COMPITO di ANALISI MATEMATICA 10/09/2024

I M 1) Sono dati tre numeri complessi z_1, z_2 e z_3, aventi modulo pari ad 1 ed argomenti rispettivamente uguali a $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Calcolare le radici quadrate del numero $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$.

Per le leggi di De Moivre sarà :
$z_1 \cdot z_2 = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -i$.
Sarà poi $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$.
Avremo infine $\sqrt{z} = \sqrt{-1} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{2\pi}{2}\right), 0 \le k \le 1$.
Per $k = 0$: $\cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = i$;
per $k = 1$: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -i$.

I M 2) Determinare se la funzione $f(x,y) = |xy| \cdot (x+y)$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

Risulta facilmente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |xy| \cdot (x+y) = 0$ con $f(0,0) = 0$.
La funzione è quindi continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h \cdot 0| \cdot (h+0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0 \cdot h| \cdot (0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy| \cdot (x+y) - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$
Passando a coordinate polari otteniamo:
$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta| (\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2 |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta| (\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta) = 0.$$
La convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho^2 |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta| (\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)\right| \le 2\varrho^2 < \varepsilon$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = 2e^{x+y} - x - y = 2$ ed il punto $P_0 = (0,0)$ che la soddisfa, determinare, per la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione, le derivate $y'(0)$ e $y''(0)$.

Essendo $\nabla f(x,y) = (2e^{x+y} - 1; 2e^{x+y} - 1)$ da cui $\nabla f(0,0) = (1;1)$.
Essendo $f'_y = 1 \ne 0$, esiste una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$.
Per essa avremo $y'(0) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{1}{1} = -1$.
Sarà poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2e^{x+y} & 2e^{x+y} \\ 2e^{x+y} & 2e^{x+y} \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

Da $y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\, y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha $y''(0) = -\dfrac{2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2}{1} = 0$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^2 - xy^2$, siano u e v i versori dei vettori $U = (1,1)$ e $V = (1,-1)$. Calcolare $\mathcal{D}_u f(1,1)$ e $\mathcal{D}^2_{u,v} f(1,1)$.

La funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi avremo:
$\mathcal{D}_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot u$ e $\mathcal{D}^2_{u,v} f(1,1) = u \cdot \mathbb{H}(1,1) \cdot v^T$.
Essendo $\nabla f(x,y) = \left(2x - y^2;\, -2xy\right) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (1;\, -2)$ e da $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si ha:
$\mathcal{D}_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot u = (1;\, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed essendo poi:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{Vmatrix}$ avremo infine:
$\mathcal{D}^2_{u,v} f(1,1) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} =$
$\mathcal{D}^2_{u,v} f(1,1) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{Vmatrix} = 2$.

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - 2y \\ \text{s.v. } xy = 1 \end{cases}$.

Si tratta di un problema di ricerca di massimi e minimi sotto vincoli di uguaglianza.
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce un insieme non limitato e quindi non si applica il Teorema di Weierstrass.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = x^2 - 2y - \lambda(xy - 1)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:
$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - \lambda y = 0 \\ \Lambda'_y = -2 - \lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{2x}{\lambda} = -\frac{4}{\lambda^2} \\ \frac{8}{\lambda^3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\lambda} \\ y = -\frac{4}{\lambda^2} \\ \lambda^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}.$$
Abbiamo una sola soluzione: $(-1;\, -1; 2)$.
Formiamo la matrice Hessiana orlata:
$\overline{\mathbb{H}}(\Lambda(x,y,\lambda)) = \begin{Vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \Lambda''_{xx} & \Lambda''_{xy} \\ g'_y & \Lambda''_{xy} & \Lambda''_{yy} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & y & x \\ y & 2 & -\lambda \\ x & -\lambda & 0 \end{Vmatrix}$ da cui otteniamo:
$\overline{\mathbb{H}}(\Lambda(-1;\, -1; 2)) = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$ da cui, dovendosi calcolare un solo minore, ovvero il determinante, avremo, sviluppando mediante la prima riga:
$\left|\overline{\mathbb{H}_3}(\Lambda(-1;\, -1; 2))\right| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$

$\left|\overline{\mathbb{H}_3}(\Lambda(-1;-1;2))\right| = 1\cdot(-2) - 1\cdot 4 = -6 < 0$ e quindi abbiamo un punto di minimo, con $f(-1;-1) = 3$.
Si può risolvere il problema anche per sostituzione. Da $xy = 1$ otteniamo $y = \frac{1}{x}$ e da questa sostituendo si ha $f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x^2 - 2\,\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = 2\,\frac{x^3+1}{x^2} > 0$ per $x > -1$ e quindi si ritrova un punto di minimo in $x = -1$ con $y = -1$.

II M 2) Data la funzione $f(x,y) = x\,e^y - x$, si determini la natura del suo punto stazionario.

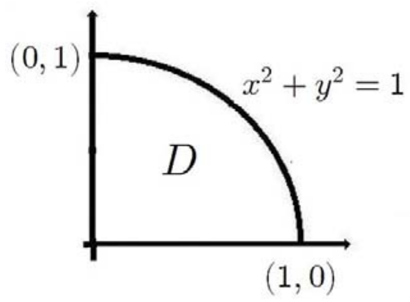
Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = (e^y - 1; x\,e^y)$ per cui:
$\begin{cases} e^y - 1 = 0 \\ x\,e^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e quindi abbiamo un solo punto stazionario: $(0,0)$.
Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 0 & e^y \\ e^y & x\,e^y \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, per cui, da $|\mathbb{H}_2(0,0)| = -1 < 0$ segue che il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + t^2 \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - y = t \\ -x + y' = t^2 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale:
$\begin{Vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t \\ t^2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ t^2 & D \end{vmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(D^2 - 1\right)(x) = (D)(t) + t^2 \Rightarrow x'' - x = 1 + t^2$.
Da $\left(D^2 - 1\right)(x) = 0$ abbiamo $\lambda^2 = 1$ e quindi le soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t}$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $x'' - x = 1 + t^2$ ipotizziamo una soluzione del tipo $x_0(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow x_0'(t) = 2at + b \Rightarrow x_0''(t) = 2a$.
Sostituendo nell'equazione $x'' - x = 1 + t^2$ avremo:
$2a - at^2 - bt - c = -at^2 - bt + 2a - c = 1 + t^2$ da cui si ha :
$\begin{cases} -a = 1 \\ -b = 0 \\ 2a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2a - 1 = -3 \end{cases}$ e quindi avremo per soluzione della non omogenea la $x(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} - t^2 - 3$.
Dalla prima equazione $x' - y = t$ ricaviamo $y = x' - t$ e quindi:
$y(t) = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} - 2t - t$ ed infine:
$y(t) = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} - 3t$ e quindi la soluzione generale del sistema sarà:
$\begin{cases} x(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} - t^2 - 3 \\ y(t) = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} - 3t \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y) = x^2 - y^2$ e data $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1;\ x \ge 0;\ y \ge 0\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1;\ x\ge 0;\ y\ge 0\}$, passando a coordinate polari $\begin{cases} x=\varrho\cos\vartheta \\ y=\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$ si avrà:

$$\iint_D x^2-y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\varrho^2\left(\cos^2\vartheta-\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right)\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\varrho^3\cos 2\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\varrho^4\Big|_0^1\cos 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,2\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\left(\mathrm{sen}\,\pi-\mathrm{sen}\,0\right)=0\,.$$