frac{1}{\mathcal{D}(f(x_0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Come si vede, si è potuto calcolare la derivata nel punto  $y_0$  anche senza conoscere l'espressione dell'inversa.

### I TEOREMI DI DE L'HOPITAL

Un'altra importante applicazione della derivata è costituita dal cosiddetto Teorema o Regola di De L'Hopital, che permette, sotto opportune ipotesi, di risolvere le forme indeterminate del limite di un quoziente. Normalmente si enunciano vari teoremi di De L'Hopital, a seconda che la forma indeterminata da risolvere sia la  $\frac{0}{0}$  o la  $\frac{\infty}{\infty}$ , e a seconda che le funzioni interessate siano o no continue nel punto  $x_0$  nel quale si effettua il passaggio al limite, dato che queste varie versioni della Regola hanno dimostrazioni diverse tra loro. Dato che qui viene omessa la dimostrazione, daremo un'unica versione generale di questo Teorema. Vale il seguente:

**Teorema 17** (o Regola di De L'Hopital) : Si debba risolvere il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , con  $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ , che

si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  oppure  $\frac{\infty}{\infty}$ . Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  derivabili, e quindi continue, in un intorno  $\mathfrak{J}(x_0)$ ,  $x_0$  eventualmente escluso, e sia poi  $g'(x) \neq 0$  in  $\mathfrak{J}(x_0)$ .

Allora, se esiste, finito o infinito,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , esiste anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Esempio 31** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ , che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Essendo le ipotesi soddisfatte, proviamo a calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Risulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Quindi anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ .

**Esempio 32** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ , che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Essendo le ipotesi soddisfatte, proviamo a calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Risulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . Quindi anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

Vediamo alcune importanti osservazioni relative a questo Teorema.

1) E' condizione necessaria per l'applicabilità del Teorema che il limite del quoziente si presenti nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , mentre non sarebbe necessaria, anche se rappresenta per ovvi motivi il caso di più frequente applicazione, la presenza della forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ . In questo caso, come dimostrato da F. Lettenmeyer nel 1936, è necessario solo che  $g(x)$  sia infinita per  $x \rightarrow x_0$ .

**Esempio 33** : Si debba calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\cos x}$ . Risulta  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\cos x} = 0$ , in quanto il numeratore è infinitesimo mentre  $\cos 0 = 1$ . Se, impropriamente, applicassimo la Regola di De L'Hopital a questo limite, che come visto non presenta la forma  $\frac{0}{0}$ , calcoleremo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(1+x) \sin x} = \infty, \text{ e questo non è il risultato del } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\cos x}.$$

2) La richiesta  $g'(x) \neq 0$  non sarebbe necessaria; basterebbe chiedere che  $g'(x)$  non si annullasse infinite volte in  $\mathfrak{J}(x_0)$ . La richiesta  $g'(x) \neq 0$  semplicemente semplifica le ipotesi.

**Esempio 34** : Si debba calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin 2x + 1}{e^{\sin x} (2x + \sin 2x)}$ , che si presenta nella forma  $\frac{\infty}{\infty}$ , in quanto  $\sin 2x$  è una funzione limitata, mentre  $e^{\sin x}$  è una funzione lontana da zero.

Ponendo  $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}$ , otteniamo:

$$f(x_n) = \frac{\pi + 2n\pi + \sin(\pi + 2n\pi) + 1}{e^{\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)} (\pi + 2n\pi + \sin(\pi + 2n\pi))} = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot \frac{(2n+1)\pi + 1}{(2n+1)\pi} & \text{per } n \text{ pari} \\ e \cdot \frac{(2n+1)\pi + 1}{(2n+1)\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\text{per cui, se } n \rightarrow +\infty, \text{ si ha: } \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot \frac{(2n+1)\pi + 1}{(2n+1)\pi} \rightarrow \frac{1}{e} & \text{per } n \text{ pari} \\ e \cdot \frac{(2n+1)\pi + 1}{(2n+1)\pi} \rightarrow e & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Per il Teorema di unicità del limite, si ha allora che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin 2x + 1}{e^{\sin x} (2x + \sin 2x)}$  non esiste.

Quindi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  non esiste.

Nonostante questo, calcoliamo comunque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Essendo:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{2 + 2 \cos 2x}{e^{\sin x} [\cos x (2x + \sin 2x) + (2 + 2 \cos 2x)]} = \\ &= \frac{1 + \cos 2x}{e^{\sin x} [\cos x (x + \sin x \cdot \cos x) + (1 + \cos^2 x - \sin^2 x)]} = \\ &= \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{e^{\sin x} [\cos x (x + \sin x \cdot \cos x) + 2 \cos^2 x]} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x [x + \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x]} = \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} [x + \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x]}$$
, una volta posto  $\cos x \neq 0$ . Quindi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} [x + \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x]} = 0$ , per l'unico infinito,  $x$ , presente a denominatore, dato che  $e^{\sin x}$  è funzione lontana da zero.

Quindi esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ , ma questo, diversamente dalla Regola di De L'Hopital, non è il risultato del  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , in quanto  $g'(x) = e^{\sin x} \cos x [x + \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x]$  si annulla infinite volte, per  $x \rightarrow +\infty$ , a causa del fattore  $\cos x$ . Per questo limite, quindi, non vale la Regola di De L'Hopital in quanto non è soddisfatta l'ipotesi  $g'(x) \neq 0$  in  $\mathfrak{J}(x_0)$ .

3) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  non esiste, nulla si può allora dedurre sul  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ; questo potrebbe benissimo esistere, sia finito che infinito, solo che non può essere calcolato con la Regola di De L'Hopital.

**Esempio 35** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ , che si presenta nella forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Le ipotesi sono soddisfatte e quindi, applicando la Regola di De L'Hopital, calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(x + \sin x)}{\mathcal{D}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x)$$
, che però non esiste, e quindi dalla Regola non si può dedurre nulla circa il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ . Il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$  però, per il principio di sostituzione degli infiniti, esiste e risulta uguale a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ .

Come si vede da questo esempio, la non esistenza del  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  non implica assolutamente la non esistenza del  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

4) Un'osservazione di tipo pratico: se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  si presenta nuovamente come forma indeterminata e se valgono le ipotesi, ovviamente applicate ora a  $f'(x)$  e  $g'(x)$ , la Regola può essere iterata, calcolando  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ . Se questo esiste, allora il suo valore è anche quello del  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  e quindi del  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Si può continuare, se necessario, iterando la procedura ogni volta che si ottiene una forma indeterminata, fino a trovare, se ci si riesce, il risultato.

**Esempio 36** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Essendo le ipotesi soddisfatte, proviamo a calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Risulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}}$ , che si presenta ancora nella forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Applicando  $n$  volte la Regola di De L'Hopital arriveremo a calcolare:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$ , e quindi anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .

Il risultato trovato ci dice che l'esponenziale  $e^x$ , per  $x \rightarrow +\infty$ , è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza  $x^n$ .

**Esempio 37** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^n x}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , che ci dà la forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Essendo le ipotesi soddisfatte, proviamo a calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Risulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \log^{n-1} x}{x}$ , che presenta ancora la forma indeterminata  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Applicando  $n$  volte la Regola di De L'Hopital arriveremo a calcolare:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x} = 0$ , e quindi

anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^n x}{x} = 0$ . Il risultato trovato ci dice che  $f(x) = \log x$ , per quanto elevata ad un esponente  $n$  grande a piacere, risulta comunque, per  $x \rightarrow +\infty$ , un infinito di ordine inferiore rispetto a  $g(x) = x$ .

**Esempio 38** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x$ , che si presenta nella forma indeterminata  $0 \cdot \infty$ .

Portiamo tale limite sotto forma di quoziente, e si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$ , che ora è

forma indeterminata del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Applicando la Regola di De L'Hopital proviamo a calcolare

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$ , e quindi anche  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0$ . L'infinitesim-

mo di tipo potenza  $g(x) = x$  prevale quindi sull'infinito di tipo logaritmico  $f(x) = \log x$ .

5) La Regola di De L'Hopital non consente di risolvere qualsiasi forma indeterminata; addirittura talvolta la sua applicazione può essere controproducente.

**Esempio 39** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ , che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Essendo le

ipotesi soddisfatte, calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ , che ancora si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , per cui, iterando la Regola, calcoliamo:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^3}$ , ed arrivati a questo punto non si può far

altro che osservare come l'uso iterato della Regola porti sempre più lontano dalla soluzione. Questo limite si risolve per sostituzione, ponendo  $\frac{1}{x} = -y$ , per cui da  $x \rightarrow 0^-$  segue

$y \rightarrow +\infty$ , ed avremo, visto l'Esempio 36:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} = 0$ .

## DERIVATA E LIMITE DELLA FUNZIONE DERIVATA

Abbiamo visto che il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  si presenta sempre nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , essendo  $f(x)$  continua nel punto  $x_0$ . Supponendo che  $f(x)$  sia continua in un intorno del punto  $x_0$ ,  $x_0$  compreso, e derivabile in tutti i punti di tale intorno, escluso al più  $x_0$  (perchè non sap-

piamo se in  $x_0$  la funzione è derivabile!), possiamo applicare la Regola di De L'Hopital al

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ ottenendo: } (\mathcal{D}(f(x_0))) = 0 \text{ in quanto } f(x_0) \text{ è una costante!} :$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{D}(f(x) - f(x_0))}{\mathcal{D}(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x). \text{ Se tale limite esiste, il suo valore sarà an-}$$

che quello del  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Quindi se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  esiste finito, non può che essere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Se fosse  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$  sarà anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ , e quindi  $x_0$  è un punto di cus-  
spide.

Come detto in precedenza, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  non esiste, nulla si può dire sull'esistenza ed il valore

del  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , che potrebbe benissimo esistere ed essere finito.

La definizione di derivata rimane, quindi, il modo sicuro con il quale calcolare ogni derivata.

Se però  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  esiste finito, allora il suo valore è sempre uguale a  $f'(x_0)$ , e questa proce-  
dura può essere più rapida rispetto alla definizione.

**Esempio 40** : Data la funzione  $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ , studiamone la derivabilità nel

punto  $x = 0$ . La funzione è continua in  $x = 0$  in quanto  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 \text{ sen } \frac{1}{x} = 0$ . Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \text{ sen } \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0, \text{ e quindi la funzione è derivabile}$$

in  $x = 0$  con  $f'(0) = 0$ . Calcoliamo ora la funzione derivata; per  $x \neq 0$  risulta:

$$\mathcal{D}\left(x^2 \text{ sen } \frac{1}{x}\right) = 2x \text{ sen } \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \text{ sen } \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

$$\text{Quindi } f'(x) = \begin{cases} 2x \text{ sen } \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}.$$

Se calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ , ovvero  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \text{ sen } \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$ , si ha che tale limite non esiste, in

quanto non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ , mentre  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0$ .

Abbiamo cioè che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ , mentre non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ . La derivata di questa  
funzione in  $x = 0$  può essere calcolata solo mediante la definizione.

Le funzioni, comunque continue in  $x_0$ , per le quali esiste finito  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  mentre  
non esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ , sono le funzioni che non hanno una funzione derivata continua in  $x_0$ .

Quando una funzione è continua e derivabile con funzione derivata continua in  $x_0$ , scriveremo  
 $f(x) \in \mathcal{C}^1(x_0)$ , con ovvia estensione del simbolo ai casi  $f(x) \in \mathcal{C}^2(x_0), \dots, f(x) \in \mathcal{C}^n(x_0)$ .  
Scrivendo  $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(x_0)$  intendiamo che la funzione è continua e derivabile infinite volte  
in  $x_0$ , e le funzioni derivate di ogni ordine sono tutte continue e derivabili in  $x_0$ .

## POLINOMIO E FORMULA DI TAYLOR

Data una funzione  $f(x)$ , vogliamo determinare un polinomio di grado  $n$ , che indicheremo con  $P_n(x, x_0)$ , che possa essere utilizzato per calcolare valori approssimati della funzione.

Affinchè tale approssimazione sia valida vogliamo che l'errore che si commette sostituendo alla funzione  $f(x)$  il polinomio  $P_n(x, x_0)$  tenda a zero più rapidamente di  $(x - x_0)^n$ , quando  $x \rightarrow x_0$ , con  $n$  numero naturale da scegliersi opportunamente.

Questo corrisponde ad imporre che sia:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$ , ovvero che risulti:

$$f(x) - P_n(x, x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Si dimostra che ciò è possibile se la funzione  $f(x)$  risulta derivabile  $n$  volte in un intorno del punto  $x_0$ , e se valgono le  $n + 1$  uguaglianze:  $\begin{cases} f(x_0) = P_n(x_0, x_0) \\ f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0, x_0) \end{cases}, \forall k : 1 \leq k \leq n$ ,

ovvero se nel punto  $x_0$  coincidono i valori della funzione e del polinomio e delle loro derivate fino all'ordine  $n$ .

Infatti, nel  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n}$ , il denominatore, per  $x \rightarrow x_0$ , risulta infinitesimo; quindi il numeratore, affinché tutto tenda a zero, deve anch'esso tendere a zero; otterremo allora la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  se poniamo che sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = P_n(x_0, x_0)$ , ovvero che la funzione  $f(x)$  sia continua nel punto  $x_0$ .

Supponendo poi che la funzione  $f(x)$  sia derivabile in un intorno di  $x_0$ , possiamo applicare la Regola di De L'Hopital, e calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x, x_0)}{n(x - x_0)^{n-1}}$ .

Il denominatore tende ancora a zero per cui, ripetendo il ragionamento precedente, otterremo la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  se supponiamo che sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) = P_n'(x_0, x_0)$ ; per ottenere questo occorre che anche la funzione  $f'(x)$  sia continua nel punto  $x_0$ .

Ripetendo  $n$  volte tale procedura, e supponendo di volta in volta la funzione  $f(x)$  ulteriormente derivabile nell'intorno di  $x_0$ , si arriverà, dopo aver applicato  $n$  volte la Regola di De L'Hopital, a calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x, x_0)}{n!}$ , e questo risulterà infine uguale a zero se poniamo che sia:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0, x_0)$ , ovvero l'ultima delle condizioni richieste.

Le  $n + 1$  condizioni  $\begin{cases} f(x_0) = P_n(x_0, x_0) \\ f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0, x_0) \end{cases}, \forall k : 1 \leq k \leq n$ , ci consentono anche di determinare i coefficienti del polinomio cercato.

Esprimiamo il polinomio  $P_n(x, x_0)$  mediante le potenze del binomio  $(x - x_0)$  e poniamo:

$$P_n(x, x_0) = a_n (x - x_0)^n + a_{n-1} (x - x_0)^{n-1} + \dots + a_1 (x - x_0) + a_0.$$

Imponiamo poi che nel punto  $x_0$  coincidano i valori del polinomio e della funzione, nonché di tutte le loro derivate fino all'ordine  $n$ .

Avremo, dalla  $f(x_0) = P_n(x_0, x_0)$ :

$$P_n(x_0, x_0) = a_n (x_0 - x_0)^n + a_{n-1} (x_0 - x_0)^{n-1} + \dots + a_1 (x_0 - x_0) + a_0 = a_0 = f(x_0).$$

Passando alla derivata prima:

$$P_n'(x, x_0) = n a_n (x - x_0)^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} (x - x_0)^{n-2} + \dots + 2 a_2 (x - x_0) + a_1$$

da cui, ponendo  $f'(x_0) = P_n'(x_0, x_0)$ , otteniamo:

$$P_n'(x_0, x_0) = n a_n (x_0 - x_0)^{n-1} + \dots + 2 a_2 (x_0 - x_0) + a_1 = a_1 = f'(x_0).$$

Operando in maniera analoga dalla derivata seconda fino alla derivata  $n$ -esima si ha:

$P_n''(x, x_0) = n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \dots + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + 2a_2$ , da cui:

$$P_n''(x_0, x_0) = n(n-1)a_n(x_0-x_0)^{n-2} + \dots + 3 \cdot 2a_3(x_0-x_0) + 2a_2 = 2a_2 = f''(x_0)$$

e quindi ricaviamo:  $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$ ;

$$P_n'''(x_0, x_0) = 3 \cdot 2a_3, \text{ e quindi } a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!};$$

$$P_n^{(4)}(x_0, x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4, \text{ e quindi } a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!},$$

per giungere infine alla:

$$P_n^{(n)}(x_0, x_0) = n(n-1) \dots 2a_n, \text{ da cui ricaviamo } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Abbiamo quindi ottenuto, per i coefficienti  $a_k$ , l'espressione  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ , che, per come è stata ottenuta, risulta evidentemente unica, e quindi è unico il polinomio che con tale procedura si determina. Ponendo  $f(x) = P_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n)$ , abbiamo la cosiddetta formula di Taylor:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Nel caso particolare  $x_0 = 0$ , la formula viene invece denominata polinomio di Mac Laurin.

Quanto visto finora costituisce la dimostrazione del seguente :

**Teorema 18** : Data  $f(x)$  continua e derivabile  $n$  volte in un intorno del punto  $x_0$ , esiste ed è unico il polinomio  $P_n(x, x_0)$  per il quale  $f(x) = P_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n)$  e risulta:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k.$$

Scrivendo la formula per esteso avremo anche:

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x-x_0)^3 + \dots$$

mentre nel caso di un polinomio di Mac Laurin si ottiene:

$$P_n(x, 0) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Nel caso  $n = 1$ , ovvero del polinomio di Taylor di primo grado, ritroviamo la formula di approssimazione basata sul differenziale ovvero sull'equazione della retta tangente:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + o(x-x_0).$$

Passiamo a costruire il polinomio di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.

**Polinomio di Mac Laurin della funzione esponenziale**  $f(x) = e^x$

La funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  è continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, e quindi anche nel punto  $x = 0$ .

Avremo:  $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n$ , da cui  $f^{(n)}(0) = 1, \forall n$ .

Per l'espressione del polinomio di Mac Laurin otteniamo allora:

$$P_n(x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{ ovvero}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k + o(x^n).$$

Da questa espressione se ne possono ricavare altre.

Sostituendo ad esempio  $-x$  al posto di  $x$  nell'espressione trovata per  $e^x$ , considerato che  $-x$  è funzione continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, otteniamo:



$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k + o(x^n),$$

ovvero il polinomio di Mac Laurin della funzione  $e^{-x}$ .

Supponiamo poi di voler determinare l'espressione del polinomio di Mac Laurin della funzione  $f(x) = x e^{-x}$ .

Eseguiamo il calcolo dei coefficienti, nel modo stabilito dal precedente Teorema, una volta verificato che la funzione è continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, e quindi anche nel punto  $x = 0$ , ed avremo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{-x}, \text{ da cui } f(0) = 0; \\ f'(x) &= e^{-x} - x e^{-x}, \text{ da cui } f'(0) = 1; \\ f''(x) &= -2 e^{-x} + x e^{-x}, \text{ da cui } f''(0) = -2; \\ f'''(x) &= 3 e^{-x} - x e^{-x}, \text{ da cui } f'''(0) = 3; \\ f^{(4)}(x) &= -4 e^{-x} + x e^{-x}, \text{ da cui } f^{(4)}(0) = -4; \\ f^{(5)}(x) &= 5 e^{-x} - x e^{-x}, \text{ da cui } f^{(5)}(0) = 5; \\ f^{(6)}(x) &= -6 e^{-x} + x e^{-x}, \text{ da cui } f^{(6)}(0) = -6; \end{aligned}$$

dalle quali, per analogia, possiamo ricavare la legge generale, ovvero:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot k e^{-x} + (-1)^k \cdot x e^{-x}, \text{ dalla quale otteniamo:}$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \cdot k, \text{ e quindi:}$$

$$x e^{-x} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \cdot k}{k!} \cdot x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} \cdot x^k + o(x^n).$$

Si può pervenire allo stesso risultato anche in maniera molto più rapida. Essendo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + o(x^n), \text{ ovvero:}$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k + o(x^n),$$

otteniamo, moltiplicando per  $x$  ambo i membri:

$$x e^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots + x \cdot \frac{(-x)^n}{n!} + x \cdot o(x^n)$$

e quindi:

$$x e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} \cdot x^k + o(x^{n+1}),$$

ovvero l'espressione già trovata con l'altra procedura.

### **Polinomio di Mac Laurin delle funzioni $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$**

Per  $f(x) = \sin x$ , funzione continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, avremo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, \text{ da cui: } f(0) = 0, \\ f'(x) &= \cos x, \text{ da cui: } f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -\sin x, \text{ da cui: } f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, \text{ da cui: } f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \text{ da cui: } f^{(4)}(0) = 0, \end{aligned}$$

e proseguendo per analogia, vista la periodicità di tali risultati, avremo anche:

$$f^{(5)}(0) = 1, f^{(6)}(0) = 0, f^{(7)}(0) = -1, f^{(8)}(0) = 0, \text{ e così via.}$$

Essendo  $f(x) = \sin x$  una funzione dispari ( $\sin(-x) = -\sin x$ ), per il polinomio di Mac Laurin otteniamo la seguente espressione, costituita dalle sole potenze dispari:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

ovvero l'espressione:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Per  $f(x) = \cos x$ , funzione continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, avremo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, \text{ da cui } f(0) = 1, \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x, \text{ da cui } f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x, \text{ da cui } f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x, \text{ da cui } f'''(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, \text{ da cui } f^{(4)}(0) = 1, \end{aligned}$$

e quindi poi:

$$f^{(5)}(0) = 0, f^{(6)}(0) = -1, f^{(7)}(0) = 0, f^{(8)}(0) = 1, \text{ e così via.}$$

Dato che  $f(x) = \cos x$  è una funzione pari ( $\cos(-x) = \cos x$ ), per il polinomio di Mac Laurin otteniamo la seguente espressione, costituita dalle sole potenze pari:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + o(x^{2n})$$

ovvero l'espressione:

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + o(x^{2n}).$$

### Polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \log(1+x)$

Non potendosi costruire il polinomio di Mac Laurin per la funzione  $f(x) = \log x$ , definita solo per  $x > 0$ , si costruisce quello della funzione  $f(x) = \log(1+x)$ , definita, continua e derivabile infinite volte  $\forall x > -1$ . Avremo allora:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x), \text{ da cui } f(0) = 0, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \text{ da cui } f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2}, \text{ da cui } f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= 2 \cdot (1+x)^{-3}, \text{ da cui } f'''(0) = 2, \\ f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-4}, \text{ da cui } f^{(4)}(0) = -(3!), \\ f^{(5)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-5}, \text{ da cui } f^{(5)}(0) = 4!, \end{aligned}$$

dalle quali si deduce la legge generale:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1} \cdot (k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-k}, \text{ e quindi} \\ f^{(k)}(0) &= (-1)^{k+1} \cdot (k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = (-1)^{k+1} \cdot (k-1)! \end{aligned}$$

da cui segue l'espressione finale:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot x^k + o(x^n) \text{ ovvero:} \\ \log(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + o(x^n). \end{aligned}$$

**Esempio 41** : Calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3}$ , che si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ .

Vediamo da questo esempio come non sia corretto usare sostituzioni di tipo asintotico in presenza di somme (e differenze) di infinitesimi. Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ , sappiamo che  $\operatorname{sen} x \sim x$

per  $x \rightarrow 0$ ; se sostituiamo  $\operatorname{sen} x$  con  $x$ , otteniamo:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ , come visto nella risoluzione dei limiti notevoli. Vediamo che tale risultato è errato. Infatti, usando la Regola di De L'Hopi-

tal, si calcola  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$ , e non  $\frac{1}{2}$  come trovato in precedenza. Quindi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$ .

Possiamo risolvere tale limite anche utilizzando il Polinomio di Mac Laurin:

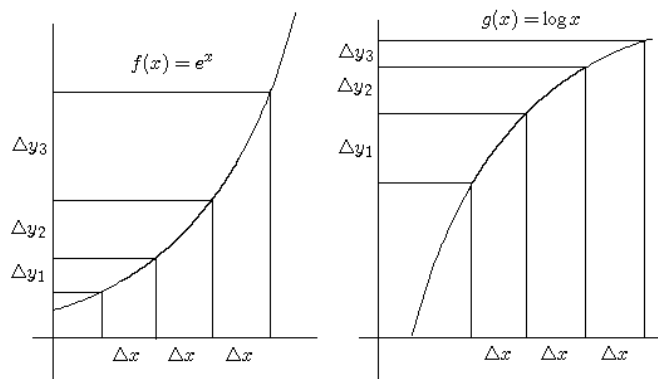
essendo  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  e  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

### FUNZIONI CONVESSE E FUNZIONI CONCAVE

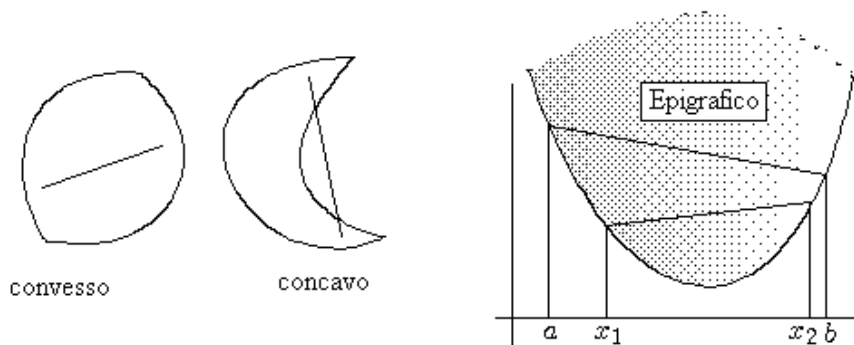
L'ultima applicazione della derivata è rivolta allo studio di una importante proprietà delle funzioni, che porta alla definizione di funzione convessa e di funzione concava. Introduciamo questo concetto con un esempio, considerando le due funzioni  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \log x$ .

Ambedue, dove esistono, sono funzioni crescenti, ma possiamo ulteriormente analizzare questa loro proprietà. Se, preso un intervallo  $]a, b[$ , lo suddividiamo in sottointervalli della stessa ampiezza, diciamo  $\Delta x$ , e valutiamo i corrispondenti incrementi sulle ordinate, diciamo  $\Delta y$ , vediamo che la sequenza dei  $\Delta y$  per la funzione  $f(x) = e^x$  è crescente, ovvero a parità di  $\Delta x$  i corrispondenti  $\Delta y$  sono sempre più grandi, mentre per la funzione  $g(x) = \log x$  accade esattamente il contrario, ovvero, a parità di  $\Delta x$  i corrispondenti  $\Delta y$  sono sempre più piccoli. Possiamo concludere dicendo che la funzione  $f(x) = e^x$  cresce crescendo, mentre la funzione  $g(x) = \log x$  cresce, però decrescendo.



Per formalizzare opportunamente questi concetti iniziamo riprendendo la definizione di insieme convesso e di insieme concavo per le figure piane.

**Definizione 5:** Un insieme  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$  è detto convesso se, presi due suoi qualsiasi punti, il segmento che li congiunge è tutto contenuto in  $\mathbb{A}$ . Se anche un solo punto di tale segmento appartiene al complementare di  $\mathbb{A}$ , l'insieme è detto concavo.



Segue subito che, per tale definizione, ogni figura piana risulta o convessa o concava. Non sarà così invece per le funzioni, che possono anche non essere né convesse né concave.

Per dare la definizione di funzione convessa o concava, occorre anzitutto la seguente:

**Definizione 6 :** Dicesi **Epigrafo** di una funzione la parte del piano  $\mathbb{R}^2$  che sta al di sopra del grafico della funzione, ovvero l'insieme:  $\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ .

Come si vede, il grafico fa parte dell'Epigrafo e ne costituisce il bordo inferiore.

Possiamo ora dare la

**Definizione 7 :** La funzione  $y = f(x)$  si dice **convessa** in  $]a, b[$  se il suo Epigrafo, relativo a tale intervallo:  $\mathcal{E}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x), a < x < b\}$ , è una figura piana convessa.

Osserviamo subito che tale definizione è relativa ad un certo insieme, normalmente un intervallo, per cui una funzione può benissimo soddisfare la definizione in un intervallo e non soddisfarla in un altro. Contrariamente poi alle figure piane, se una funzione non soddisfa la definizione di convessità, non viene automaticamente definita come concava. Vale invece la

**Definizione 8 :** La funzione  $y = f(x)$  si dice **concava** in  $]a, b[$  se risulta convessa in  $]a, b[$  la funzione  $y = -f(x)$ .

Ovvero, le funzioni concave sono le simmetriche, rispetto all'asse delle ascisse, delle funzioni convesse.

Vista la definizione di funzione convessa, ovvero di funzione il cui Epigrafo risulti convesso, possiamo affermare che

**Teorema 19 :** Una funzione è convessa in  $]a, b[$  se, presi due punti qualsiasi appartenenti al suo Epigrafo, il segmento che li congiunge è tutto contenuto nell'Epigrafo stesso, ovvero tale segmento è situato tutto non al di sotto del grafico.

Ma questa condizione può essere ridotta, come stabilito dal

**Teorema 20 :** Una funzione è convessa in  $]a, b[$  se, presi due punti qualsiasi appartenenti al suo grafico, il segmento che li congiunge sta tutto non al di sotto del grafico stesso.

Si può dare la versione in forma analitica di quest'ultima condizione.

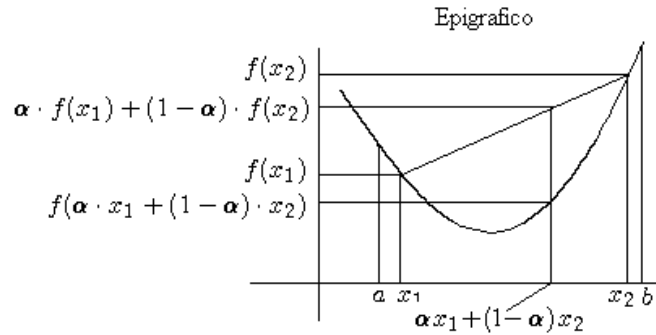
Presi due punti  $x_1, x_2 \in ]a, b[$ , un qualsiasi punto  $x : x_1 \leq x \leq x_2$ , può essere espresso come:  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , cosiddetta combinazione lineare convessa di  $x_1$  e  $x_2$ .

L'immagine di tale punto sul grafico della funzione sarà data da:  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2)$ .

L'immagine di tale punto sulla retta passante per  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  è data invece da:  $r(x) = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , che è la combinazione lineare convessa delle immagini.

La definizione di funzione convessa in  $]a, b[$  può essere allora formulata dicendo che:

$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in ]a, b[, 0 \leq \alpha \leq 1$ .



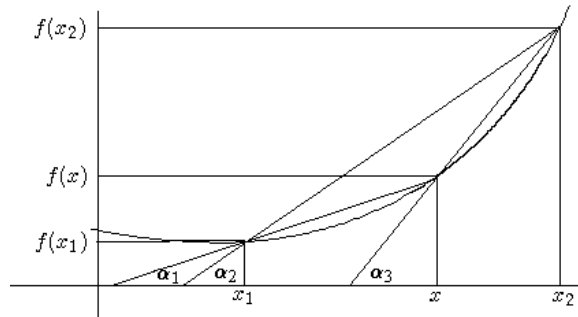
Passiamo ora ai legami tra convessità e derivabilità. Cominciamo con il

**Teorema 21** : Sia data una funzione  $f(x)$  convessa e derivabile in  $]a, b[$ . Allora la sua funzione derivata  $f'(x)$  è crescente in  $]a, b[$ .

**Dimostrazione** : Siano, nell'ordine:  $x_1 < x < x_2$  tre punti appartenenti ad  $]a, b[$ . Risulta:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}, \text{ in quanto:}$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \text{tg } \alpha_1, \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \text{tg } \alpha_2, \quad \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \text{tg } \alpha_3.$$



Sarà quindi, dato che  $f(x)$  è derivabile dappertutto:

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}, \text{ ovvero:}$$

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'_-(x_2), \text{ ovvero, essendo } f(x) \text{ derivabile:}$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2), \text{ e quindi: } f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

Quindi  $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$ , ovvero la funzione  $f'(x)$  è crescente. •

Possiamo allora applicare il Teorema 16 e dedurre il

**Teorema 22** : Sia data una funzione  $f(x)$  convessa e derivabile due volte in  $]a, b[$ . Allora la sua funzione derivata seconda  $f''(x)$  è non negativa in  $]a, b[$ , ovvero  $f''(x) \geq 0, \forall x \in ]a, b[$ .

**Dimostrazione** : Immediata, basta applicare il Teorema 16 alla funzione  $f'(x)$  che è crescente e derivabile in  $]a, b[$  e quindi la sua derivata  $\mathcal{D}(f'(x)) = f''(x)$  sarà non negativa in  $]a, b[$ . •

Si può poi dimostrare, ma qui lo omettiamo, che vale anche il viceversa, per cui abbiamo il:

**Teorema 23** :  $f(x)$  convessa e derivabile due volte in  $]a, b[ \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in ]a, b[$ .

Per le funzioni concave vale invece il

**Teorema 24** :  $f(x)$  concava e derivabile due volte in  $]a, b[ \Leftrightarrow f''(x) \leq 0, \forall x \in ]a, b[$ .

## CONVESSITA' E RETTA TANGENTE

Supponendo che la funzione sia derivabile due volte in un intorno di  $x_0$ , usando il polinomio di Taylor di secondo grado, si ha:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$  da cui otteniamo:

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)) = \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Dato che il termine  $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  rappresenta l'equazione della retta tangente al grafico di  $f(x)$  nel punto  $x_0$ , posto  $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = r_t(x, x_0)$ , si ha:

$$f(x) - r_t(x, x_0) = \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Da questa vediamo che il segno della differenza  $f(x) - r_t(x, x_0)$  coincide con quello di  $f''(x_0)$ , per cui si ha il

**Teorema 25** : Se  $f(x)$  è convessa e derivabile due volte in  $]a, b[$ , allora il grafico della funzione è situato al di sopra della retta tangente in un qualunque punto  $x_0 \in ]a, b[$ ; nel caso di funzione concava è situato invece al di sotto.

## PUNTI DI FLESSO

Esistono tre possibili definizioni di punto di flesso:

- 1) un punto nel quale la retta tangente al grafico della funzione attraversa il grafico, passando da sotto a sopra o viceversa;
- 2) un punto nel quale  $f'(x)$  risulta massima oppure minima, potendo anche essere infinita;
- 3) un punto nel quale la funzione passa da concava a convessa o viceversa.

Si verifica che i flessi di tipo 3 sono anche flessi di tipo 2, e che i flessi di tipo 2 sono anche di tipo 1. Quindi nel tipo 1 sono compresi tutti i casi possibili, mentre il tipo 3 rappresenta il caso meno generale.

Noi adottiamo la definizione più tradizionale, anche se meno generale, ovvero la terza, e quindi diamo la

**Definizione 9** : Un punto  $x_0$  è detto di **flesso** per la funzione  $f(x)$  se a sinistra del punto la funzione risulta convessa e a destra del punto risulta concava, o viceversa.

Quindi il punto di flesso segna il passaggio da concavità a convessità o viceversa.

Per quanto visto prima, quindi, se nel punto  $x_0$  c'è un punto di flesso, e se in tale punto la funzione è derivabile, allora la retta tangente attraversa il grafico della funzione.

Analogamente a quanto visto nel Teorema di Fermat per i punti di massimo e minimo relativo, vale il seguente

**Teorema 26** : Se  $x_0$  è punto di flesso per la funzione  $f(x)$  e se esiste  $f''(x_0)$ , allora risulta  $f''(x_0) = 0$ .

## ANALISI DEI PUNTI STAZIONARI

In un punto di flesso, analogamente a quanto stabilito per i punti di massimo e minimo relativo riguardo alla derivata prima nel punto, si ha che la derivata seconda o si annulla oppure non esiste. L'annullamento della derivata seconda in un punto non significa comunque che nel punto vi sia un flesso. Anche in un punto di massimo o minimo relativo si può avere l'annullamento della derivata seconda.

Si determinano i punti di massimo e di minimo relativo studiando il segno della derivata  $f'(x)$  in un intorno di  $x_0$ : se  $f'(x_0) = 0$  e se la derivata prima cambia di segno passando per  $x_0$  allora il punto è di massimo o di minimo; se non cambia di segno  $x_0$  è un punto di flesso a tangente orizzontale.

In maniera analoga, se  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$  e se la derivata seconda cambia di segno passando per  $x_0$ , allora il punto  $x_0$  è di flesso, se non cambia di segno il punto  $x_0$  è di massimo o minimo relativo.

Notiamo come il cambiamento di segno della derivata prima sia condizione sufficiente ad assicurare un punto di massimo o di minimo così come il cambiamento di segno della derivata

seconda basta ad assicurare la presenza di un punto di flesso. Non è però vero il viceversa, in quanto si possono avere punti di massimo o minimo in ogni intorno dei quali la derivata prima cambia infinite volte di segno, e così punti di flesso in ogni intorno dei quali cambia infinite volte di segno la derivata seconda.

**Esempio 42 :** Consideriamo la funzione  $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ .

Dato che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , essa è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Per vedere se è derivabile nel punto  $x = 0$ , calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Quindi  $f'(0) = 0$ . Risulta  $x^2 \leq f(x) \leq 3x^2$ , quindi  $f(x) > 0 \forall x \neq 0$  mentre  $f(0) = 0$ , e quindi nel punto  $x = 0$  c'è un punto di minimo.

La funzione derivata  $f'(x) = 2x \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}$  però cambia di segno infinite volte in ogni intorno del punto  $x = 0$  a causa delle oscillazioni dei fattori  $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$  e  $\cos \frac{1}{x}$ . Non era quindi possibile individuare tale punto di minimo mediante un cambio di segno di  $f'(x)$  nell'attraversamento del punto  $x = 0$ .

**Esempio 43 :** Consideriamo la funzione  $f(x) = \begin{cases} x^5 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ .

Dato che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , essa è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Per vedere se è derivabile nel punto  $x = 0$ , calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Quindi  $f'(0) = 0$ . Risulta  $x^5 \leq f(x) \leq 3x^5$ , per cui  $f(x) < 0$  per  $x < 0$  mentre  $f(x) > 0$  per  $x > 0$ ; inoltre  $f(0) = 0$ .

Per questo motivo la funzione non può avere in  $x = 0$  nè un punto di massimo nè un punto di minimo. Rimane la possibilità del punto di flesso a tangente orizzontale.

La funzione derivata  $f'(x) = 5x^4 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - x^3 \cos \frac{1}{x}$  è tale che:

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ , e quindi è anch'essa continua in  $x = 0$ .

Per cui risulta  $f'(x) = \begin{cases} 5x^4 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - x^3 \cos \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ . Da questa si ha:

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - x^3 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} =$$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(5x^3 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - x^2 \cos \frac{1}{x}\right) = 0$ . La funzione risulta derivabile due volte in  $x = 0$  con  $f''(0) = 0$ . Nel punto concludiamo che c'è un flesso (un punto nel quale la retta tangente attraversa il grafico della funzione), che non può essere determinato studiando il se-

gno di  $f''(x)$  in un intorno del punto, dato che il segno cambia infinite volte a causa delle oscillazioni dei fattori  $\sin \frac{1}{x}$  e  $\cos \frac{1}{x}$ .

Questo è un tipico punto da denotarsi come flesso di tipo 1.

### USO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE PER L'ANALISI DEI PUNTI STAZIONARI

Esiste una metodologia, alternativa a quella dello studio del segno delle derivate  $f'(x)$  e  $f''(x)$ , per determinare la natura dei punti stazionari, cioè dei punti in cui sia  $f'(x_0) = 0$ .

Supponiamo che la funzione  $f(x)$  sia derivabile  $n$  volte in un intorno  $\mathfrak{J}(x_0)$ , per cui avremo:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \text{ o anche:}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x - x_0)^3 + \dots + \\ + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Se risultasse  $f''(x_0) \neq 0$ , avremo, essendo  $f'(x_0) = 0$ :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

cioè il segno della differenza  $f(x) - f(x_0)$  coincide con quello di  $f''(x_0)$ , dato che  $(x - x_0)^2$  è sempre positivo mentre  $o((x - x_0)^2)$  è un termine trascurabile. Quindi:

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) & : x_0 \text{ è punto di minimo} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) & : x_0 \text{ è punto di massimo} \end{cases}$$

Tali deduzioni sono coerenti con il fatto che  $f''(x_0) > 0$  comporta la convessità della funzione in  $x_0$ , e la convessità si accompagna ai punti di minimo. Analoghe considerazioni, relative a concavità e a punto di massimo, nel caso  $f''(x_0) < 0$ .

Supponiamo che sia invece  $f''(x_0) = 0$ , e, per trattare il problema in modo generale, supponiamo che nel punto  $x_0$  siano nulle tutte le derivate, dalla prima fino a quella di ordine  $n - 1$ :  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,

e che sia invece diversa da zero la derivata  $n$ -esima:  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Avremo allora:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Da questo deduciamo che la differenza  $f(x) - f(x_0)$ , se  $n$  è pari, ha lo stesso segno di  $f^{(n)}(x_0)$ , in quanto  $(x - x_0)^n$  è sempre positivo mentre  $o((x - x_0)^n)$  è un termine trascurabile. Quindi:

$$\text{per } n \text{ pari: } \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) & : x_0 \text{ è punto di minimo} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) & : x_0 \text{ è punto di massimo} \end{cases}$$

Se invece  $n$  è dispari, si deve considerare anche il segno di  $(x - x_0)^n$ , che sarà negativo per  $x < x_0$  e positivo per  $x > x_0$ . Quindi la differenza  $f(x) - f(x_0)$  cambia di segno passando da  $x < x_0$  a  $x > x_0$ . Il punto  $x_0$  quindi non è di massimo e neppure di minimo; essendo un punto stazionario lo classifichiamo come punto di flesso a tangente orizzontale.

### STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Utilizzando le principali applicazioni del calcolo differenziale, possiamo schematizzare i passi occorrenti per la determinazione dell'andamento del grafico di una funzione.

1) Determinare il campo d'esistenza della funzione, vedendo se questo sia limitato o illimitato, e determinandone i punti di frontiera.

2) Calcolare il limite della funzione nei punti di frontiera del campo d'esistenza, determinando gli eventuali punti di discontinuità, e calcolando il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e/o per  $x \rightarrow -\infty$  se il campo d'esistenza risulta illimitato superiormente o inferiormente.



In questa fase si determinano gli eventuali asintoti verticali ed orizzontali della funzione.

3) Imporre  $f(x) \geq 0$  per vedere dove il grafico della funzione sta sopra e dove sotto all'asse delle ascisse, trovando anche, per  $f(x) = 0$ , dove lo taglia.

4) Imporre  $f'(x) \geq 0$  per vedere dove la funzione risulta crescente e dove decrescente, determinando di conseguenza gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo.

5) Imporre  $f''(x) \geq 0$  per vedere dove la funzione risulta convessa e dove concava, determinando di conseguenza gli eventuali punti di flesso.

6) Determinare gli eventuali asintoti obliqui della funzione.

**Esempio 44** : Determiniamo l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = x^3 \log^2 x$ .

1) La funzione è definita per  $x > 0$ , ovvero per  $0 < x < +\infty$ .

2) Si ha :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \log^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log^2 x}{x^{-3}} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log x}{-3 x^{-3}} \stackrel{H}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{9 x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{9} x^3 = 0^+;$$

visto il risultato di questo limite, e dato che la funzione, dove esiste, è continua, non ci sono asintoti verticali.

Invece  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \log^2 x = +\infty$ , in quanto prodotto di due infiniti, e da questo limite vediamo che non c'è asintoto orizzontale.

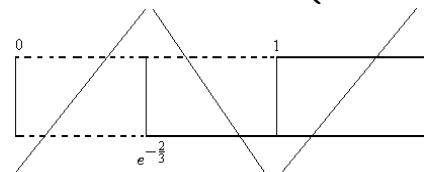
3) Risulta  $f(x) = 0$  per  $\log^2 x = 0$ , cioè per  $x = 1$ , mentre  $f(x) > 0$  nel resto del dominio.

Già da questo si vede che  $x = 1$  è punto di minimo assoluto.

4) Calcoliamo  $f'(x)$  e studiamone il segno per vedere dove la funzione è crescente e dove decrescente.

$$f'(x) = 3x^2 \log^2 x + x^3 \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = x^2 \log x (3 \log x + 2) \geq 0 \text{ per :}$$

$$\begin{cases} \log x \geq 0 \\ 3 \log x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \log x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq e^{-\frac{2}{3}} \end{cases} \text{ e quindi, come si vede dallo schema:}$$



$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } 0 < x < e^{-\frac{2}{3}} \cup x > 1 \\ f'(x) < 0 & \text{per } e^{-\frac{2}{3}} < x < 1 \end{cases}$$

Dato che la funzione è continua, in  $x = e^{-\frac{2}{3}}$  si ha un punto di massimo, mentre in  $x = 1$  un punto di minimo.

5) Calcoliamo  $f''(x)$  e studiamone il segno per vedere dove la funzione è convessa e dove concava.

$$f''(x) = 6x \log^2 x + 6x \log x + 4x \log x + 2x = 2x (3 \log^2 x + 5 \log x + 1) \geq 0 \text{ per :}$$

$$3 \log^2 x + 5 \log x + 1 \geq 0. \text{ Avremo } \log x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}, \text{ e quindi:}$$

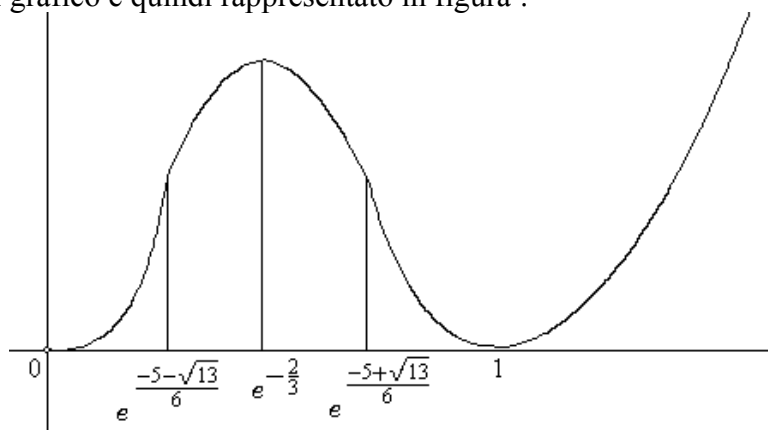
$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{per } \log x < \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} \cup \log x > \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \\ f''(x) < 0 & \text{per } \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} < \log x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \end{cases}, \text{ ovvero :}$$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{per } 0 < x < e^{\frac{-5 - \sqrt{13}}{6}} \cup x > e^{\frac{-5 + \sqrt{13}}{6}} : \text{ funzione convessa} \\ f''(x) < 0 & \text{per } e^{\frac{-5 - \sqrt{13}}{6}} < x < e^{\frac{-5 + \sqrt{13}}{6}} : \text{ funzione concava} \end{cases}$$

I due punti  $x_1 = e^{\frac{-5 - \sqrt{13}}{6}}$  e  $x_2 = e^{\frac{-5 + \sqrt{13}}{6}}$  sono due punti di flesso, a tangente non orizzontale.

6) Dato che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \log^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log^2 x = +\infty$ , non esiste asintoto obliquo per il grafico di  $f(x)$ .

L'andamento del grafico è quindi rappresentato in figura :



## ALGEBRA LINEARE

### VETTORI

Consideriamo  $\mathbb{R}^n$ , prodotto cartesiano di  $\mathbb{R}$  con sé stesso  $n$  volte, ovvero l'insieme formato da tutte le possibili  $n$ -uple di numeri reali  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ogni  $n$ -upla verrà detta anche **vettore**. Ogni vettore verrà denotato con una lettera maiuscola o mediante la  $n$ -upla delle componenti che lo rappresenta:  $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Se  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$  si dirà anche che  $\mathbb{X}$  ha  $n$  componenti oppure che ha dimensione  $n$ .

Dal punto di vista geometrico, ogni vettore  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$  individua una retta, e precisamente la retta passante per il punto  $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0)$  e per il punto  $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Il vettore  $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0)$  prende il nome di **vettore nullo**.

### OPERAZIONI SUI VETTORI

Siano dati due vettori:  $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , aventi cioè uguale numero di componenti.

**Definizione 10** : Si definisce la **somma** di due vettori come il vettore:

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Si estende facilmente la definizione alla somma di un numero qualunque di vettori.

**Esempio 45** : se  $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$  e  $\mathbb{Y} = (5, 2, -3)$ , allora  $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = (8, 1, -3)$ .

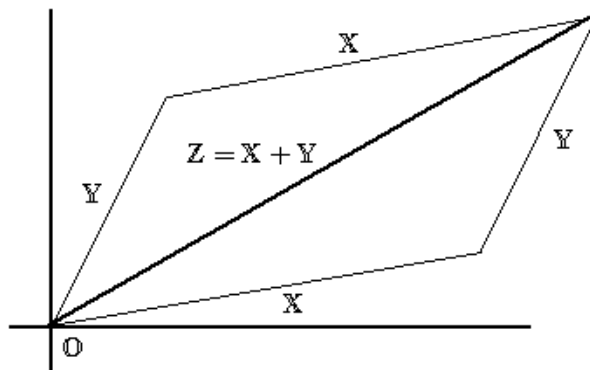
Valgono per la somma di vettori le proprietà:

S1) commutativa:  $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \mathbb{Y} + \mathbb{X}$

S2) associativa:  $\mathbb{X} + (\mathbb{Y} + \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} + \mathbb{Y}) + \mathbb{Z}$ .

S3) esiste l'**elemento neutro** rispetto a tale operazione:  $\mathbb{X} + \mathbb{O} = \mathbb{X}$ .

La somma di due vettori è rappresentabile graficamente mediante la cosiddetta regola del parallelogramma: dati  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ , il vettore somma  $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$  coincide con la diagonale del parallelogramma avente  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  per lati, come illustrato in figura:



**Definizione 11 :** Preso  $k \in \mathbb{R}$  (detto anche **scalare**), si definisce il **prodotto dello scalare  $k$  per il vettore  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$**  come il vettore:  $k \cdot \mathbb{X} = (k x_1, k x_2, \dots, k x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Esempio 46 :** se  $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$  e  $k = 5$ , si ha  $5 \cdot \mathbb{X} = (15, -5, 0)$ .

Per il prodotto di uno scalare per un vettore, dati  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  e  $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ , valgono le seguenti proprietà:

P1)  $k_1 \cdot k_2 \cdot \mathbb{X} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbb{X}) = k_2 \cdot (k_1 \cdot \mathbb{X}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbb{X}$ ;

P2)  $(k_1 + k_2) \cdot \mathbb{X} = k_1 \cdot \mathbb{X} + k_2 \cdot \mathbb{X}$ ;

P3)  $k \cdot (\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = k \cdot \mathbb{X} + k \cdot \mathbb{Y}$ .

Moltiplicare un vettore  $\mathbb{X}$  per uno scalare  $k$  significa ottenere un vettore che sta sulla stessa retta di  $\mathbb{X}$ , orientato dalla stessa parte di  $\mathbb{X}$  se  $k > 0$ , da parte opposta se  $k < 0$ , più lungo di  $\mathbb{X}$  se  $k > 1$  o se  $k < -1$ , più corto di  $\mathbb{X}$  se  $-1 < k < 1$ .

**Definizione 12 :** Dati  $p$  vettori  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_p \in \mathbb{R}^n$  e  $p$  scalari  $k_1, k_2, \dots, k_p \in \mathbb{R}$ , si definisce la **combinazione lineare** di questi vettori, con i dati scalari  $k_i$ , come il vettore:

$$k_1 \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{X}_2 + \dots + k_p \mathbb{X}_p = \sum_{i=1}^p k_i \mathbb{X}_i,$$

ovvero la somma dei  $p$  vettori  $\mathbb{X}_i$ , ciascuno moltiplicato per il corrispondente scalare  $k_i$ .

**Esempio 47 :** se  $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$ ,  $\mathbb{Y} = (5, 2, -3)$  e  $\mathbb{Z} = (-4, 2, 2)$ , e se  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = -2$  e  $k_3 = 2$ , avremo:  $3\mathbb{X} + (-2)\mathbb{Y} + 2\mathbb{Z} = (-9, -3, 10)$ .

**Definizione 13 :** La **differenza** di due vettori si può definire come la loro combinazione lineare a coefficienti 1 e  $-1$ :  $\mathbb{X} - \mathbb{Y} = 1 \cdot \mathbb{X} + (-1) \cdot \mathbb{Y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ . Esiste quindi l'elemento inverso rispetto alla somma:  $\mathbb{X} - \mathbb{X} = \mathbb{X} + (-1)\mathbb{X} = \mathbb{O}$ .

Anche la differenza di due vettori può essere rappresentata graficamente. Posto  $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ , otteniamo  $\mathbb{Y} = \mathbb{Z} - \mathbb{X}$ , per la quale, facendo riferimento alla figura relativa alla regola del parallelogramma, vediamo come il vettore  $\mathbb{Y}$ , che rappresenta appunto la differenza, sia il vettore che partendo dal punto  $\mathbb{X}$ , il vettore che si sottrae, porta al punto  $\mathbb{Z}$ , quello da cui si sottrae.

## PRODOTTO SCALARE, MODULO

**Definizione 14 :** Dati due vettori di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$ , si definisce **prodotto scalare** dei due vettori, indicato con  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$ , (o con  $\langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle$ ) la somma dei prodotti delle loro componenti di uguale indice:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

Notiamo quindi che  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$  dà per risultato un numero reale e non un vettore.

**Esempio 48** : se  $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$  e  $\mathbb{Y} = (5, 2, -3)$ , si ha:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 13 .$$

**Definizione 15** : Si definisce **modulo** (o norma) di un vettore  $\mathbb{X}$ , e si indica con  $\|\mathbb{X}\|$ , la radice quadrata del prodotto scalare del vettore  $\mathbb{X}$  per se stesso:  $\|\mathbb{X}\| = \sqrt{\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  .

Un vettore il cui modulo sia uguale ad 1 verrà detto **versore** o **vettore normalizzato**.

Dato un vettore  $\mathbb{X}$ , per costruire il suo versore  $\mathbb{X}_v$  si calcola  $\mathbb{X}_v = \frac{\mathbb{X}}{\|\mathbb{X}\|} = \frac{1}{\|\mathbb{X}\|} \cdot \mathbb{X}$  .

**Esempio 49** : se  $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$  risulta:  $\|\mathbb{X}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$  .

Per ottenere il versore basta calcolare  $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \mathbb{X} = \left( \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, 0 \right)$  .

## DISTANZA EUCLIDEA. INTORNI

**Definizione 16** : Dati due vettori  $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , si definisce la **distanza** (euclidea) dei due vettori come il numero reale non negativo:

$$d(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} .$$

Il modulo di un vettore  $\mathbb{X}$  coincide con la distanza del vettore  $\mathbb{X}$  dal vettore nullo  $\mathbb{O}$ .

Nel caso  $n = 2$  con la  $\|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$  ritroviamo

la formula della distanza tra due punti  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  nel piano cartesiano.

Mediante la distanza euclidea si definisce l'**intorno** del punto  $\mathbb{X}_0 \in \mathbb{R}^n$  come l'insieme:

$$\mathfrak{J}(\mathbb{X}_0, \varepsilon) = \{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\| < \varepsilon\} .$$

Rimangono invariate le definizioni topologiche di punto già date in  $\mathbb{R}$ .

## PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE

Vale la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\| \cdot \cos \alpha ,$$

dove  $\alpha$  è l'angolo formato dai due vettori.

Se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  il prodotto scalare è nullo:  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = 0$ , e i due vettori si dicono **perpendicolari**.

Se  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  si ha  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} > 0$ , mentre se  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  si ha  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} < 0$ ; quindi se i due vettori formano un angolo acuto il loro prodotto scalare è positivo, altrimenti negativo.

Se  $\alpha = 0$ , cioè se i vettori sono paralleli con uguale verso, il loro prodotto scalare è massimo:  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\|$ , mentre se  $\alpha = \pi$ , ovvero i vettori sono paralleli ma con verso opposto, il loro prodotto scalare è minimo:  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = -\|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\|$ .

Valgono, per il modulo, due disuguaglianze:

-la disuguaglianza triangolare:  $\|\mathbb{X} + \mathbb{Y}\| \leq \|\mathbb{X}\| + \|\mathbb{Y}\|$ ,

ovvero il modulo di una somma è minore o uguale della somma dei moduli, e

-la disuguaglianza di Schwarz:  $|\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}| \leq \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\|$ ,

ovvero il valore assoluto del prodotto scalare di due vettori è minore o uguale del prodotto dei moduli dei due vettori.

Quest'ultima discende subito dalla  $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\| \cdot \cos \alpha$ , sostituendo a  $\cos \alpha$  il suo valore massimo, ovvero 1.

## MATRICI

Il modo più semplice di introdurre il concetto di matrice è quello di definire le matrici come tabelle di numeri reali, ordinate per linee orizzontali e verticali: le righe e le colonne.

Anche le matrici verranno indicate con lettere maiuscole, e scriveremo, ad esempio:

$$\mathbb{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Il primo dei due indici alla base dell'elemento è detto indice di riga, l'altro di colonna, e diremo che la matrice  $\mathbb{A}$  è una matrice  $(m \cdot n)$  se essa è formata da  $m$  righe ed  $n$  colonne.

Una matrice può essere infatti definita anche come un insieme di vettori ordinati, in orizzontale le righe, ed in verticale le colonne.

Scrivendo  $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$ , indichiamo la matrice  $\mathbb{A}$  formata da  $m$  righe ed  $n$  colonne il cui generico elemento di posto  $(i, j)$  è  $a_{ij}$ .

Chiameremo  $R_1, R_2, \dots, R_m$  le sue righe, ciascuna delle quali è un vettore di  $\mathbb{R}^n$ , avente cioè tante componenti quante sono le colonne della matrice, ed in modo simile indicheremo con  $C_1, C_2, \dots, C_n$  le sue colonne, che sono invece vettori di  $\mathbb{R}^m$  ed hanno ciascuna  $m$  componenti, tante quante sono le righe di  $\mathbb{A}$ .

Scriveremo  $\mathbb{A} = [C_1 | C_2 | \dots | C_n]$  per indicare la matrice  $\mathbb{A}$  mediante le sue colonne, mentre scriveremo, meglio se in verticale,  $\mathbb{A} = [R_1 | R_2 | \dots | R_m]$  per indicarla mediante le sue righe.

Una matrice si dice **quadrata** se il numero  $n$  delle sue righe è uguale a quello delle colonne (questo numero è detto **ordine** della matrice e la matrice verrà denotata con  $\mathbb{A}_n$ ), altrimenti essa è detta **rettangolare**.

## OPERAZIONI SULLE MATRICI

Le principali operazioni sulle matrici non sono altro che una estensione delle operazioni che sono state definite per i vettori.

**Definizione 17** : Date due matrici, aventi  $m$  righe ed  $n$  colonne,  $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$  e  $\mathbb{B}_{m,n} = [b_{ij}]$ , si definisce la loro **matrice somma** come la matrice, anch'essa  $(m \cdot n)$ , avente come elemento di indici  $(i, j)$  la somma degli elementi di indici  $(i, j)$  delle matrici date:

$$\mathbb{C}_{m,n} = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

**Definizione 18** : Si definisce il **prodotto di uno scalare  $k$  per una matrice  $\mathbb{A}_{m,n}$**  come la matrice  $(k \mathbb{A})_{m,n} = [k a_{ij}]$ , avente cioè per elementi gli elementi della matrice data  $\mathbb{A}$ , ciascuno moltiplicato per lo scalare  $k$ .

Una combinazione lineare di quante si vogliono matrici, tutte comunque aventi  $m$  righe ed  $n$  colonne, a coefficienti scalari dati, si definisce come la matrice avente per elemento di posto  $(i, j)$  la combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, degli elementi di posto  $(i, j)$  delle matrici date. Limitandoci al caso di due sole matrici,  $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$  e  $\mathbb{B}_{m,n} = [b_{ij}]$ , avremo:

$$\alpha \mathbb{A}_{m,n} + \beta \mathbb{B}_{m,n} = [\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot b_{ij}].$$

**Esempio 50** : Se  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$  e  $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ , sarà allora:

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} + 2\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1+2 & 3+0 & -4+0 \\ 0+6 & 1-2 & 2-4 \\ 1+0 & -2+6 & 5+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

### PRODOTTO RIGHE PER COLONNE TRA MATRICI

Molti sono i prodotti che si possono definire tra due matrici. Noi tratteremo solo il cosiddetto prodotto "righe per colonne", che, tra le altre proprietà, gode della proprietà associativa.

Il **prodotto righe per colonne** tra due matrici è basato sul prodotto scalare di due vettori, in questo caso le righe della prima matrice per le colonne della seconda.

Quindi due matrici saranno tra loro moltiplicabili "righe per colonne" solo se i vettori riga della prima e i vettori colonna della seconda hanno lo stesso numero di componenti, e questo accade quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda.

**Definizione 19** : Prese allora due matrici  $\mathbb{A}_{m,n}$  e  $\mathbb{B}_{n,p}$ , i cui elementi siano  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , e  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ , la matrice prodotto  $\mathbb{C}_{m,p} = \mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{B}_{n,p}$ , avente, come si vede, tante righe,  $m$ , quante la prima matrice e tante colonne,  $p$ , quante la seconda, è definita nel seguente modo: il suo elemento di posto  $(i, j)$ ,  $c_{ij}$ , è dato dal prodotto scalare del vettore  $\mathbf{R}_i^{\mathbb{A}}$ ,  $i$ -esima riga della matrice  $\mathbb{A}$  per il vettore  $\mathbf{C}_j^{\mathbb{B}}$ ,  $j$ -esima colonna della matrice  $\mathbb{B}$ ,

ovvero:  $c_{ij} = \mathbf{R}_i^{\mathbb{A}} \cdot \mathbf{C}_j^{\mathbb{B}} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$ .

Il prodotto righe per colonne tra matrici non gode, in generale, della proprietà commutativa; questa potrebbe valere se le due matrici fossero ambedue quadrate e dello stesso ordine, ma si possono fare esempi di come, anche in questo caso, non valga, in generale, la proprietà commutativa.

**Esempio 51** : Date le due matrici  $\mathbb{A}_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$  e  $\mathbb{B}_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ , avremo:

$$\mathbb{A}_{2,2} \cdot \mathbb{B}_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) & 0 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -26 \\ -15 & 35 \end{vmatrix} \text{ mentre}$$

$$\mathbb{B}_{2,2} \cdot \mathbb{A}_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 \\ (-3) \cdot 3 + 7 \cdot 0 & (-3) \cdot (-2) + 7 \cdot 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -22 \\ -9 & 41 \end{vmatrix}.$$

Calcolati i due prodotti si vede quindi che risulta  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ .

**Definizione 20** : Si definisce **Trasposta** della matrice  $\mathbb{A}_{m,n}$  la matrice  $\mathbb{A}_{n,m}^T$  avente per elemento di posto  $(i, j)$  l'elemento di posto  $(j, i)$  della matrice  $\mathbb{A}$ , ovvero la matrice avente, per righe e colonne, rispettivamente, le colonne e le righe di  $\mathbb{A}$ .

**Esempio 52** : se  $\mathbb{A}_{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ , allora  $\mathbb{A}_{4,3}^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ .

## FUNZIONI REALI DI VARIABILE VETTORIALE

Sia  $\mathbb{R}^n$  lo spazio vettoriale di dimensione  $n$ , avente per elementi tutte le possibili  $n$ -uple di numeri reali, o vettori, risultante dal prodotto cartesiano dell'insieme  $\mathbb{R}$  per sè stesso  $n$  volte.

Una generica funzione  $f$  avrà dominio e codominio contenuti in opportuni spazi vettoriali,  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , con  $n \geq 1$  e  $m \geq 1$ ; sia la variabile indipendente che quella dipendente potranno allora assumere o valori reali oppure vettoriali. Diremo allora:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , funzione reale di variabile reale;

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , funzione vettoriale di variabile reale;

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , funzione reale di variabile vettoriale;

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , funzione vettoriale di variabile vettoriale.

### FUNZIONI VETTORIALI DI VARIABILE REALE.

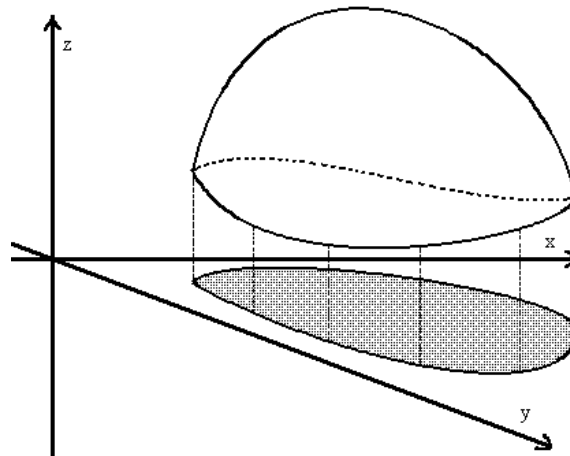
Si consideri un vettore  $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ , ciascuna delle cui componenti sia una funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  della variabile reale  $x$ .

Poniamo:  $\mathbb{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  oppure  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  per indicare una tale funzione. Ciascuna delle funzioni  $y_i(x) = f_i(x)$  è una funzione  $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $1 \leq i \leq n$ . Una funzione di questo tipo è detta anche **curva** in  $\mathbb{R}^n$ .

### FUNZIONI REALI DI VARIABILE VETTORIALE.

Dato che il dominio di una tale funzione è dato da  $\mathbb{R}^n$  o da un suo opportuno sottoinsieme, la variabile indipendente assume la natura di vettore; per questo le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vengono dette anche **funzioni di più variabili**.

Verranno rappresentate nella forma  $y = f(\mathbb{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ . Se la dimensione  $n$  è piccola ( $n = 2$  o  $n = 3$ ) si usano anche notazioni del tipo  $z = f(x, y)$ , per  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , mentre invece si usa anche scrivere  $w = f(x, y, z)$  per  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .



Per **grafico** di una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(\mathbb{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , si intende il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$  costituito dai punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  con  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Nel caso  $n = 2$ , essendo il dominio una parte di piano, il grafico di  $z = f(x, y)$  costituisce una superficie bidimensionale giacente in  $\mathbb{R}^3$ , che può essere rappresentata come nella figura precedente schiacciando, in prospettiva, il piano delle variabili indipendenti  $x$  e  $y$ .

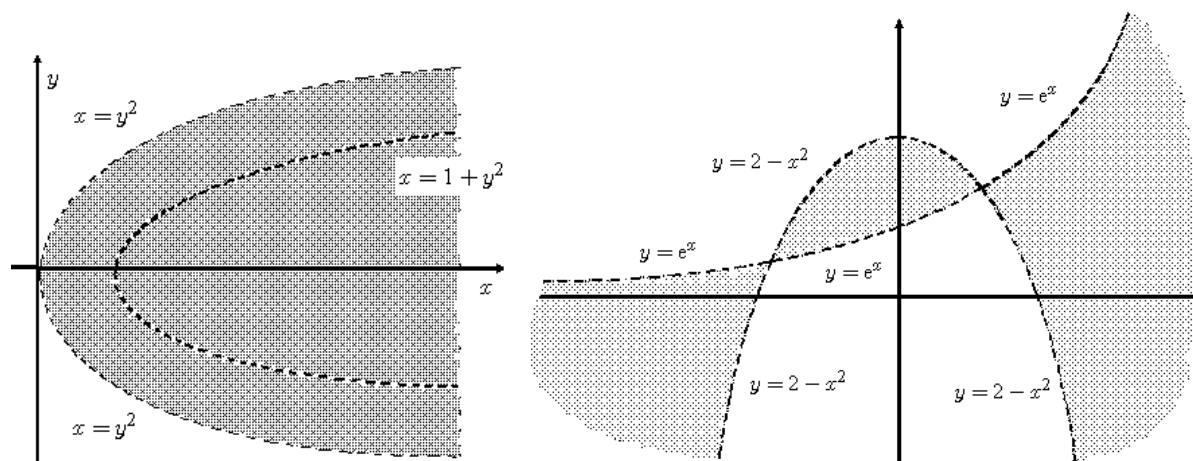
Se  $n > 2$  si dice che il grafico costituisce una ipersuperficie  $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Il **campo d'esistenza** di una funzione di due variabili è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , e può quindi essere rappresentato graficamente.

**Esempio 53 :** Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{1}{\log(x - y^2)}$ . Per determinare il campo d'esistenza

$$\text{dovrà essere } \begin{cases} x - y^2 > 0 \\ x - y^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > y^2 \\ x \neq 1 + y^2 \end{cases}.$$

Il campo d'esistenza della funzione data è rappresentato dalla regione scura, ovvero dai punti a destra della parabola  $x = y^2$ , tolti i punti della parabola  $x = 1 + y^2$ .



**Esempio 54 :** Sia  $f(x, y) = \log\left(\frac{y - e^x}{2 - x^2 - y}\right)$ . Dovrà allora risultare  $\frac{y - e^x}{2 - x^2 - y} > 0$ , e

tale disequazione risulta soddisfatta se  $\begin{cases} y - e^x > 0 \\ 2 - x^2 - y > 0 \end{cases}$  oppure se  $\begin{cases} y - e^x < 0 \\ 2 - x^2 - y < 0 \end{cases}$ , che

sono equivalenti alla  $\begin{cases} y > e^x \\ y < 2 - x^2 \end{cases}$  ed alla  $\begin{cases} y < e^x \\ y > 2 - x^2 \end{cases}$ .

Il campo d'esistenza della funzione data è rappresentato dall'unione delle regioni scure; quella centrale rappresenta la soluzione del I sistema, le due rimanenti, quella a sinistra e quella a destra, rappresentano la soluzione del II. I bordi delle zone sono tratteggiati in quanto non appartengono al campo d'esistenza, dato che le disequazioni sono strette.

### LIMITI PER FUNZIONI $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia  $\mathbb{X}_0 \in \mathbb{R}^n$  punto di accumulazione per il dominio della funzione  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Posto  $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbb{X}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , sia  $l \in \mathbb{R}$ . Si dice che:

$$\lim_{\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_0} f(\mathbb{X}) = l \text{ se } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon): 0 < \|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbb{X}) - l| < \varepsilon ;$$

$$\lim_{\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_0} f(\mathbb{X}) = +\infty \text{ se } \forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon): 0 < \|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\| < \delta \Rightarrow f(\mathbb{X}) > \varepsilon ;$$

$$\lim_{\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_0} f(\mathbb{X}) = -\infty \text{ se } \forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon): 0 < \|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\| < \delta \Rightarrow f(\mathbb{X}) < -\varepsilon .$$

Dire che  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_0$ , ovvero che  $\mathbb{X}$  assume valori sempre più vicini a  $\mathbb{X}_0$ , viene espresso al solito mediante l'appartenenza ad un intorno di centro  $\mathbb{X}_0$  e raggio  $\delta$ ; essendo  $\mathbb{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ , questo richiede, nella definizione di limite, l'utilizzo della norma Euclidea  $\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|$ , mentre non si hanno variazioni per quanto riguarda il codominio, essendo questo contenuto in  $\mathbb{R}$ .

Nei limiti di funzioni di una sola variabile l'avvicinarsi di  $x$  a  $x_0$  lungo la retta reale può avvenire al massimo in due modi: da sinistra e da destra, comportando così il calcolo del limite sinistro e del limite destro in  $x_0$ . Questo non vale per le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Limitandoci, ad esempio, alle funzioni  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ; quando diciamo che  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  intendiamo che questo avvenga mediante tutti i possibili percorsi (o curve) continui (ovvero senza interruzioni o



salti) che da  $(x, y)$  portano in  $(x_0, y_0)$ . L'eventuale risultato del limite deve essere sempre lo stesso qualunque sia il percorso utilizzato per poter affermare che il limite esiste. Se percorsi diversi portano a risultati diversi, la conclusione sarà che il limite non esiste.

**Esempio 55** : Calcoliamo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^2}$ . La funzione è definita in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Dato che a numeratore abbiamo un polinomio infinitesimo di 3° grado, mentre quello a denominatore è di 2° grado, ipotizziamo che il limite valga 0 e proviamo a verificarlo mediante la definizione.

Dovrà quindi risultare  $\left| \frac{x y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$  in un intorno di  $(0,0)$ .

Ma  $\left| \frac{x y^2}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$ , in quanto  $\frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Basta imporre  $|x| < \varepsilon$  affinché risulti  $\left| \frac{x y^2}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$ . Ma  $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$ , ovvero si determina una striscia verticale all'interno della quale è sempre possibile ricavare un intorno di  $(0,0)$ : basta prendere  $\delta \leq \varepsilon$ . E' quindi verificato che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^2} = 0$ .

**Esempio 56** : Studiamo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ . Dato che  $(x, y) \rightarrow (0,0)$ , usiamo come percorsi di avvicinamento le rette passanti per l'origine, di equazione  $y = m x$ .

Studiare il limite lungo questi percorsi significa, operata la sostituzione  $y = m x$ , calcolare:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + m^2} = \frac{1}{1 + m^2}$ . Il risultato dipende da  $m$ , variando al variare della

retta utilizzata. Quindi abbiamo che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  non esiste.

**Esempio 57** : Studiamo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}$ . Come nell'esempio precedente, posto  $y = m x$ ,

calcoliamo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + m^4 x^2} = \frac{1}{1 + m^4 \cdot 0} = 1$ . Quindi percorrendo una qualsiasi retta passante per l'origine il limite vale 1. Da questo risultato non possiamo assolutamente dedurre che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4} = 1$ .

Utilizziamo infatti percorsi diversi per avvicinarci a  $(0,0)$ , quali le parabole aventi per asse l'asse delle  $x$ , e quindi di equazione  $x = k y^2$ .

Studiando il limite su queste restrizioni avremo:  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{k^2 y^4}{k^2 y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k^2}{k^2 + 1} = \frac{k^2}{k^2 + 1}$ .

Variando parabola varia il risultato, e quindi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}$  non esiste.

## LIMITI ITERATI

Vediamo infine come, per il calcolo del  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ , non sia consentito ricorrere al cal-

colo dei due limiti:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$  e  $\lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$ . Questi due limiti, detti **limiti**

**iterati**, consistono nel calcolo di limiti di funzioni di una sola variabile, tenendo l'altra come costante.

Se anche ambedue esistessero e fossero uguali, questo non consente comunque di concludere nulla sul  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ . I due limiti iterati corrispondono a due modi particolari di far tendere  $(x,y)$  a  $(x_0,y_0)$ , consistendo in percorsi paralleli agli assi  $x$  e  $y$ .

Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  esiste e se i due limiti iterati esistono, allora tutti e tre hanno lo stesso valore, ma non è permesso attribuire al  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  l'eventuale valore comune ai due

limiti iterati  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right)$  e  $\lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right)$ .

**Esempio 58** : Applichiamo i limiti iterati a  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ . Avremo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ e } \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Se usiamo una generica retta passante per l'origine:  $y = mx$ , otteniamo invece

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \text{ e quindi il limite dato non esiste, anche se i due limiti iterati esistono ed hanno lo stesso valore.}$$

## FUNZIONI CONTINUE

Come nel caso di  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , anche per le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene data la seguente:

**Definizione 21** : Dato  $\mathbb{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ , punto di accumulazione appartenente al dominio della funzione  $f(\mathbb{X})$ , si dice che la funzione  $f(\mathbb{X})$  è **continua** in  $\mathbb{X}_0$  se  $\lim_{\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_0} f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0)$ .

Per le funzioni di più variabili continue valgono Teoremi analoghi a quelli per le funzioni continue di una sola variabile, ovvero:

- Sommando, sottraendo e moltiplicando funzioni continue si ottengono ancora funzioni continue;
- Il reciproco ed il quoziente di funzioni continue (con denominatore diverso da 0) sono ancora funzioni continue;
- Componendo funzioni continue si ottengono ancora funzioni continue.

## DERIVATE PARZIALI

Per una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ha senso cercare di determinare la tendenza istantanea al cambiamento (ovvero la derivata) in un punto  $x_0$  facendo assumere alla variabile indipendente  $x$  valori sulla sinistra e sulla destra di  $x_0$ , visto che il dominio di  $f$  è contenuto in  $\mathbb{R}$ , spazio ad una sola dimensione.

Sappiamo che la derivata è definita come il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale calcolato in  $x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ , e ci fornisce il coefficiente angolare della retta tangente nel punto  $(x_0, f(x_0))$  al grafico della funzione. Per le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , essendo il dominio contenuto in uno spazio  $n$ -dimensionale, come già notato per l'operazione di limite, preso  $\mathbb{X}_0$  punto interno al dominio, occorrerà scegliere una tra le infinite direzioni (rette) che passano per il punto  $\mathbb{X}_0$  per poi determinare la tendenza istantanea al cambiamento della funzione  $f$  nel punto  $\mathbb{X}_0$  relativamente alla direzione scelta.

Tra le infinite direzioni ne esistono alcune che rivestono un ruolo particolare; esse sono in numero di  $n$ , e sono le direzioni parallele ad uno degli assi coordinati. Esaminare la tendenza istantanea al cambiamento in una di queste direzioni particolari conduce al concetto di derivata parziale.

Muoversi in una direzione parallela ad uno degli assi significa incrementare una sola variabile (quella relativa all'asse considerato) e mantenere tutte le altre costanti. Se consideriamo una funzione di due variabili  $f(x, y)$ , avremo due possibili **derivate parziali** nel punto  $(x_0, y_0)$ :

-la derivata parziale fatta rispetto a  $x$ , definita come:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0)$$

-la derivata parziale fatta rispetto a  $y$ , definita come:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0)$$

purchè tali limiti esistano finiti.

Per una funzione di tre variabili  $f(x, y, z)$  avremo tre possibili derivate parziali, definite da:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0, z_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = f'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Per una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  avremo quindi  $n$  derivate parziali.

Se in un punto  $\mathbb{X}_0$  una funzione ammette tutte le derivate parziali, allora esiste un vettore, detto il **Gradiente** della funzione, indicato con  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \left( \frac{\partial f(\mathbb{X}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbb{X}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbb{X}_0)}{\partial x_n} \right)$ ,

che ha per componenti le derivate parziali della funzione calcolate nel punto stesso.

Il simbolo  $\nabla f$  si legge "del  $f$ ".

L'essere le derivate parziali definite mediante il limite di un rapporto incrementale nel quale una sola variabile si incrementa mentre tutte le altre rimangono costanti ha una importante conseguenza per il calcolo pratico delle derivate parziali: basta applicare le usuali regole di derivazione stabilite per le funzioni di una sola variabile, quella rispetto a cui si deriva, trattando tutte le altre variabili come costanti; potremo così calcolare sia le derivate parziali in un punto che le **funzioni derivate parziali**.

**Esempio 59** : Sia data  $f(x, y) = x^y$ . Avremo allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1} \quad (\text{derivata di una potenza, in quanto } x \text{ è variabile e } y \text{ è costante})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x \quad (\text{derivata di una esponenziale, in quanto } y \text{ è variabile e } x \text{ è costante}).$$

**Esempio 60** : Sia data  $f(x, y) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ . Avremo allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

**Esempio 61** : Sia data  $f(x, y, z) = z - \operatorname{sen} \left( \frac{x-z}{x^2} \right)$ . Avremo allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 - \cos \left( \frac{x-z}{x^2} \right) \cdot \frac{x^2 - 2x(x-z)}{x^4} = -\cos \left( \frac{x-z}{x^2} \right) \cdot \frac{2z-x}{x^3};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{in quanto la funzione data è costante rispetto a } y ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 - \cos\left(\frac{x-z}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (-1) .$$

### DERIVABILITA' E CONTINUITA'

Per le funzioni di una sola variabile sappiamo che la continuità è condizione necessaria per la derivabilità, e quindi anche che la derivabilità è condizione sufficiente per la continuità.

Data  $f(x, y) = \begin{cases} 1 : & xy = 0 \\ 0 : & xy \neq 0 \end{cases}$ , calcoliamone le derivate parziali nel punto  $(0, 0)$ ; sarà:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 ,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 .$$

Quindi in  $(0, 0)$  la funzione è derivabile (parzialmente) pur essendo palesemente discontinua, dato che in ogni intorno di  $(0, 0)$  ci sono punti in cui  $f(x, y) = 1$  e punti in cui  $f(x, y) = 0$ .

Questo esempio ci mostra quindi come la continuità non sia più condizione necessaria per la derivabilità (parziale). Il legame trovato per le funzioni di una sola variabile verrà ristabilito con la classe delle funzioni differenziabili.

### FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Richiamiamo brevemente il concetto di funzione differenziabile per funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ed estendiamo poi a funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Data  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e dato  $x_0 \in D_f$ , la funzione  $f(x)$  si dice differenziabile in  $x_0$  se esiste una costante  $k \in \mathbb{R}$  per la quale vale la relazione:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + o(x - x_0) .$$

Essere differenziabile significa essere approssimabile in modo lineare, ovvero mediante una retta. Valgono poi alcuni importanti Teoremi:

- se una funzione è differenziabile in  $x_0$  allora è continua in  $x_0$ ;
- se una funzione è differenziabile in  $x_0$  allora è derivabile in  $x_0$ , e si ha che  $k = f'(x_0)$ ;
- una funzione è differenziabile in  $x_0$  se e solo se è derivabile in  $x_0$ .

Si può quindi riformulare la differenziabilità in  $x_0$  mediante l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

vedendo quindi come la differenziabilità significhi l'essere approssimabile mediante la retta tangente al grafico di  $f(x)$  nel punto  $x_0$ , con un errore,  $o(x - x_0)$ , trascurabile rispetto all'incremento  $x - x_0$ .

Passiamo ora alla differenziabilità per funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Diamo la seguente:

**Definizione 22** : Data  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(\mathbb{X})$  e dato  $\mathbb{X}_0$  punto interno al dominio di  $f$ , la funzione si dice **differenziabile** in  $\mathbb{X}_0$  se esiste un vettore a termini costanti  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^n$  per il quale vale la relazione:

$$f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \mathbb{A} \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|) ,$$

dove il prodotto  $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)$  è il prodotto scalare di due vettori di  $\mathbb{R}^n$ . L'errore che si commette con tale approssimazione deve risultare trascurabile rispetto a  $\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|$ , modulo dell'incremento  $\mathbb{X} - \mathbb{X}_0$ . Visto il significato di "o piccolo", la definizione di funzione differenziabile può essere espressa anche nella forma del

$$\lim_{\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_0} \frac{f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0) - \mathbb{A} \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)}{\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|} = 0 .$$

Si può dimostrare poi che valgono i seguenti Teoremi:

**Teorema 27** : Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{X}_0$  allora  $f$  è continua in  $\mathbb{X}_0$ ;

**Teorema 28** : Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{X}_0$  allora  $f$  ammette in  $\mathbb{X}_0$  tutte le derivate parziali, ovvero esiste  $\nabla f(\mathbb{X}_0)$ , e risulta  $\mathbb{A} = \nabla f(\mathbb{X}_0)$ .

Quindi la differenziabilità equivale alla validità della relazione:

$$f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|).$$

L'equazione  $y = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)$  è l'equazione del **piano** (se  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) o dell'**iperpiano** (se  $n > 2$ ) **tangente** alla superficie nel punto  $(\mathbb{X}_0, f(\mathbb{X}_0))$ .

La funzione  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & : xy = 0 \\ 0 & : xy \neq 0 \end{cases}$  ci ha fornito un esempio di funzione che in un punto,

$(0, 0)$ , ammette il gradiente senza essere continua, e quindi, per il Teorema 27, senza essere differenziabile. Quindi avere in un punto tutte le derivate parziali, ovvero il gradiente, non implica l'essere funzione differenziabile. Vale però il

**Teorema 29** (del differenziale totale) : Se esiste  $\nabla f(\mathbb{X}_0)$ , cioè se la funzione ha in  $\mathbb{X}_0$  tutte le derivate parziali, e se queste sono funzioni continue in  $\mathbb{X}_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{X}_0$ .

L'avere comunque derivate parziali continue in  $\mathbb{X}_0$  è condizione sufficiente, ma non necessaria, per essere differenziabile.

### DERIVATE PARZIALI SUCCESSIVE

Data una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(\mathbb{X})$  derivabile, essa ammette  $n$  funzioni derivate parziali, ciascuna delle quali è una funzione  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , che, se risulta derivabile, può essere derivata rispetto a ciascuna delle sue  $n$  variabili. Si ottengono così  $n^2 = n \cdot n$  derivate parziali seconde che, nell'ipotesi di derivabilità, saranno a loro volta derivabili rispetto alle  $n$  variabili, dando luogo a  $n^3 = n \cdot n^2$  derivate parziali terze e così via. Possiamo quindi comporre il seguente schema relativo ad una funzione di due sole variabili:

$$f(x, y) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f''_{xx} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} = f'''_{xxx} \\ \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy} \end{array} \right. \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx} \\ \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x^2} = f'''_{yxx} \\ \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x \partial y} = f'''_{yxy} \end{array} \right. \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f''_{yy} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^2 \partial x} = f'''_{yyx} \\ \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial y \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} = f'''_{yyy} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Si noti la diversa posizione dello pseudo-esponente 2: in  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$  esso significa derivare 2 volte ( $\partial^2 f$ ) la funzione  $f$  rispetto alla  $x$  ambedue le volte ( $\partial x^2$ ), spiegando così il diverso posizionamento.

Le derivate fatte sempre rispetto alla stessa variabile,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ , vengono dette **pure**, mentre

$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ , quelle in cui cambia la variabile di derivazione, vengono dette **miste**.

Per le derivate seconde miste vale il seguente, importante

**Teorema 30** (di Schwarz) : Se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(\mathbb{X})$  ha in un intorno del punto  $\mathbb{X}_0$  le derivate seconde miste  $\frac{\partial^2 f(\mathbb{X})}{\partial x_i \partial x_j}$  e  $\frac{\partial^2 f(\mathbb{X})}{\partial x_j \partial x_i}$ , e se queste sono continue in  $\mathbb{X}_0$ , allora sono uguali:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbb{X})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbb{X})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Esiste anche una forma più generale di questo Teorema, le cui ipotesi richiedono esistenza e continuità di una sola delle due derivate seconde miste, da cui si dimostra che seguono esistenza e continuità dell'altra derivata seconda mista, e quindi poi la loro uguaglianza.

**Esempio 62** : Sia  $f(x, y) = x e^y - y e^x$ . Avremo allora:

$$f(x, y) = x e^y - y e^x \Rightarrow \begin{cases} f'_x = e^y - y e^x \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx} = -y e^x \\ f''_{xy} = e^y - e^x \end{cases} \\ f'_y = x e^y - e^x \Rightarrow \begin{cases} f''_{yx} = e^y - e^x \\ f''_{yy} = x e^y \end{cases} \end{cases}, \text{ e quindi } f''_{xy} = f''_{yx}.$$

Il Teorema di Schwarz esprime comunque una condizione sufficiente, e non necessaria, per l'uguaglianza delle derivate seconde miste.

Inoltre il Teorema di Schwarz non vale solo per le derivate parziali seconde, ma vale per le derivate miste di qualsiasi ordine, dato che una derivata di ordine  $n$  è pur sempre una derivata seconda di una derivata di ordine  $n - 2$ :  $\partial^n f = \partial^2(\partial^{n-2} f)$ . Adeguando le ipotesi del Teorema di Schwarz alla continuità delle derivate miste di ordine opportuno, scriveremo allora, nel caso di una funzione di due variabili,  $\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}$ , con  $p + q = m$ , per indicare la derivata parziale mista di ordine  $m$ , ottenuta derivando  $p$  volte rispetto a  $x$  e  $q$  volte rispetto a  $y$ , con  $p + q = m$ , senza bisogno di specificare l'ordine con cui si è derivato rispetto a  $x$  e ad  $y$ , essendo questo ininfluenza alla luce del Teorema di Schwarz.

**Esempio 63** : Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z = f(x, y)$  una funzione derivabile tre volte con derivate terze continue. Applicando il Teorema di Schwarz risulta allora:

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y \partial x^2}.$$

## DIFFERENZIALI TOTALI DEL PRIMO E DEGLI ORDINI SUCCESSIVI

Nella  $f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|)$ , il termine  $\nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)$  prende il nome di **differenziale totale del primo ordine**, e viene indicato anche con  $df(\mathbb{X}_0)$ .

Posto  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \left( \frac{\partial f(\mathbb{X}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbb{X}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbb{X}_0)}{\partial x_n} \right) = (f'_1(\mathbb{X}_0), f'_2(\mathbb{X}_0), \dots, f'_n(\mathbb{X}_0))$  e posto  $(\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_n - x_n^0) = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = d\mathbb{X}$ , possiamo scrivere:  $df(\mathbb{X}_0) = (f'_1(\mathbb{X}_0), f'_2(\mathbb{X}_0), \dots, f'_n(\mathbb{X}_0)) \cdot (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^n f'_i(\mathbb{X}_0) \cdot dx_i$ .

Se non interessa specificare il punto  $\mathbb{X}_0$ , potremo scrivere anche:

$$df = (f'_1, f'_2, \dots, f'_n) \cdot (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^n f'_i dx_i = f'_1 dx_1 + f'_2 dx_2 + \dots + f'_n dx_n.$$

Quest'ultima espressione fornisce la definizione di differenziale totale del I ordine per una funzione di  $n$  variabili.

Nel caso di  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , otteniamo  $df = f'_1 \cdot dx_1 + f'_2 \cdot dx_2$ , se le variabili sono indicate con  $x_1$  e  $x_2$ , oppure  $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$ , se invece le indichiamo con  $x$  e  $y$ .

Per una funzione di tre variabili,  $f(x, y, z)$ , avremo  $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz$ .

Passiamo ora a definire il **differenziale totale del II ordine** per  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Avremo:

$d^2 f = d(df) = \frac{\partial(df)}{\partial x} dx + \frac{\partial(df)}{\partial y} dy$ . Tenendo presente che  $f'_x$  e  $f'_y$  sono funzioni di  $x$  e di  $y$ , mentre  $dx$  e  $dy$  sono invece costanti rispetto a  $x$  ed a  $y$ , otteniamo:

$$d^2 f = \frac{\partial(f'_x dx + f'_y dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(f'_x dx + f'_y dy)}{\partial y} dy =$$

$$= (f''_{xx} dx + f''_{yx} dy) dx + (f''_{xy} dx + f''_{yy} dy) dy = f''_{xx} (dx)^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} (dy)^2,$$

avendo supposto che siano soddisfatte le ipotesi del Teorema di Schwarz, per cui  $f''_{xy} = f''_{yx}$ .

Nel caso di  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  avremmo invece ottenuto per  $d^2 f$  l'espressione:

$$f''_{xx} (dx)^2 + f''_{yy} (dy)^2 + f''_{zz} (dz)^2 + 2 f''_{xy} dx dy + 2 f''_{xz} dx dz + 2 f''_{yz} dy dz.$$

Si notino le analogie (non certo l'identità) tra il differenziale secondo di una funzione di due variabili ed il quadrato di un binomio, tra il differenziale secondo di una funzione di tre variabili ed il quadrato di un trinomio, e così via per il differenziale secondo di una funzione di  $n$  variabili, analogo con il quadrato di un  $n$ -omio. Queste analogie si ritrovano anche nei differenziali totali di ordine superiore al secondo, dovendo però parlare di potenza terza, quarta ecc. di un binomio, trinomio, ecc..

Il differenziale totale secondo di una funzione di un numero qualsiasi di variabili può essere espresso anche in forma vettoriale-matriciale, mediante la cosiddetta **matrice Hessiana**  $\mathbb{H}$ .

La matrice Hessiana è la matrice costituita dalle derivate parziali seconde, ordinate per riga rispetto alla prima variabile di derivazione e per colonna rispetto alla seconda, e nel caso di una

funzione di  $n$  variabili assume la forma:  $\mathbb{H} = \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \dots & \dots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \dots & \dots & f''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \dots & \dots & f''_{nn} \end{vmatrix}$ .

Se valgono le ipotesi del Teorema di Schwarz la matrice Hessiana è una matrice simmetrica.

Eseguendo il prodotto vettore per matrice per vettore, si verifica la validità della seguente uguaglianza:

$$d^2 f = \|dx_1, dx_2, \dots, dx_n\| \cdot \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \dots & \dots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \dots & \dots & f''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \dots & \dots & f''_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_n \end{vmatrix},$$

che per una funzione di due variabili diviene:

$$d^2 f = \|dx, dy\| \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{xx} dx + f''_{yx} dy \\ f''_{xy} dx + f''_{yy} dy \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix} =$$

$$= f''_{xx} (dx)^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} (dy)^2.$$

Non esiste la possibilità per i differenziali di ordine superiore al secondo di poter essere espressi in forma vettoriale-matriciale.

## POLINOMIO DI TAYLOR E DI MAC LAURIN

Anche per le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è possibile fornire una approssimazione migliore di quella data con la formula della differenziabilità, ovvero costruire un polinomio (in  $n$  variabili) di grado  $m$  opportunamente scelto, per il quale valga l'uguaglianza:

$$f(\mathbb{X}) - \mathbb{P}_m(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) = o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|^m).$$

Per una funzione  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  il Polinomio di Taylor nel punto  $x_0$  ha la seguente espressione:

$$\mathbb{P}_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

E' garantita l'esistenza del Polinomio di grado  $m$  se la funzione è derivabile  $m$  volte in un intorno di  $x_0$ .

Per una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è sufficiente chiedere che la funzione abbia derivate parziali continue fino all'ordine  $m$  in un intorno di  $\mathbb{X}_0$ , ed avremo per il Polinomio la seguente espressione:

$$P_m(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) = f(\mathbb{X}_0) + \mathbf{d}f(\mathbb{X}_0) + \frac{\mathbf{d}^2 f(\mathbb{X}_0)}{2!} + \frac{\mathbf{d}^3 f(\mathbb{X}_0)}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{d}^m f(\mathbb{X}_0)}{m!} .$$

Come si vede, il Polinomio è costituito mediante i differenziali totali, da quello del primo fino a quello di ordine  $m$ . Se  $\mathbb{X}_0 = \mathbb{O}$ , vettore nullo, il Polinomio è detto di MacLaurin. Il Polinomio di secondo grado può essere espresso, come detto, in forma vettoriale-matriciale, ed avremo la seguente espressione:

$$P_2(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)^T ,$$

nella quale  $(\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)^T$  rappresenta il trasposto del vettore  $(\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)$ , ovvero un vettore colonna, e quindi per la funzione  $f(\mathbb{X})$  risulta valida la seguente approssimazione:

$$f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)^T + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|^2)$$

che può essere anche scritta, posto  $(\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) = \mathbf{d}\mathbb{X}$ , come:

$$f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot \mathbf{d}\mathbb{X} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{d}\mathbb{X} \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot \mathbf{d}\mathbb{X}^T + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|^2) .$$

**Esempio 64 :** Sia  $f(x, y, z) = x^2 \text{sen}(y - z)$ ; determiniamo l'espressione del Polinomio di Taylor di secondo grado nel punto  $(1, 1, 1)$ .

Risulta anzitutto  $f(\mathbb{X}_0) = f(1, 1, 1) = 0$ . Sarà poi:

$$f'_x = 2x \text{sen}(y - z) \Rightarrow f'_x(1, 1, 1) = 0 ;$$

$$f'_y = x^2 \cos(y - z) \Rightarrow f'_y(1, 1, 1) = 1 ;$$

$$f'_z = -x^2 \cos(y - z) \Rightarrow f'_z(1, 1, 1) = -1 ;$$

$$f''_{xx} = 2 \text{sen}(y - z) \Rightarrow f''_{xx}(1, 1, 1) = 0 ;$$

$$f''_{yy} = -x^2 \text{sen}(y - z) \Rightarrow f''_{yy}(1, 1, 1) = 0 ;$$

$$f''_{zz} = -x^2 \text{sen}(y - z) \Rightarrow f''_{zz}(1, 1, 1) = 0 ;$$

$$f''_{xy} = 2x \cos(y - z) \Rightarrow f''_{xy}(1, 1, 1) = 2 ;$$

$$f''_{xz} = -2x \cos(y - z) \Rightarrow f''_{xz}(1, 1, 1) = -2 ;$$

$$f''_{yz} = x^2 \text{sen}(y - z) \Rightarrow f''_{yz}(1, 1, 1) = 0 .$$

Avremo quindi:  $P_2(\mathbb{X}, (1, 1, 1)) =$

$$\begin{aligned} &= 0 + 0(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 1) + \frac{1}{2} (0(x - 1)^2 + 0(y - 1)^2 + 0(z - 1)^2) + \\ &+ \frac{1}{2} (2 \cdot 2(x - 1)(y - 1) + 2 \cdot (-2)(x - 1)(z - 1) + 2 \cdot 0 \cdot (y - 1)(z - 1)) = \\ &= z - y + 2xy - 2xz . \end{aligned}$$

## MASSIMI E MINIMI RELATIVI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

La definizione di punto di massimo o di minimo relativo per funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ricalca quella data per le funzioni di una sola variabile.

Un punto  $\mathbb{X}_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice di **massimo** (di **minimo**) **relativo** se esiste un intorno  $\mathfrak{J}(\mathbb{X}_0, \delta)$  nel quale risulta  $f(\mathbb{X}) \leq f(\mathbb{X}_0)$  ( $f(\mathbb{X}) \geq f(\mathbb{X}_0)$ )  $\forall \mathbb{X} \in \mathfrak{J}(\mathbb{X}_0, \delta)$ .

Per le funzioni di una sola variabile vale il Teorema, cosiddetto di Fermat, secondo il quale se una funzione è derivabile in  $x_0$  ed ha in  $x_0$  un punto di massimo o di minimo relativo, allora ne discende che  $f'(x_0) = 0$ . Per le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vale anzitutto il seguente:

**Teorema 31 :** Sia  $f(\mathbb{X})$  differenziabile in  $\mathbb{X}_0$ , punto interno al dominio, e sia  $\mathbb{X}_0$  punto di massimo o di minimo relativo per  $f$ ; allora  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$ , dove  $\mathbb{O}$  indica il vettore nullo.



La condizione  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$  è una condizione necessaria, ma non sufficiente, per avere un punto di massimo o di minimo relativo, ed è condizione necessaria solo nell'ipotesi che la funzione sia differenziabile. Viene detta anche **condizione del I ordine** per i punti di massimo e di minimo.

I punti nei quali  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$  si dicono **punti stazionari**, e sono i punti nei quali il piano (o l'iperpiano) tangente al grafico della funzione risulta orizzontale (o parallelo all'iperpiano delle variabili indipendenti).

Per la ricerca dei punti di massimo e minimo relativo occorre quindi anzitutto soddisfare le condizioni del I ordine, ovvero imporre  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$ , e risolvere il sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite che da questa scaturisce.

Trovate tutte le soluzioni, ovvero tutti i punti  $\mathbb{X}_0$  per i quali  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$ , occorre verificare se detti punti risultano effettivamente di massimo o di minimo relativo, oppure se sono punti di sella. I **punti di sella** sono punti nei quali  $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$ , ma non è però soddisfatta nè la definizione di punto di massimo nè quella di punto di minimo, in quanto in ogni intorno di  $\mathbb{X}_0$  ci sono punti per i quali  $f(\mathbb{X}) > f(\mathbb{X}_0)$  e punti per i quali  $f(\mathbb{X}) < f(\mathbb{X}_0)$ .

In un punto di sella il piano tangente è orizzontale e taglia il grafico della funzione. Se percorriamo la curva che unisce  $M_1$  con  $M_2$  il punto di sella  $\mathbb{X}_0$  appare come un punto di minimo, mentre se andiamo da A a B appare come un punto di massimo.

Dato che per le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  non si può utilizzare la crescita o la decrescita della funzione, e quindi non serve studiare il segno delle derivate parziali, per distinguere tra i punti di massimo o minimo e gli eventuali punti di sella possiamo utilizzare le **condizioni del II ordine**, che sono invece condizioni sufficienti, e sono legate alla concavità o alla convessità di  $f$  in  $\mathbb{X}_0$ .

Supponendo che la funzione ammetta in  $\mathbb{X}_0$  il Polinomio di Taylor di II grado, avremo:

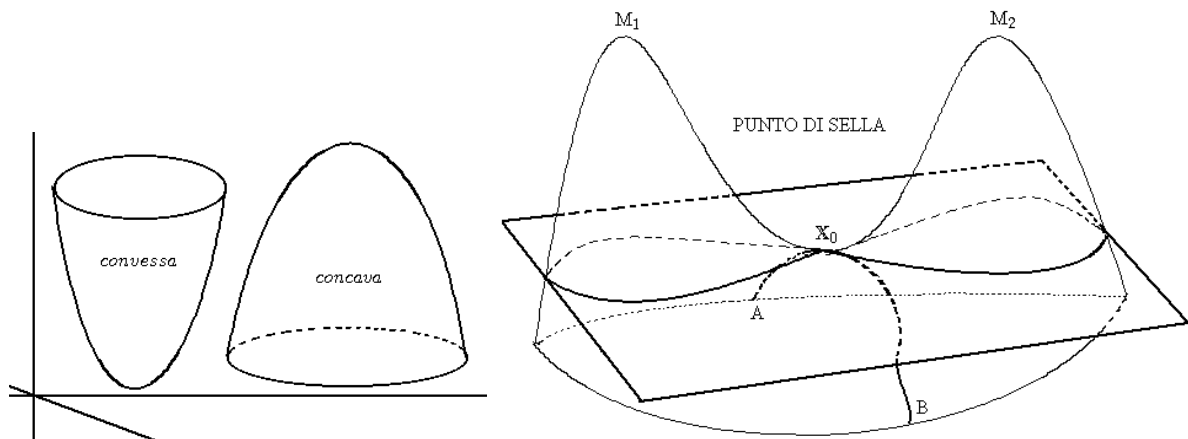
$$f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot d\mathbb{X} + \frac{1}{2} \cdot d\mathbb{X} \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot d\mathbb{X}^T + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|^2),$$

e nell'ipotesi che il punto  $\mathbb{X}_0$  sia un punto stazionario ( $\nabla f(\mathbb{X}_0) = \mathbb{O}$ ) otteniamo:

$$f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0) = \frac{1}{2} \cdot d\mathbb{X} \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot d\mathbb{X}^T + o(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|^2).$$

Quindi il segno di  $f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0)$  coincide con quello di  $d\mathbb{X} \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot d\mathbb{X}^T = d^2 f(\mathbb{X}_0)$ .

Se  $d^2 f(\mathbb{X}_0) < 0$ , allora  $f$  è concava in  $\mathbb{X}_0$ , mentre se  $d^2 f(\mathbb{X}_0) > 0$   $f$  è convessa in  $\mathbb{X}_0$ .



Per vedere se in un intorno di  $\mathbb{X}_0$  risulta soddisfatta la definizione di punto di massimo o di punto di minimo studiamo il segno della differenza  $f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0)$ , in quanto:

.)  $f(\mathbb{X}) < f(\mathbb{X}_0) \Leftrightarrow f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0) < 0 \Leftrightarrow d^2 f(\mathbb{X}_0) < 0$  e quindi  $\mathbb{X}_0$  è punto di massimo;

.)  $f(\mathbb{X}) > f(\mathbb{X}_0) \Leftrightarrow f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0) > 0 \Leftrightarrow d^2 f(\mathbb{X}_0) > 0$  e quindi  $\mathbb{X}_0$  è punto di minimo.

Se il segno della differenza  $f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}_0)$  non è costante, allora in  $\mathbb{X}_0$  non potrà che esserci un punto di sella.

Tratteremo questo problema solamente nel caso di  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Risulta allora:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} (\mathbf{dx}, \mathbf{dy}) \cdot \mathbb{H}(x_0, y_0) \cdot (\mathbf{dx}, \mathbf{dy})^T + o(\|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (x_0, y_0)\|^2),$$

e noi dobbiamo studiare il segno di:

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) (\mathbf{dx})^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) \mathbf{dx} \mathbf{dy} + f''_{yy}(x_0, y_0) (\mathbf{dy})^2.$$

Scrivendo per brevità  $d^2 f = f''_{xx} (\mathbf{dx})^2 + 2 f''_{xy} \mathbf{dx} \mathbf{dy} + f''_{yy} (\mathbf{dy})^2$ , avremo:

$$d^2 f = f''_{xx} (\mathbf{dx})^2 + 2 f''_{xy} \mathbf{dx} \mathbf{dy} + \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}} (\mathbf{dy})^2 - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}} (\mathbf{dy})^2 + f''_{yy} (\mathbf{dy})^2 =$$

$$d^2 f = f''_{xx} \left( (\mathbf{dx})^2 + 2 \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} \mathbf{dx} \mathbf{dy} + \frac{(f''_{xy})^2}{(f''_{xx})^2} (\mathbf{dy})^2 \right) - \frac{(f''_{xy})^2}{f''_{xx}} (\mathbf{dy})^2 + f''_{yy} (\mathbf{dy})^2 =$$

$$d^2 f = f''_{xx} \left( \mathbf{dx} + \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} \mathbf{dy} \right)^2 + \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{f''_{xx}} (\mathbf{dy})^2.$$

In maniera analoga si può ottenere anche una seconda uguaglianza:

$$d^2 f = f''_{yy} \left( \mathbf{dy} + \frac{f''_{xy}}{f''_{yy}} \mathbf{dx} \right)^2 + \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{f''_{yy}} (\mathbf{dx})^2.$$

Abbiamo riscritto il  $d^2 f$  come somma di due termini, ciascuno dei quali è dato dal prodotto di un quadrato (quindi sempre positivo) per un altro termine, di segno invece variabile:

$$f''_{xx} \text{ e } \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{f''_{xx}} \quad \text{oppure} \quad f''_{yy} \text{ e } \frac{f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{f''_{yy}}.$$

Se consideriamo la matrice Hessiana  $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ , vediamo che  $f''_{xx}$  e  $f''_{yy}$  sono i cosiddetti

**minori di guida** del I ordine della matrice, mentre  $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$  è il cosiddetto **determinante** della matrice Hessiana, ovvero il minore di guida del II ordine.

Dire che  $d^2 f < 0$  oppure  $d^2 f > 0$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  significa che le due precedenti espressioni sono negative o positive  $\forall \mathbf{dx}$  e  $\forall \mathbf{dy}$ , ovvero che il loro segno è indipendente dalla scelta del  $\mathbf{dx}$  e del  $\mathbf{dy}$ . Possiamo ottenere tale indipendenza in due soli casi:

$$\begin{cases} f''_{xx} < 0 \\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f''_{yy} < 0 \\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow d^2 f < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di massimo}$$

$$\begin{cases} f''_{xx} > 0 \\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f''_{yy} > 0 \\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow d^2 f > 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ punto di minimo.}$$

Se risulta  $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$ , avremo che  $d^2 f$  è la somma di due termini di segno opposto, e quindi il suo segno varia al variare del  $\mathbf{dx}$  e del  $\mathbf{dy}$ ; quindi  $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$  è condizione sufficiente a garantire che il punto  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella.

Nulla si può concludere nel caso che sia  $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$ , così come occorrono ulteriori particolari indagini se risultasse  $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = 0$ .

Tali casi particolari non vengono qui trattati.

**Esempio 65** : Data la funzione  $f(x, y) = 3x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2 - 3x + 3y$ , studiamone gli eventuali massimi e minimi.

Imponendo la condizione del I ordine,  $\nabla f(\mathbb{X}) = \mathbb{O}$ , otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} f'_x = 9x^2 - 6xy + 3y^2 - 6x - 3 = 0 \\ f'_y = -3y^2 - 3x^2 + 6xy + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{. Sommando le due equazioni otteniamo il sistema:}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 3y^2 - 3x^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{, ovvero:} \quad \begin{cases} 6x(x-1) = 0 \\ 6xy - 3y^2 - 3x^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui si ha:}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ oppure:} \\ \begin{cases} x = 1 \\ 6y - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3y(2 - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Ci sono quindi 4 punti stazionari:  $P_1 = (0, 1)$ ,  $P_2 = (0, -1)$ ,  $P_3 = (1, 0)$ ,  $P_4 = (1, 2)$ .

Passiamo quindi alle condizioni del II ordine. Avremo anzitutto:

$$\mathbb{H} = \begin{vmatrix} 18x - 6y - 6 & -6x + 6y \\ -6x + 6y & -6y + 6x \end{vmatrix}. \text{ Studiamo l'Hessiano nei 4 punti ed avremo:}$$

$$\mathbb{H}(P_1) = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx} = -12 < 0 \text{ oppure } f''_{yy} = -6 < 0 \\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 72 - 36 = 36 > 0 \end{cases},$$

e quindi  $(0, 1)$  è un punto di massimo;

$$\mathbb{H}(P_2) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0 - 36 = -36 < 0,$$

e quindi  $(0, -1)$  è un punto di sella;

$$\mathbb{H}(P_3) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx} = 12 > 0 \text{ oppure } f''_{yy} = 6 > 0 \\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 72 - 36 = 36 > 0 \end{cases},$$

e quindi  $(1, 0)$  è un punto di minimo;

$$\mathbb{H}(P_4) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0 - 36 = -36 < 0,$$

e quindi  $(1, 2)$  è un punto di sella.

## CALCOLO INTEGRALE

### INTRODUZIONE AL CONCETTO D'INTEGRALE

La teoria dell'integrazione verrà sviluppata secondo due filoni inizialmente separati, quello relativo all'integrale definito e quello dell'integrale indefinito; l'integrale definito è collegabile al problema della ricerca dell'area di una figura piana, mentre quello indefinito può essere collegato all'inversione dell'operazione di derivazione.

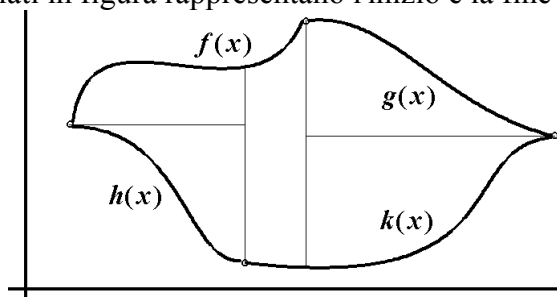
I due filoni, generati da problemi di natura diversa, troveranno un punto di raccordo nel cosiddetto Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Verrà infine trattata una importante estensione dell'integrale definito, costituita dagli integrali impropri o generalizzati.

## INTEGRALE DEFINITO

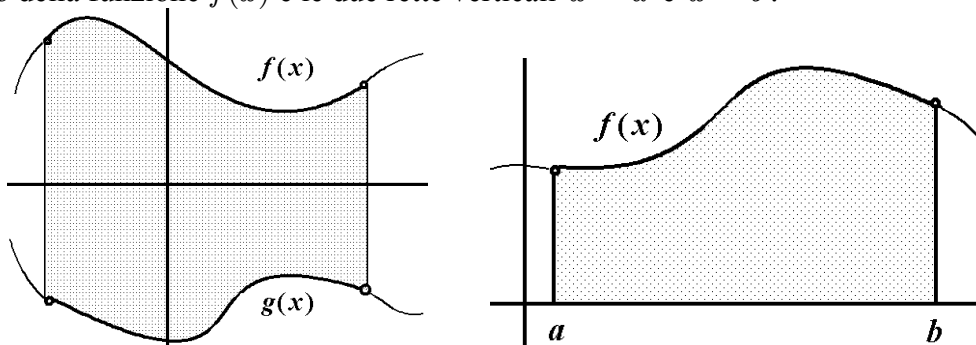
### INTEGRALE DEFINITO COME RICERCA DELL'AREA

Un problema molto antico è quello del calcolo dell'area di una figura piana. Possiamo vedere una generica figura piana chiusa come la parte di piano compresa tra i grafici di opportune funzioni. I punti evidenziati in figura rappresentano l'inizio e la fine dei corrispondenti grafici.



Semplificando, possiamo limitarci all'area della parte di piano compresa tra i grafici di due sole funzioni, una superiore ed una inferiore, e semplificando ancora, possiamo prendere una funzione qualunque, per il momento positiva, come funzione superiore e per funzione inferiore la funzione costante  $y = 0$ , ovvero l'asse delle  $x$ .

Ovvero, scelto un intervallo  $[a, b]$  nel quale sia definita una funzione  $f(x)$ , possiamo ricondurre il problema alla determinazione dell'area della parte di piano compresa tra l'asse delle  $x$ , il grafico della funzione  $f(x)$  e le due rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ .



### DEFINIZIONE DI FUNZIONE INTEGRABILE

Occorre ora precisare mediante un'opportuna definizione che cosa matematicamente si intenda quando affermiamo che una data funzione è integrabile. Possiamo dire, per ora, che funzione integrabile sarà una funzione al di sotto della quale è calcolabile l'area, nel senso che prima illustravamo.

Se una figura piana può essere scomposta mediante più figure, che non abbiano parti in comune, e che, unite, ci danno la figura di partenza, noi diciamo di aver fatto una **partizione** della figura.

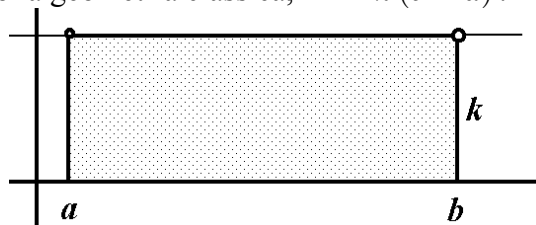
L'area della figura piana è allora uguale alla somma delle aree delle figure che compongono la partizione, ovvero  $A = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , dove  $A$  rappresenta l'area della figura

piana e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono le aree delle figure della partizione.

Iniziamo allora a costruire classi di funzioni integrabili, dando la definizione anzitutto per funzioni costanti e, da questa, per funzioni costanti a tratti.

### INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI COSTANTI

Data una funzione costante  $f(x) = k$ ,  $k > 0$ , scegliamo un intervallo  $[a, b]$ , con  $b > a$ , e definiamo l'integrale come l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle  $x$ , il grafico della funzione  $f(x)$  e le due rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ . Si tratta semplicemente, come illustrato in figura, di calcolare l'area di un rettangolo, avente altezza pari a  $k$  e base uguale a  $b - a$ , e quindi poniamo, seguendo la geometria classica,  $A = k(b - a)$ .



Introduciamo subito quello che sarà il simbolo generale, ponendo, per definizione:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b k dx = k(b - a),$$

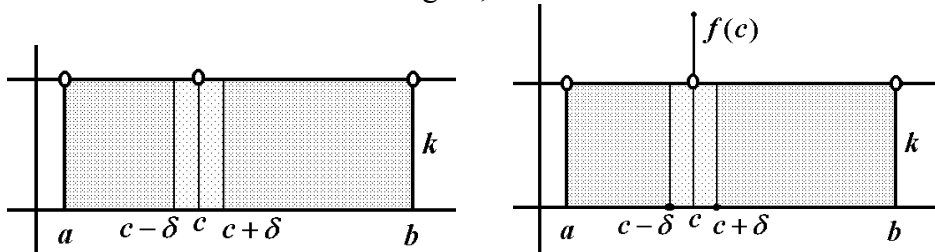
che si legge "integrale definito tra  $a$  e  $b$  della funzione  $f(x) = k$  in  $dx$ ".

Se la costante  $k$  è negativa, la definizione di integrale rimane la stessa, e quindi il valore diventa ora negativo. Le funzioni costanti risultano quindi integrabili, ed il valore del loro integrale è espresso dalla formula precedente. Tutto è coerente con il concetto classico di area se la costante  $k$  è positiva, mentre per  $k < 0$  otteniamo, come visto, un valore negativo.

Area intesa in senso tradizionale ed integrale definito prendono due strade diverse; possiamo in un caso come questo dire che l'integrale definito esprime un'area, però con segno, che per una funzione costante sarà quello della costante stessa.

Supponiamo ora che la funzione  $f(x) = k$  presenti una discontinuità di III<sup>a</sup> specie in un punto  $c$  interno all'intervallo  $[a, b]$ .

La situazione è una delle due mostrate in figura, a seconda che esista o meno il valore  $f(c)$ .



In ogni caso per il calcolo dell'area ci troviamo ancora di fronte ad un rettangolo, privato di un segmento che lo attraversa.

Essendo nulla l'area del segmento, viene naturale porre ancora  $A = \int_a^b f(x) dx = k(b - a)$ ,

dove  $f(x)$  indica la funzione costante con un punto di discontinuità di III<sup>a</sup> specie.

Possiamo più correttamente giustificare questo risultato "isolando" il punto di discontinuità  $c$  mediante un intorno di ampiezza  $\delta$ , come illustrato nella figura precedente; la parte di area mancante è strettamente contenuta dentro il rettangolo avente altezza pari a  $k$  e per base l'intervallo  $[c - \delta, c + \delta]$ , la cui area vale  $2k\delta$ .

L'area da togliere sarà quindi minore di  $2k\delta$ , qualunque sia  $\delta > 0$ , il che significa, come già detto, che essa è nulla.

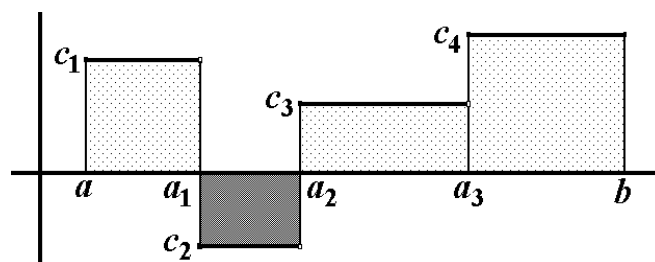
Ripetendo più volte il ragionamento, un numero, per quanto grande ma finito, di discontinuità di III<sup>a</sup> specie priva il rettangolo di un altrettanto numero finito di segmenti, la cui area è nulla,

e quindi vale ancora la  $A = \int_a^b f(x) dx = k(b - a)$ .

### INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI COSTANTI A TRATTI

Consideriamo ora una funzione costante a tratti (detta anche funzione a scala o funzione sem-

plice), sia questa per esempio  $f(x) = \begin{cases} c_1: & a_0 \leq x < a_1 \\ c_2: & a_1 \leq x < a_2 \\ c_3: & a_2 \leq x < a_3 \\ c_4: & a_3 \leq x \leq a_4 \end{cases}$ , con  $a = a_0$  e  $b = a_4$ .



Questa volta l'area è quella di quattro rettangoli, aventi per altezze i valori  $c_i$  e per basi i valori  $a_i - a_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

Ciascuno di questi rettangoli, eccettuato l'ultimo, è privo di un lato, precisamente dell'altezza di destra, ma, per l'osservazione precedentemente fatta sulla discontinuità di III<sup>a</sup> specie, venendo a mancare solo l'area di un segmento, poniamo per definizione:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^4 c_i \cdot (a_i - a_{i-1}).$$

Notiamo allora che una, e quindi, generalizzando, anche un numero finito di discontinuità di I<sup>a</sup> specie non impediscono l'esistenza dell'integrale. Si noti però che non è lecito pervenire alla stessa conclusione se le discontinuità fossero in numero infinito.

Ovviamente questa definizione si generalizza immediatamente al caso di una funzione a scala con  $n$  generici tratti:  $y = c_i, a_{i-1} \leq x < a_i, 1 \leq i \leq n, a_0 = a, a_n = b$ , ponendo:

$$A = \int_a^b y dx = \sum_{i=1}^n c_i \cdot (a_i - a_{i-1}).$$

Questa definizione comporta un ulteriore allontanamento tra l'integrale definito ed il concetto tradizionale di area. Ove tutte le costanti  $c_i$  fossero dello stesso segno, il valore  $A$  potrebbe ancora rappresentare un'area (di segno eventualmente negativo se le costanti fossero tutte negative), altrimenti il valore trovato sarà solo una differenza tra le aree positive e quelle negative, venendo così a perdersi non solo il segno ma anche il valore numerico dell'estensione della superficie.

### INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI LIMITATE - SOMME INTEGRALI

Siamo ora in grado di dare la definizione di funzione integrabile per una funzione qualunque, ovvero per funzioni più generali di quelle costanti e costanti a tratti. Per fare ciò non potremo che utilizzare le funzioni integrabili finora introdotte, ovvero le funzioni costanti a tratti.

Si consideri allora una generica funzione  $y = f(x)$ , alla quale si chiede per il momento, e vedremo in seguito quanto la richiesta sia importante, di essere una funzione limitata nell'intervallo  $[a, b]$ , ovvero tale da aversi  $|f(x)| < M, \forall x \in [a, b]$ , con  $M$  valore reale opportuno.

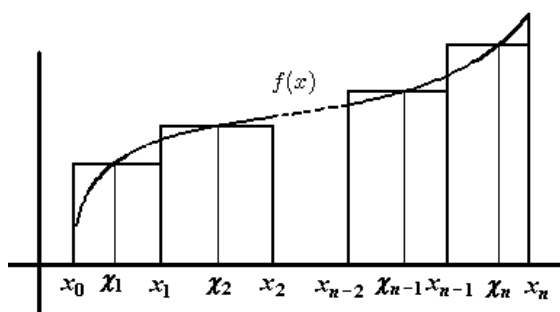
Operiamo come primo passo una **partizione** dell'intervallo  $[a, b]$ , scegliendo  $n$  generici punti  $x_i \in [a, b], 0 \leq i \leq n$ , tali che:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Non ci sono particolari accorgimenti nè condizioni da rispettare nella scelta di questi punti, quali ad esempio l'equidistanza tra i punti  $x_i$ . Così facendo, l'intervallo  $[a, b]$  viene diviso in  $n$  sottointervalli  $[x_i, x_{i+1}]$ , che hanno in comune solo un estremo e la cui unione dà tutto l'intervallo  $[a, b]$ .

In ciascuno di questi intervalli scegliamo un punto, diciamolo  $\chi_i$ , nel quale la funzione sia definita, ovvero esista il valore  $f(\chi_i)$ .

Consideriamo allora l'espressione  $\sum_{i=1}^n f(\chi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ .

Essa viene detta **somma integrale** relativa alla partizione scelta, e rappresenta l'integrale di una funzione a scala avente per ordinate i valori scelti  $f(\chi_i)$ .



**DEFINIZIONE DI FUNZIONE INTEGRABILE SECONDO CAUCHY**

Sia ora  $\delta = \text{Max}\{(x_i - x_{i-1})\}$ , ovvero  $\delta$  rappresenti la massima delle ampiezze degli intervalli della partizione. Possiamo dare la:

**Definizione 23** (di **funzione integrabile** secondo Cauchy) : La funzione  $f(x)$  si dice integrabile nell'intervallo  $[a, b]$  se

se  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n f(\chi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right]$  esiste finito.

Se ciò accade, si pone  $A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n f(\chi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \right]$ ; altrimenti si dirà

che la funzione  $f(x)$  nell'intervallo dato non è integrabile.

Vediamo il significato operativo di questa definizione. E' molto importante il ruolo del  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$

dire che  $\delta \rightarrow 0$  significa che il sottointervallo più lungo ha una lunghezza infinitesima, e quindi saranno tali anche le lunghezze di tutti gli altri sottointervalli. Eseguire questo passaggio al limite implica quindi di non limitarsi ad una sola partizione: se ne devono considerare infinite, prendendo le ampiezze  $x_i - x_{i-1}$  sempre più piccole, e questo significa operare partizioni sempre più fini, ovvero formate da un numero sempre maggiore di punti  $x_i$ , da inserire ovunque all'interno dell'intervallo  $[a, b]$ .

Vediamo ora di interpretare il simbolo che è stato usato per indicare l'integrale definito.

Si deve operare un passaggio al limite, per  $\delta \rightarrow 0$ , e questo significa prendere partizioni sempre più fini, rendendo infinitesima l'ampiezza di tutti i sottointervalli della partizione.

Una volta operato il limite, al posto di  $\sum_{i=1}^n$  abbiamo  $\int_a^b$ , ed il cambio del simbolo sta ad in-

dicare che una somma di  $n$  termini (somma nel discreto) si è trasformata in una somma nel continuo.

Al posto di  $f(\chi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$  abbiamo  $f(x) dx$ , ovvero alle aree dei rettangoli della funzione costante a tratti si sostituisce il prodotto di una generica altezza, l'ordinata  $f(x)$ , per una base, rappresentata dall'elemento infinitesimo  $dx$ , che sostituisce le lunghezze finite  $(x_i - x_{i-1})$ .

Il simbolo  $\int_a^b f(x) dx$  va quindi letto come una somma, però nel continuo, di altezze (le ordinate della funzione) per basi infinitesime. Per quanto suggestiva, l'immagine di tanti sottili rettangoli, con basi ridottissime, uno accanto all'altro, non coincide con la realtà effettiva. Per quanto piccole si possano prendere le basi, avremmo sempre un rettangolo dopo l'altro, ovvero una situazione di tipo discreto, mentre invece rileviamo un'ultima volta la principale conseguenza del limite, ovvero il passaggio da una situazione nel discreto ad una nel continuo.

**INTEGRALE ED AREA**

Anche se l'integrale definito è stato pensato inizialmente per risolvere il problema dell'area, abbiamo visto via via nei passaggi precedenti quanto integrale definito e area intesa in senso tradizionale si discostino tra loro. I due concetti coincidono esattamente nel caso, e solo in questo, in cui si determini l'area al di sotto del grafico di una funzione non negativa. Ove la funzione fosse non positiva, anche se con un cambiamento di segno, l'integrale ci dà ancora una quantità che coincide con l'area cercata. Quando infine la funzione cambia di segno all'interno dell'intervallo di integrazione, l'integrale ci dà una differenza tra le aree positive e quelle negative, e quindi si perde anche il valore della quantità della superficie.

## CLASSI DI FUNZIONI INTEGRABILI

Essendo abbastanza complicato, per ovvii motivi, verificare l'integrabilità di una qualunque funzione basandosi sulla definizione, occorrono strumenti pratici che ci consentano di vedere, per altra via, se una data funzione sia integrabile in un assegnato intervallo. A questo scopo determineremo alcune classi di funzioni integrabili, ovvero formuleremo condizioni sufficienti a garantire per una data funzione l'esistenza dell'integrale definito in un assegnato intervallo. La prima proprietà sufficiente a garantire l'integrabilità è la continuità.

Vale infatti il seguente Teorema:

**Teorema 32** : Se la funzione  $f(x)$  è continua nell'intervallo  $[a, b]$ , allora esiste  $\int_a^b f(x) dx$ .

Questo Teorema afferma che se una funzione è continua allora è integrabile. Quindi la continuità è condizione sufficiente per l'integrabilità, e non è certo necessaria, in quanto già nell'esaminare l'integrabilità delle funzioni costanti e costanti a tratti abbiamo visto che un numero finito di discontinuità di I<sup>^</sup> e III<sup>^</sup> specie non impedisce l'esistenza dell'integrale.

Occorrerebbero strumenti più sofisticati, quali la teoria della misura e il concetto di insieme a misura nulla, per descrivere esattamente la situazione.

Qui ci limitiamo ad affermare il seguente:

**Teorema 33** : Una funzione limitata è sicuramente integrabile quando ammette un numero finito di discontinuità di I<sup>^</sup> e III<sup>^</sup> specie.

Osserviamo comunque che questa non è la più ampia classe di funzioni integrabili.

Osserviamo anche come non siano state trattate le discontinuità di II<sup>^</sup> specie, specialmente quelle infinite. In queste discontinuità viene a cadere l'ipotesi di partenza, ovvero che la funzione sia limitata, e per questo problema si dovrà ricorrere ad una estensione del concetto d'integrale, ovvero agli integrali generalizzati.

## PROPRIETA' DELL'INTEGRALE DEFINITO

Vediamo una rassegna delle principali proprietà di cui gode l'integrale definito, la maggior parte delle quali discende dalla definizione di funzione integrabile e quindi dalle proprietà dell'operazione di passaggio al limite.

### PROPRIETA' DI LINEARITA'

**Teorema 34** : Date le funzioni,  $f(x)$  e  $g(x)$ , integrabili nell'intervallo  $[a, b]$ , siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Allora si ha che:  $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$ ,

ovvero l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è uguale alla combinazione lineare degli integrali delle due funzioni.

Questa proprietà può essere vista alla luce di due proprietà più semplici. Vale anzitutto il

**Teorema 35** : Data  $f(x)$  integrabile nell'intervallo  $[a, b]$ , sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Allora si ha che:  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx$ .

Questa proprietà si esprime solitamente dicendo che una costante moltiplicativa si può portare fuori dal segno d'integrale. Vale poi il

**Teorema 36** : Siano date  $f(x)$  e  $g(x)$  integrabili nell'intervallo  $[a, b]$ ; allora si ha che:

$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ,

ovvero l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali.



La formula  $\int_a^b f(x) + g(x) dx$  contiene un errore di ortografia matematica. La sua esatta scrittura dovrebbe essere  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$  ma è ormai da tutti accettata, anche se scorretta, la prima scrittura.

Date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  integrabili nell'intervallo  $[a, b]$ , con  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ , se vogliamo calcolare l'area della parte di piano compresa tra i grafici delle due funzioni, dovremo calcolare:

$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$  che, per la proprietà di linearità, è uguale a:

$\int_a^b f(x) - g(x) dx$ , ovvero all'area al di sotto del grafico della funzione differenza.

### PROPRIETA' DI ISOTONIA

**Teorema 37** : Sia  $f(x)$  integrabile nell'intervallo  $[a, b]$  e sia  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Allora si ha che  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

Ovvero l'integrale mantiene il segno della funzione.

Come conseguenza, abbiamo anche il seguente:

**Teorema 38** : Siano date due funzioni,  $f(x)$  e  $g(x)$ , integrabili nell'intervallo  $[a, b]$ , e sia inoltre  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ . Allora  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

L'integrale quindi mantiene l'ordine, ovvero a funzione maggiore corrisponde integrale maggiore.

### PROPRIETA' DI ADDITIVITA'

Dopo le proprietà dell'integrale derivanti da proprietà della funzione integranda, vediamo ora altre due che legano l'integrale all'intervallo d'integrazione. Per fare questo occorrono due definizioni preliminari.

**Definizione 24** : Si pone, per definizione:  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

La definizione si giustifica intuitivamente, in quanto calcoliamo l'area di un segmento.

**Definizione 25** : Poniamo, sempre per definizione:  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

Vediamo quale possa essere il senso di questa seconda definizione.

In  $\int_a^b f(x) dx$  intendiamo "percorrere" l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  nel senso tradizionale delle ascisse crescenti, per cui, come osservato in precedenza, le quantità  $(x_i - x_{i-1})$ , che determinano le basi nelle somme integrali, risulteranno sempre positive. In  $\int_b^a f(x) dx$  conveniamo invece di percorrere al contrario l'intervallo d'integrazione, quindi le basi saranno date dalle quantità  $(x_{i-1} - x_i)$ , che risulteranno sempre negative. A parità di altezze  $f(x)$ , ecco giustificato il cambiamento di segno del risultato.

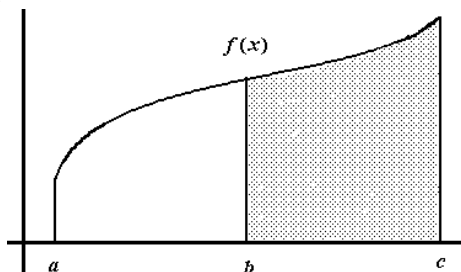
Possiamo ora enunciare il:

**Teorema 39** : Sia data una funzione  $f(x)$  integrabile in un intervallo e siano  $a, b$  e  $c$  tre punti di questo intervallo. Vale l'uguaglianza:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Dimostrazione:** La proprietà si reputa evidente nel caso in cui  $a \leq c \leq b$ : basta inserire il punto  $c$  tra i punti della partizione ed usare le proprietà della somma tra numeri.

Se fosse invece, ad esempio,  $a \leq b \leq c$ , per la precedente proprietà avremo:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$
, ovvero si toglie all'area tra  $a$  e  $c$  l'eccedenza rispetto all'area che si vuole trovare, quella tra  $a$  e  $b$ , e cioè l'area tra  $b$  e  $c$ , come illustrato in figura.



## INTEGRALE INDEFINITO

### LA FUNZIONE INTEGRALE

Mediante l'integrale definito possiamo ora costruire una nuova classe di funzioni, chiamate funzioni integrali in quanto utilizzano appunto l'integrale per ottenere il valore della variabile dipendente.

L'importanza di queste nuove funzioni è dovuta principalmente a motivi di tipo teorico e la loro introduzione consentirà, mediante il Teorema fondamentale, di stabilire una importante relazione tra derivazione ed integrazione, nonché, come ulteriore conseguenza, la più importante regola pratica per il calcolo degli integrali definiti.

Consideriamo una funzione  $f(x)$  integrabile nell'intervallo  $[a, b]$ . Sappiamo che per essere integrabile è sufficiente che la funzione abbia in  $[a, b]$  un numero finito di discontinuità di I<sup>a</sup> e III<sup>a</sup> specie, e l'integrabilità di  $f(x)$  in  $[a, b]$  garantisce l'integrabilità in ogni sottointervallo  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ .

Consideriamo allora la seguente espressione: 
$$\int_a^x f(x) dx, x \in [a, b].$$

Essa esprime l'integrale della funzione  $f(x)$  nell'intervallo  $[a, x]$ .

Il ruolo che solitamente riserviamo alla variabile  $x$ , che ora troviamo anche nell'estremo superiore d'integrazione, e cioè quello di variabile indipendente, dovrebbe sufficientemente chiarire il senso dell'espressione. La funzione  $f(x)$  è assegnata una volta per tutte ed il suo grafico contribuisce a delimitare la figura di integrazione; il valore  $a$  rappresenta l'estremo inferiore dell'intervallo di base; conosciamo dalla definizione di funzione integrabile il ruolo di  $f(x) dx$ , rimane solo da notare che non si fissa il secondo estremo dell'intervallo d'integrazione, ma si considera questo estremo come variabile. Ecco perchè è stato indicato con  $x$ .

Al variare del secondo estremo d'integrazione varierà ovviamente il valore dell'integrale; si vede anzi che ad ogni valore del secondo estremo d'integrazione  $x$  corrisponderà una ed una sola immagine, ed è quindi soddisfatta la definizione di funzione.

Riassumendo, abbiamo una funzione che "ad ogni punto  $x$  dell'intervallo  $[a, b]$  associa come immagine l'integrale della funzione  $f(x)$  dal punto assegnato  $a$  fino al punto  $x$ ".

Una funzione costruita in questo modo prende il nome di **funzione integrale** e la indicheremo con  $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$ , mentre la funzione  $f(x)$  sarà invece chiamata funzione integranda. Si cambia la variabile, da  $x$  a  $t$ , in  $f(x) dx$  proprio per ribadire come l'unica variabile indipendente della funzione integrale sia il secondo estremo di integrazione  $x$ .

## TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Vale il seguente:

**Teorema 40** (di Torricelli-Barrow o Teorema fondamentale del calcolo integrale) : Sia  $f(x)$  continua nell'intervallo  $[a, b]$  e sia  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $x \in [a, b]$ , una sua funzione integrale.

Allora  $F(x)$  è derivabile e risulta  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

## INTEGRALE INDEFINITO - FUNZIONI PRIMITIVE

Passiamo ad esaminare una prima importante conseguenza del Teorema fondamentale.

Finora, data una funzione  $f(x)$ , mediante l'operazione di derivazione potevamo calcolarne la funzione derivata, ovvero  $f(x) \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow f'(x)$ .

Mediante la funzione integrale, nell'ipotesi di funzione integranda continua, si è fatto il percorso in senso inverso: siamo partiti da  $f(x)$  e si è costruita una nuova funzione,  $F(x)$ , di cui  $f(x)$  è la derivata, ovvero  $F(x) \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow f(x)$ .

Si è quindi operato in senso inverso alla derivazione:  $f(x) \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

All'operazione inversa della derivata viene dato il nome di integrale indefinito, e per esaminare questo concetto iniziamo dando una nuova definizione.

**Definizione 26** : Sia  $f(x)$  una funzione continua  $\forall x \in [a, b]$ . La funzione  $F(x)$  si dice una **primitiva** di  $f(x)$  se  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

La primitiva di  $f(x)$  è quindi una funzione che ha per derivata  $f(x)$ .

**Esempio 66** : Essendo  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ , abbiamo che  $\sin x$  è una primitiva di  $\cos x$ .

Essendo  $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ , abbiamo che  $x^4$  è una primitiva di  $4x^3$ .

Ovviamente una funzione, per essere una primitiva, deve essere derivabile e quindi continua.

Dobbiamo ora chiederci quali sono le funzioni che ammettono primitiva e, se ne ammettono, quante ne ammettono. Se ci mettiamo nell'ipotesi del Teorema fondamentale, ovvero se trattiamo funzioni continue, alla prima parte della domanda troviamo subito risposta: ogni funzione  $f(x)$  continua  $\forall x \in [a, b]$  ammette almeno una primitiva, basta infatti costruire una sua funzione integrale  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  per avere che  $F'(x) = f(x)$ . Quindi ogni funzione continua ammette sicuramente primitiva.

Passiamo alla seconda parte della domanda: se ci sono primitive, quante sono ?

Se  $\mathcal{D}(F(x)) = F'(x) = f(x)$ , sarà anche  $\mathcal{D}(F(x) + k) = F'(x) = f(x)$ , dove  $k$  è una costante qualsiasi. Ma allora se  $f(x)$  ha una primitiva  $F(x)$ , anche  $F(x) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , è una sua primitiva.

Supponiamo poi che  $F(x)$  e  $G(x)$  siano due primitive di una stessa funzione continua  $f(x)$ .

Quindi  $F'(x) = G'(x) = f(x)$  ovvero  $F'(x) - G'(x) = (F(x) - G(x))' = 0$  per cui, in conseguenza del Teorema di Lagrange, sarà anche  $F(x) - G(x) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Due primitive di una stessa funzione integranda continua differiscono per una costante, mentre prima abbiamo visto che se due funzioni derivabili differiscono per una costante allora sono primitive di una stessa funzione. La conclusione non può essere che questa: data una primitiva  $F(x)$  di una funzione continua  $f(x)$ , tutte le altre primitive sono esprimibili come:

$F(x) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , e scriveremo  $\int f(x) dx = F(x) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Vale quindi il seguente:

**Teorema 41** : Sia  $f(x)$  continua  $\forall x \in [a, b]$ . Allora  $f(x)$  ammette infinite primitive.

La totalità delle primitive di una funzione continua  $f(x)$  viene chiamata **integrale indefinito** di  $f(x)$ , e si indica con il simbolo  $\int f(x) dx$ .

Anche sulla struttura di questo simbolo faremo delle osservazioni, che per il momento dobbiamo rimandare ad una fase successiva della trattazione.

## II^ TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Prima di trattare approfonditamente dal punto di vista pratico il problema della ricerca delle primitive, o integrale indefinito, di una data funzione, vediamo una conseguenza del Teorema fondamentale del calcolo, così importante che da molti è chiamata II^ Teorema fondamentale.

Vale il seguente:

**Teorema 42** (II^ Teorema fondamentale del calcolo integrale) : Sia  $f(x)$  continua in  $[a, b]$ .

Allora  $\int_a^b f(x) dx = (F(x))\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ , dove  $F(x)$  è una qualunque primitiva della funzione  $f(x)$ .

L'importanza pratica di questo Teorema è subito evidente: per calcolare l'integrale definito basta determinare una primitiva della funzione integranda, per poi calcolarne la differenza dei valori negli estremi; non occorre cioè ricorrere alla definizione di funzione integrabile.

Ovviamente questo risultato è utilizzabile se si riesce a determinare una primitiva; anche se la ricerca della primitiva è l'operazione inversa della derivata, ed anche se si può calcolare la derivata di ogni funzione, purtroppo non sempre si riesce a compiere l'operazione inversa, cioè a determinare la primitiva. Per ammettere infinite primitive basta che la funzione sia continua, ma purtroppo non si riesce, per la maggior parte delle funzioni, ad andare oltre l'esistenza e determinare l'espressione esplicita delle primitive. Si suole dire in questo caso che la funzione non ha una primitiva esprimibile elementarmente.

E' di fondamentale importanza ricordarsi che la regola pratica per il calcolo dell'integrale definito vale solo nell'ipotesi che la funzione integranda sia continua nell'intervallo d'integrazione, come vediamo nell'esempio che segue.

**Esempio 67** : Consideriamo il seguente integrale:  $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx$ . Essendo  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$ , una primitiva della funzione integranda  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  è data dalla funzione  $F(x) = -\frac{1}{x}$ .

Se usassimo il II^ Teorema fondamentale, otterremmo:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx = \left( -\frac{1}{x} \right)\Big|_{-1}^{+1} = -1 - 1 = -2.$$

Tutto sembrerebbe corretto, ma osservando il risultato vediamo anzitutto una palese incongruenza: una funzione strettamente positiva come  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  avrebbe un integrale negativo, e questo è assurdo.

L'errore consiste nell'aver applicato a questo integrale una regola che vale solamente se la funzione integranda è continua, mentre invece la  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  ha una discontinuità di II^ specie infinita in  $x = 0$ , punto interno all'intervallo d'integrazione. Per problemi come questo

bisognerà ricorrere agli integrali generalizzati. Se si fosse dovuto calcolare invece, ad esempio,  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ , la procedura svolta sarebbe stata pienamente valida.

### RICERCA DELLE PRIMITIVE

A questo punto sono due i problemi la cui soluzione compete al calcolo integrale: l'integrale definito, collegato alla ricerca dell'area sotto il grafico di una funzione, e l'integrale indefinito, ovvero la ricerca della totalità delle primitive di una data funzione. Per il II° Teorema fondamentale abbiamo visto, però, che il calcolo dell'integrale definito può utilizzare l'integrale indefinito, per cui dobbiamo ora affrontare il problema pratico della ricerca delle primitive di una data funzione. Vedremo le primitive che si possono ricavare immediatamente, per poi descrivere due metodi d'integrazione, l'integrazione per sostituzione e l'integrazione per parti. Se occorrerà, scriveremo la funzione integranda nella forma  $\frac{d}{dx}(f(x))$  per usare l'uguaglianza

$$\int \frac{d}{dx}(f(x)) dx = \int f'(x) dx = f(x) + k, k \in \mathbb{R}.$$

### LINEARITA' DELLE PRIMITIVE

Per cercare la primitiva di una funzione sappiamo che dobbiamo operare in modo inverso rispetto al calcolo della derivata. Vediamo allora anzitutto una proprietà di immediata dimostrazione:

**Teorema 43** : Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx + \beta \cdot \int g(x) dx, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Come per l'analoga proprietà dell'integrale definito, anche questa si può considerare come la composizione delle due più semplici proprietà:

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \cdot \int f(x) dx \quad \text{e} \quad \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Ma queste due sono di immediata verifica, semplicemente ricordando che:

$\frac{d}{dx}(\alpha f(x)) = \alpha \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$  e che  $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$ ,  
e quindi vale la proprietà di linearità delle primitive.

### INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Si tratta ora di fare una rassegna delle cosiddette derivate fondamentali, leggerle in senso inverso, e ricavare quelli che chiameremo **integrali immediati** o fondamentali.

Cominciamo da  $\int dx = \int 1 dx$ . Essendo  $\frac{d}{dx}(x) = 1$ , avremo:  $\int dx = x + k$ .

Da questo e per la proprietà di linearità avremo anche:

$$\int m dx = m \int dx = mx + k, m \in \mathbb{R}.$$

### INTEGRALI DELLE POTENZE

Essendo  $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sarà anche  $\frac{d}{dx}(x^{\alpha+1}) = (\alpha+1)x^\alpha$  e quindi avremo:

$$\int x^\alpha dx = \int \frac{1}{\alpha+1} (\alpha+1)x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \int (\alpha+1)x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k.$$

Notiamo che questa procedura richiede che sia  $\alpha \neq -1$ , caso che tratteremo a parte.

Questo integrale ci introduce ad alcune considerazioni, la più semplice delle quali può essere sintetizzata in questo modo: se nella funzione integranda manca una costante moltiplicativa,

che dovrebbe esserci per derivazione, allora la primitiva si ottiene moltiplicando per il reciproco della costante, e portando tale reciproco fuori dall'integrale.

Si noti infatti il ruolo della costante  $\alpha + 1$  che mancava nella funzione integranda per completare la derivata di  $x^{\alpha+1}$ ; per la proprietà di linearità essa è stata introdotta nella funzione integranda, moltiplicando anche, ma fuori dall'integrale, per il suo reciproco.

Vediamo infine il caso  $\alpha = -1$ .

Essendo  $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ , avremo:  $\int \frac{1}{x} dx = \log x + k$ , purchè sia  $x > 0$ .

La condizione posta,  $x > 0$ , comporta che la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$ , definita  $\forall x \neq 0$ , avrebbe una primitiva definita solo per valori positivi.

La funzione  $F(x) = \log(-x)$ , definita per  $x < 0$ , ha per derivata:

$\frac{d}{dx}(\log(-x)) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ . Quindi anch'essa è una primitiva di  $f(x) = \frac{1}{x}$ , relativamente però ai soli valori negativi.

Preso la funzione  $F(x) = \log|x| = \begin{cases} \log x & : x > 0 \\ \log(-x) & : x < 0 \end{cases}$ , risulta  $F'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\forall x \neq 0$ , e

comprendiamo allora ambedue i casi scrivendo:  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + k$ ,  $x \neq 0$ .

Abbiamo così ottenuto le primitive aventi il più ampio campo d'esistenza, anche se, per far questo, abbiamo rinunciato all'ipotesi di continuità della funzione integranda.

## INTEGRALI DELLE FUNZIONI ESPONENZIALI

Vediamo il primo integrale immediato inerente funzioni esponenziali:

da  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$  otteniamo  $\int e^x dx = e^x + k$ .

Passando ad una generica funzione esponenziale  $a^x$ , essendo  $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$ , otterremo:

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} \int a^x \cdot \log a dx = \frac{1}{\log a} \cdot a^x + k = a^x \cdot \log_a e + k.$$

## INTEGRALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Essendo  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ , abbiamo:  $\int \cos x dx = \sin x + k$ , ed essendo invece

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \text{ abbiamo: } \int \sin x dx = -\int (-\sin x) dx = -\cos x + k.$$

Da  $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ , otteniamo  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x + k$ ,

mentre da  $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$ , si ha, cambiando di segno:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int 1 + \operatorname{cotg}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + k.$$

## INTEGRALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Per quanto concerne integrali immediati che siano in relazione con le funzioni trigonometriche inverse, da  $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$  otteniamo  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$ .

Essendo  $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{-1}{1+x^2}$  si ha pure  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccotg} x + k$ .

Quest'ultima non deve, se messa in relazione con la precedente, indurre a considerazioni errate del tipo  $\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$ .

Ricordiamo che vale infatti la relazione:  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ .

Essendo  $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  e  $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccos} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  otteniamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{ed anche} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\operatorname{arccos} x + k.$$

Anche qui, come in precedenza, è bene ricordare la relazione:  $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}$ .

## METODI DI INTEGRAZIONE

Quando la funzione integranda non sia immediatamente riconducibile ad una derivata nota, sorge il problema di quali tentativi abbia senso fare o di quali strade sia meglio intraprendere per arrivare a determinarne una primitiva. Calcolare primitive è un problema che si risolve per tentativi, ma acquisire esperienza in questo settore significa saper puntare su quello che ha più probabilità di essere il tentativo adatto.

### INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE

Più che un vero e proprio metodo, questa procedura consiste nel riscrivere la funzione integranda in modo tale da poterla poi esprimere come somma di varie funzioni i cui integrali siano noti o più facilmente calcolabili. Limitiamoci ad alcuni esempi.

**Esempio 68** : Calcoliamo  $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ .

Sommando e sottraendo 1, ed applicando poi la proprietà di linearità, otteniamo:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 \, dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x \, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + k.$$

**Esempio 69** : Calcoliamo  $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ . Avremo, con facili calcoli:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + k. \end{aligned}$$

Come si vede, occorre trovare la giusta trasformazione per arrivare ad integrali, almeno per ora, immediati.

**Esempio 70** : Calcoliamo  $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$ . Essendo  $\frac{1}{x(x-1)} dx = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ , avremo:

$$\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx = \log|x-1| - \log|x| + k = \log \left| \frac{x-1}{x} \right| + k.$$

### INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Possiamo introdurre questo metodo ripartendo dalla derivata, o meglio dal differenziale, di una funzione composta. Sappiamo che  $d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x) dx$ , che possiamo anche scrivere come  $d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f'(g(x)) \cdot d(g(x))$ .

Se poniamo  $g(x) = t$ , otteniamo  $d(f(g(x))) = f'(t) dt = d(f(t))$ , ovvero "scompare" la funzione composta trattando  $g(x)$  come una nuova variabile indipendente.

Un primo modo con il quale introdurre il metodo di integrazione per sostituzione consiste nel vederlo come inversione della derivata di funzione composta. Possiamo cioè scrivere:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f'(g(x)) d(g(x)) = \int f'(t) dt.$$

Messa in questa forma la primitiva sarebbe fin troppo semplice da calcolare, per cui, per generalizzare la procedura, sostituiamo all'espressione  $f'(t)$  l'espressione  $F(t)$  ed otteniamo:

$$\int F(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int F(g(x)) \cdot d(g(x)) = \int F(t) dt.$$

Naturalmente il metodo funziona se è calcolabile la primitiva di  $F(t)$ .

**Esempio 71** : Calcoliamo  $\int \sin^3 x dx$ . Avremo, ponendo  $\cos x = g(x) = t$ :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = - \int 1 - \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= - \int 1 d(\cos x) + \int \cos^2 x d(\cos x) = - \int dt + \int t^2 dt = \\ &= -t + \frac{1}{3} t^3 + k = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k. \end{aligned}$$

**Esempio 72** : Calcoliamo  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ . Operando per sostituzione, poniamo:

$$F(g(x)) = \frac{1}{1+e^{2x}} \quad \text{e} \quad g'(x) = e^x, \quad \text{per ottenere:}$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1+e^{2x}} e^x dx = \int \frac{1}{1+e^{2x}} d(e^x) = \int \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \text{avendo posto } e^x = t.$$

L'integrale ora è immediato e si ha  $\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t + k = \arctg e^x + k$ , una volta riportata la funzione ad avere la variabile  $x$  come variabile indipendente.

**Esempio 73** : Calcoliamo  $\int \operatorname{tg} x dx$ . Con procedura analoga al caso precedente, avremo:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \sin x dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x). \quad \text{Il segno negativo è} \\ &\text{stato introdotto in quanto } d(\cos x) = -\sin x dx. \text{ Posto ora } \cos x = t, \text{ avremo:} \\ &- \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = - \int \frac{1}{t} dt = -\log |t| + k = -\log |\cos x| + k. \end{aligned}$$

**Esempio 74** : Calcoliamo  $\int (x-1)e^{x^2-2x} dx$ . Essendo  $d(x^2-2x) = 2(x-1) dx$ , si ha:

$$\begin{aligned} \int (x-1)e^{x^2-2x} dx &= \frac{1}{2} \int e^{x^2-2x} d(x^2-2x) = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + k = \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2-2x} + k, \quad \text{avendo posto, chiaramente, } t = x^2 - 2x. \end{aligned}$$

**Esempio 75** : Calcoliamo  $\int \frac{1}{\sin x} dx$ . Da  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ , ricaviamo:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}, \quad \text{ed essendo } \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1, \quad \text{otteniamo:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}} dx + \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \\ &= - \int \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} d\left(\cos \frac{x}{2}\right) + \int \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} d\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \\ &= -\log \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \log \left| \sin \frac{x}{2} \right| + k = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + k. \end{aligned}$$



**Esempio 76** : Calcoliamo  $\int e^{|x|} dx$ . Essendo  $e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & : x < 0 \\ e^x & : x \geq 0 \end{cases}$ , integrando le due leggi

si ha:  $\int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + k_1 & : x < 0 \\ e^x + k_2 & : x \geq 0 \end{cases}$ . Essendo  $f(x) = e^{|x|}$  continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , anche

ogni sua primitiva dovrà esserlo, per cui imponiamo che sia:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x} + k_1) = k_1 - 1 = k_2 + 1 = f(0)$ , da cui segue:  $k_2 = k_1 - 2$ , e quindi:

$$\int e^{|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + k & : x < 0 \\ e^x + k - 2 & : x \geq 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Un altro modo, comunque equivalente, per introdurre l'integrazione per sostituzione è quello

di partire da  $\int f(x) dx$ , ovviamente supponendo che di  $f(x)$  non si sappia calcolare la primitiva. Se poniamo  $x = g(t)$  otteniamo  $f(x) = f(g(t))$  e, cosa altrettanto importante nonché fonte principale di errore qualora si tralasciasse,  $dx = d(g(t)) = g'(t) dt$ .

Quest'ultima deriva dal fatto che la sostituzione  $x = g(t)$  rende la originaria variabile indipendente  $x$  variabile dipendente (dalla  $t$ ) e quindi il differenziale  $dx$  va anch'esso ricalcolato, come differenziale, dando luogo appunto a  $dx = g'(t) dt$ . Fatta allora la sostituzione otteniamo:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int F(t) dt.$$

Nonostante l'apparente complicazione, ovviamente la metodologia scelta sarà quella giusta se

$\int F(t) dt$  risulta calcolabile.

**Esempio 77** : Calcoliamo  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ . Poniamo  $x = \sin t$ , per cui sarà  $dx = \cos t dt$ , e l'integrale dato diverrà  $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt$ .

Essendo, per le formule di bisezione,  $\cos t = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ , otteniamo:

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + k.$$

Resta da riportare la primitiva in funzione della variabile originaria  $x$ ; avremo:

da  $x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x$ ; mentre:  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t}$  e quindi:

$\sin 2t = 2x \sqrt{1-x^2}$  per cui sarà:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + k = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + k.$$

**Esempio 78** : Per calcolare  $\int \sqrt{1-e^x} dx$  poniamo  $\sqrt{1-e^x} = t$ , da cui  $e^x = 1-t^2$  e

quindi  $x = \log(1-t^2)$ , da cui  $dx = \frac{1}{1-t^2} (-2t) dt$ .

Quindi, sostituendo,  $\int \sqrt{1-e^x} dx = \int \frac{t}{1-t^2} (-2t) dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt =$

(applichiamo il metodo di decomposizione)

$$= 2 \int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1} dt = 2 \int 1 + \frac{1}{t^2-1} dt = 2 \int dt + \int \frac{2}{t^2-1} dt =$$

$$= 2t + \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} dt = 2t + \log|t-1| - \log|t+1| + k =$$

(risostituendo  $\sqrt{1-e^x} = t$ ):

$$\int \sqrt{1 - e^x} dx = 2 \sqrt{1 - e^x} + \log \left| \frac{\sqrt{1 - e^x} - 1}{\sqrt{1 - e^x} + 1} \right| + k.$$

Si è visto dagli esempi quanto sia importante, in  $\int f(x) dx$ , il ruolo del fattore  $dx$ , attraverso il quale, se del caso, un integrale per sostituzione vede trasformare la funzione integranda in una funzione di cui è possibile calcolare la primitiva. Riguardando ai calcoli sviluppati negli esempi, vediamo come  $f(x) dx$  sia un vero e proprio differenziale, e quindi come il fattore  $dx$  non sia solo un formale completamento del simbolo.

Si legge talvolta che il fattore  $dx$  ha il compito di indicare la variabile d'integrazione, e questa motivazione può avere una sua validità, come nei due esempi che seguono:

$$\int \cos x dx = \sin x + k \quad \text{mentre invece} \quad \int \cos x dt = \cos x \cdot t + k.$$

Il secondo integrale, infatti, ha per funzione integranda la costante  $\cos x$ , essendo  $t$  la variabile d'integrazione. Tolto quindi il caso di una funzione integranda che abbia nella sua espressione altre "lettere" da trattarsi come costanti, il ruolo del  $dx$  è quello di consentire il calcolo esatto della derivata di funzione composta, quando la variabile d'integrazione da indipendente diventa dipendente. Dovremo quindi vedere  $\int f(x) dx$  come  $\int (f(x) dx)$ , il che equivale a dire, più propriamente, che l'integrale indefinito è l'operazione inversa non della derivata ma del differenziale.

## INTEGRAZIONE PER PARTI

Se l'integrazione per sostituzione si può vedere come inversione della derivata di funzione composta, l'integrazione per parti è invece collegabile alla derivata di un prodotto.

Sappiamo che  $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  e quindi anche, passando ai differenziali:  $d(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) dx + f(x) \cdot g'(x) dx$ .

I termini dell'uguaglianza sono due differenziali, e due differenziali coincidono se le loro funzioni primitive differiscono per una costante, ovvero sarà anche:

$$\int d(f(x) \cdot g(x)) + k = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Per quanto già visto,  $\int d(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g(x) + k$ , per cui otterremo:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx + k.$$

Questa è la formula della cosiddetta **integrazione per parti**, che ora leggiamo nelle sue varie componenti, da sinistra verso destra. Si deve calcolare la primitiva di una funzione che "conviene" leggere come un prodotto di due funzioni:  $f'(x) \cdot g(x)$ . La prima,  $f'(x)$ , deve essere vista come una derivata, di cui però sia facile calcolare la primitiva, visto che il primo termine a destra nell'uguaglianza,  $f(x) \cdot g(x)$ , contiene non  $f'(x)$  ma la sua primitiva  $f(x)$ . Dell'altra funzione  $g(x)$  non si calcola la primitiva, ma la derivata; il metodo d'integrazione per parti funziona se l'integrale rimanente,  $\int f(x) \cdot g'(x) dx$ , risulta calcolabile.

Vedremo negli esempi che seguono come l'integrazione per parti possa anche necessitare di essere iterata più volte per arrivare alla soluzione.

In  $\int f'(x) \cdot g(x) dx$  il termine  $f'(x)$  prende il nome di **fattore differenziale**, mentre  $g(x)$  è detto **fattore finito**.

**Esempio 79** : Calcoliamo integrando per parti  $\int x e^x dx$ . Scriviamo, una sull'altra, la formula generale e quella che scaturisce da questo esempio, in modo da poter fare gli opportuni confronti:

$$\begin{aligned} \int f'(x) \cdot g(x) dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx + k \\ \int e^x x dx &= e^x x - \int e^x 1 dx + k = e^x x - e^x + k. \end{aligned}$$

Si è quindi posto:

$$\begin{aligned} f'(x) = e^x &\Rightarrow f(x) = e^x, \quad e \\ g(x) = x &\Rightarrow g'(x) = 1. \end{aligned}$$

**Esempio 80** : Calcoliamo  $\int \log x dx$ . Per poter applicare l'integrazione per parti, abbiamo bisogno di una funzione integranda espressa sotto forma di prodotto, per cui consideriamo:

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx.$$

Questa scelta, obbligata, rende ancor più obbligata la scelta del fattore finito e del fattore differenziale; non possiamo che prendere:

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\Rightarrow f(x) = x, \quad e \\ g(x) = \log x &\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

La rimanente diversa attribuzione dei ruoli avrebbe comportato  $g(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = 0$ , che non ha nessuna utilità nello sviluppo della regola. Passando ai calcoli, avremo:

$$\begin{aligned} \int f'(x) \cdot g(x) dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx + k \\ \int 1 \cdot \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx + k = x \log x - x + k. \end{aligned}$$

**Esempio 81** : Calcoliamo  $\int \operatorname{arctg} x dx$ . Come nell'esempio precedente, avremo:

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + k.$$

Passando al calcolo dell'integrale rimanente, si ha:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log (1+x^2),$$

in quanto  $d(1+x^2) = 2x dx$ , avendo poi posto  $1+x^2 = t$ .

Avremo quindi: .

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) + k.$$

**Esempio 82** : Con la stessa procedura dei due esempi precedenti, calcoliamo  $\int \operatorname{arcsen} x dx$ :

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = \int 1 \cdot \operatorname{arcsen} x dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + k.$$

Risolviendo l'integrale rimanente avremo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\sqrt{t}, \text{ essendo:}$$

$d(1-x^2) = -2x dx$  ed avendo posto  $1-x^2 = t$ . Il risultato finale sarà:

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k.$$

**Esempio 83** : Calcoliamo  $\int x^3 e^x dx$ . Questo esempio serve a far vedere come ci possa essere talvolta la necessità di iterare più volte l'integrazione per parti per poter arrivare al risultato finale. Scegliamo, come fatto in precedenza:

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x, \text{ e}$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2, \text{ per cui otterremo:}$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx + k, \text{ e ripetendo l'integrazione per parti, con:}$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x, \text{ e}$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x, \text{ otterremo:}$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left( x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right) + k, \text{ per avere infine:}$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + k.$$

L'integrale rimanente è quello calcolato, sempre per parti, nel primo esempio.

**Esempio 84** : Per vedere altri possibili accorgimenti utili, calcoliamo  $\int e^x \cos x dx$ .

Operiamo sempre per parti, ponendo:

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x, \text{ e}$$

$$g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x, \text{ e quindi otterremo:}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx + k = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx + k.$$

Integrando nuovamente per parti, e ponendo:

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x, \text{ e}$$

$$g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x, \text{ otterremo:}$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx, \text{ per cui otteniamo:}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + k.$$

Siamo quindi tornati all'integrale di partenza, e quindi otteniamo:

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x + k, \text{ ovvero:}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + h \text{ (con } h = \frac{k}{2} \text{ per brevità).}$$

Questa volta l'integrazione per parti non ci ha condotto alla risoluzione di un'integrale ma ad un'equazione che contiene l'integrale dato al pari di una incognita, e la risoluzione di questa equazione determina la primitiva cercata.

## INTEGRALI GENERALIZZATI

### INTEGRALI GENERALIZZATI

Due sono gli elementi che caratterizzano la classe delle funzioni a cui si può applicare la definizione di funzione integrabile: essere la funzione limitata ed esserlo in un intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$ . Ovvero si richiede limitatezza sia nel dominio che nel codominio. Questo non è comunque sufficiente ad assicurare che la funzione risulti integrabile.

Allarghiamo ora il campo di applicabilità del concetto d'integrale.

Due sono le direzioni in cui possiamo procedere: considerare un intervallo d'integrazione che non sia limitato oppure considerare funzioni non limitate (e considerare poi anche ambedue i casi contemporaneamente). Queste considerazioni conducono al concetto di integrale improprio o generalizzato.

### INTEGRALI GENERALIZZATI DI I<sup>^</sup> SPECIE

Consideriamo una funzione  $f(x)$  il cui campo di esistenza sia illimitato (superiormente, inferiormente o ambedue). Ci poniamo il problema di definire i seguenti integrali, che vengono detti **integrali generalizzati di I<sup>^</sup> specie**:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Il primo ha senso se il campo di esistenza di  $f(x)$  è illimitato superiormente, il secondo se lo è inferiormente, il terzo richiede entrambe le condizioni.

Il terzo tipo si riconduce subito ai primi due, potendosi scrivere, per le proprietà dell'integrale,

$$\text{detto } a \text{ un punto opportuno: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Daremo la definizione nel primo caso,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , mentre per il secondo si tratterà di fare semplici analogie con il caso precedente.

Preso un qualunque valore  $m > a$ , supponiamo che la funzione  $f(x)$  sia integrabile nell'intervallo  $[a, m]$ , ovvero che esista  $\int_a^m f(x) dx, \forall m > a$ .

Quest'ipotesi è sicuramente soddisfatta se nell'intervallo  $[a, +\infty[$  la funzione è continua, oppure se presenta solo un numero finito di discontinuità di I<sup>^</sup> e III<sup>^</sup> specie.

Possiamo allora dare la seguente:

**Definizione 27** (di funzione integrabile in senso generalizzato di I<sup>^</sup> specie) :

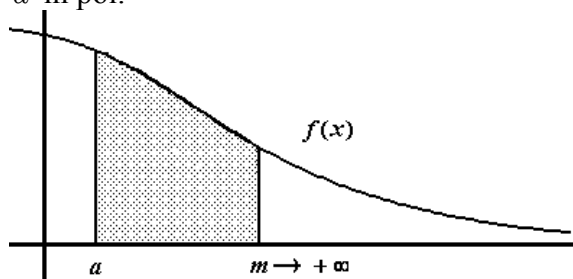
Si dice che la funzione  $f(x)$  è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo  $[a, +\infty[$  se il

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^m f(x) dx \text{ esiste finito; in tal caso si pone } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^m f(x) dx.$$

Si riconduce il calcolo a quello di normali integrali definiti, con un estremo superiore d'integrazione  $m$  considerato come un parametro, e si esamina, con un passaggio al limite, come si comporta tale integrale quando l'estremo d'integrazione diventa sempre più grande.

Se esso tende ad un valore finito, diciamo per definizione che la funzione  $f(x)$  ammette integrale generalizzato; se il limite è infinito oppure non esiste, la funzione sarà detta non integrabile in  $[a, +\infty[$ .

Se la funzione  $f(x)$  è sempre positiva in  $[a, +\infty[$  non potrà accadere che il limite non esista, in quanto la funzione  $F(m) = \int_a^m f(x) dx$  risulta monotona crescente, e quindi o ha limite finito oppure diverge a  $+\infty$ . Questa proprietà resta valida anche se la funzione  $f(x)$  fosse positiva da un certo  $b > a$  in poi.



Nell'ipotesi che  $f(x)$  sia continua in  $[a, +\infty[$  e che  $F(x)$  sia una sua primitiva, otteniamo:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^m f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} [F(m) - F(a)].$$

Quindi l'integrale generalizzato  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  esiste se risulta finito  $\lim_{m \rightarrow +\infty} F(m)$ , ovvero se la funzione  $F(x)$  ha un asintoto orizzontale sulla destra.

**Esempio 85** : Vediamo se esiste  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ .

Usando la definizione, dobbiamo vedere se esiste finito  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^m e^{-x} dx$ .

Essendo  $\int_0^m e^{-x} dx = (-e^{-x}) \Big|_0^m = 1 - e^{-m}$ , dovremo calcolare:

$\lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - e^{-m}) = 1 - 0 = 1$ , e quindi la funzione  $f(x) = e^{-x}$  ammette integrale generalizzato di I<sup>a</sup> specie nell'intervallo  $[0, +\infty[$  ed inoltre  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ .

**Esempio 86** : Vediamo se esiste  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ .

Procedendo come prima, dobbiamo vedere se esiste finito  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_1^m \frac{1}{x} dx$ . Avremo allora,

essendo  $x > 0$ ,  $\int_1^m \frac{1}{x} dx = (\log x) \Big|_1^m = \log m$ , e quindi, essendo  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \log m = +\infty$ ,

abbiamo che la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  non ammette integrale generalizzato di I<sup>a</sup> specie nell'intervallo  $[1, +\infty[$ .

**Esempio 87** : Studiamo la convergenza di  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ .

Vediamo per quali valori di  $\alpha$  esiste finito  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_1^m \frac{1}{x^\alpha} dx$ .

Abbiamo già trattato il caso  $\alpha = 1$ , in quanto abbiamo già visto che  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  non esiste.

Poniamo allora  $\alpha \neq 1$ , ed avremo:  $\int_1^m x^{-\alpha} dx = \left( \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^m = \frac{1}{1-\alpha} (m^{1-\alpha} - 1) \right)$ .

Essendo  $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\alpha < 0 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$ , vediamo che:

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  esiste e vale  $\frac{1}{\alpha-1}$  se  $\alpha > 1$ , mentre non esiste se  $\alpha \leq 1$ .

**Esempio 88** : Studiamo la convergenza di  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ .

Essendo  $\int_0^m e^{-\alpha x} dx = \left( -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^m = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha m}) \right)$  e dato che  $\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-\alpha m} = 0$ ,

$\forall \alpha > 0$ , avremo che  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$  esiste e vale  $\frac{1}{\alpha}$ ,  $\forall \alpha > 0$ .

Per trattare il secondo caso di integrale, ovvero  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ , varranno, con opportuni adattamenti, considerazioni del tutto analoghe al caso precedente.

Preso  $m < a$ , supponiamo che la funzione  $f(x)$  sia integrabile nell'intervallo  $[m, a]$ , ovvero che esista  $\int_m^a f(x) dx$ ,  $\forall m < a$ .

Diremo che  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  esiste (o converge) se esiste finito  $\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^a f(x) dx$ .

**Esempio 89** : Vediamo se esiste  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ .

Usando la definizione, dobbiamo vedere se esiste finito  $\lim_{m \rightarrow -\infty} \int_m^0 e^x dx$ .

Essendo  $\int_m^0 e^x dx = (e^x)|_m^0 = 1 - e^m$ , dovremo calcolare:

$\lim_{m \rightarrow -\infty} (1 - e^m) = 1 - 0 = 1$ , e quindi la funzione  $f(x) = e^x$  ammette integrale generalizzato di I<sup>a</sup> specie nell'intervallo  $] -\infty, 0]$  ed inoltre  $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$ .

A questo risultato si poteva arrivare anche per considerazioni di simmetria con quello dell'Esempio 85.

Infine, nel caso di  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int f(x) dx$ , occorrerà scomporre anzitutto l'integrale:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ , per poi applicare separatamente ai due casi

la definizione ed ottenere  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{m_1 \rightarrow -\infty} \int_{m_1}^a f(x) dx + \lim_{m_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{m_2} f(x) dx$ .

Se ambedue questi limiti esistono finiti, si dirà che la funzione  $f(x)$  ammette integrale generalizzato su tutta la retta reale; è importante inoltre rimarcare, mediante l'uso di due diverse variabili,  $m_1$  e  $m_2$ , la necessità di calcolare i due integrali l'uno indipendentemente dall'altro.

**Esempio 90** : Vediamo se esiste  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ . Dato che la funzione integranda è continua su tutto  $\mathbb{R}$  ed è funzione pari, quindi simmetrica rispetto all'asse  $y$ , preso  $a = 0$ , si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Calcoliamo quindi  $\lim_{m \rightarrow +\infty} 2 \cdot \int_0^m \frac{1}{1+x^2} dx$ .

Essendo  $\int_0^m \frac{1}{1+x^2} dx = (\arctg x)|_0^m = \arctg m - \arctg 0 = \arctg m$ , avremo:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} 2 \arctg m = 2 \frac{\pi}{2} = \pi. \text{ Quindi } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

## INTEGRALI GENERALIZZATI DI II<sup>a</sup> SPECIE

Consideriamo una funzione  $f(x)$  che non sia limitata nell'intervallo  $[a, b]$ . Non ha senso quindi, mancando la condizione di partenza, percorrere la strada della definizione di funzione integrabile per valutare  $\int_a^b f(x) dx$ . Ci limitiamo a trattare il caso di una funzione non limitata in

un punto  $c$  nel quale risulti  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ , ovvero il caso di una funzione che presenti una discontinuità di II<sup>a</sup> specie infinita nel punto  $c : a < c < b$ . Da questo possiamo dedurre una motivazione per la dizione di **integrale generalizzato di II<sup>a</sup> specie**.

Usiamo le proprietà dell'integrale per scrivere:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ . Il problema si affronta quindi portando anzitutto il punto di discontinuità all'estremo dell'intervallo d'integrazione, e questa è una prassi obbligata.

Definiamo ora  $\int_a^c f(x) dx$ , con  $c$  punto di discontinuità di II<sup>^</sup> specie, e per analogia tratteremo  $\int_c^b f(x) dx$ .

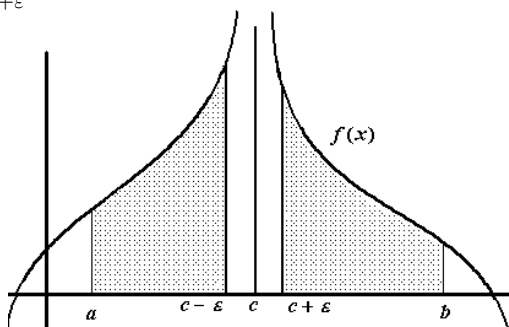
La funzione  $f(x)$  è, per ipotesi, continua nell'intervallo  $[a, c[$  e quindi sarà continua in ogni intervallo  $[a, c - \varepsilon] \subset [a, c[$ ,  $\varepsilon > 0$ . Abbiamo allora la seguente:

**Definizione 28** (di funzione integrabile in senso generalizzato di II<sup>^</sup> specie):

Si dice che la funzione  $f(x)$  è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo  $[a, c[$  se il limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$  esiste finito, e si porrà  $\int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$ .

Per  $\int_c^b f(x) dx$ , con  $c$  punto di discontinuità di II<sup>^</sup> specie infinita, la definizione stabilisce

invece di calcolare  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$ , e che tale limite esista finito.



Se la funzione  $f(x)$  è non negativa in  $[a, c[$ , il  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$  sicuramente esiste, in quanto la funzione  $h(\varepsilon) = \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$  è una funzione monotona crescente, che quindi o ammette limite finito oppure diverge a  $+\infty$ .

**Esempio 91**: Studiamo  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ . Avendo la funzione integranda una discontinuità di II<sup>^</sup> specie infinita in  $x = 0$ , per la definizione dovremo vedere se esiste finito  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$ .

Essendo  $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = (\log x) \Big|_{\varepsilon}^1 = 0 - \log \varepsilon$ , e dato che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\log \varepsilon) = +\infty$ , si conclude che la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  non ammette integrale generalizzato di II<sup>^</sup> specie in  $]0, 1]$ .

**Esempio 92**: Vediamo ora  $\int_0^1 \log x dx$ . La discontinuità di II<sup>^</sup> specie infinita (solo da destra) è nel punto  $x = 0$ , e dovremo calcolare allora  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log x dx$ . In base all'Esempio 80, essendo  $\int_{\varepsilon}^1 \log x dx = (x \log x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 = -1 - \varepsilon \cdot \log \varepsilon + \varepsilon$ , avremo:



$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-1 - \varepsilon \cdot \log \varepsilon + \varepsilon) = -1 + 0 + 0 = -1$ , e quindi la funzione  $f(x) = \log x$  ammette integrale generalizzato di II<sup>a</sup> specie nell'intervallo  $]0, 1]$ , con  $\int_0^1 \log x \, dx = -1$ .

Il segno del risultato deriva dal fatto che nell'intervallo  $]0, 1]$  la funzione  $f(x) = \log x$  è negativa.

**Esempio 93** : Studiamo l'esistenza di  $\int_c^b \frac{1}{(x-c)^\alpha} \, dx$ ,  $\alpha > 0, b > c$ . La funzione integranda ha una discontinuità di II<sup>a</sup> specie infinita nel punto  $x = c$ , e l'intervallo di integrazione si trova a destra del punto di discontinuità.

In analogia con i casi precedenti, dovremo calcolare  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-c)^\alpha} \, dx$ , in modo tale che l'intervallo d'integrazione abbia il punto di discontinuità come estremo sinistro.

Supponiamo  $\alpha \neq 1$ . Sarà allora:

$$\int_{c+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-c)^\alpha} \, dx = \left( \frac{1}{1-\alpha} (x-c)^{1-\alpha} \right) \Big|_{c+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-\alpha} ((b-c)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

L'esistenza dell'integrale dipende dal comportamento del  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-\alpha}$ , in quanto le parti rimanenti sono delle costanti. Vediamo i vari casi:

se  $1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1$ , si ha che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$ , quindi l'integrale dato esiste e vale:

$$\int_c^b \frac{1}{(x-c)^\alpha} \, dx = \frac{1}{1-\alpha} (b-c)^{1-\alpha};$$

se  $1 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$ , si ha che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = +\infty$ , ed in questo caso l'integrale non esiste.

Infine, per  $\alpha = 1$  si ha:  $\int_{c+\varepsilon}^b \frac{1}{x-c} \, dx = (\log |x-c|) \Big|_{c+\varepsilon}^b$ , ed essendo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log |b-c| - \log |\varepsilon|] = +\infty, \text{ anche in questo caso l'integrale non esiste.}$$

Quindi  $\int_c^b \frac{1}{(x-c)^\alpha} \, dx$  esiste per  $\alpha < 1$  (per  $\alpha \leq 0$  la funzione è continua, quindi sempre integrabile, e non occorre ricorrere agli integrali generalizzati).