COMPITO di ANALISI MATEMATICA 10/10/2024

I M 1) Calcolare, usando la forma trigonometrica, $z = \dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^3}$.

Risulta $1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ e quindi:

$(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos 6\,\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,6\,\frac{\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -8i\,;$

$1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$ e quindi:

$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos 3\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,3\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos 3\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,3\frac{7\pi}{4}\right) =$

$(1-i)^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{21\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) =$

$(1-i)^3 = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Avremo infine: $z = \dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^3} = \dfrac{8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)} =$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ e quindi:

$z = \dfrac{(1+i)^6}{(1-i)^3} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\,(1+i)\,.$

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \dfrac{x-y}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari:

$\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \varrho^2\cos^2\vartheta \cdot \frac{\varrho(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos^2\vartheta(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta) = 0\,.$

La convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho\cos^2\vartheta(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta)\right| \leq 2\varrho < \varepsilon$.

La funzione è quindi continua in $(0,0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 \cdot \frac{h-0}{h^2+0} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = 1\,;$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 \cdot \frac{0-h}{0+h^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x^2 \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2} - 0 - (1,0)(x,y)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, ovvero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^3 - y\,x^2}{x^2+y^2} - x\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y\,x^2 - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-\,y\,x^2 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^3\,(\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta)(-\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta)}{\varrho^3} = (\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta)(-\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta) = 0$ solo per particolari valori di ϑ. La funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = e^{x-y} + e^{z-y} - 2xyz = 0 \\ g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xz = 0 \end{cases}$, si verifichi che con esso si può definire nel punto $(1,1,1)$ una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$ e di tale funzione si calcolino poi le derivate $y'(1)$ e $z'(1)$.

Passando al calcolo della matrice Jacobiana avremo:

$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \begin{Vmatrix} e^{x-y} - 2yz & -\,e^{x-y} - e^{z-y} - 2xz & e^{z-y} - 2xy \\ 3x^2 - 3z & 3y^2 & 3z^2 - 3x \end{Vmatrix}$ da cui poi:

$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \begin{Vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$.

Dato che $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3 \neq 0$ si può definire una funzione $x \to (y,z)$ della quale avremo le derivate:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\,\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = -\,\frac{0}{3} = 0\,; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\,\frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = -\,\frac{3}{3} = -\,1\,.$$

I M 4) Data $f(x,y) = e^{x-y}$ si determini almeno una direzione $v = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$ per la quale risulti $\mathcal{D}_v f(0,0) = \mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0)$.

La funzione è differenziabile due volte in tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi avremo:

$\mathcal{D}_v f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0) = v\cdot\mathbb{H}(0,0)\cdot v^T$.

Essendo $\nabla f(x,y) = (e^{x-y};\ -\,e^{x-y}) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1;\ -1)$ e da $v = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$ si ha:

$\mathcal{D}_v f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v = (1;\ -1)\cdot(\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha) = \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha$ ed essendo poi:

$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} e^{x-y} & -\,e^{x-y} \\ -\,e^{x-y} & e^{x-y} \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$ avremo infine:

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0) = \|\cos\alpha \quad \mathrm{sen}\,\alpha\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha \end{Vmatrix} =$$

$$= \|\cos\alpha \quad \mathrm{sen}\,\alpha\| \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha \\ -\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha \end{Vmatrix} = \cos\alpha\,(\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha) + \mathrm{sen}\,\alpha\,(\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha)\,.$$

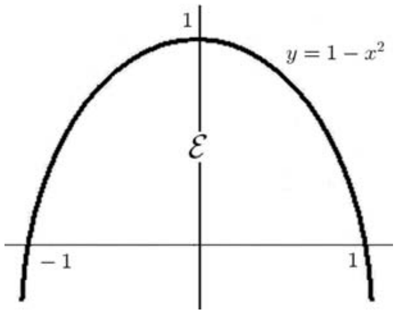
Quindi $\mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0) = \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha - 2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha = 1 - \mathrm{sen}\,2\alpha$.

Si deve determinare almeno una direzione per la quale sia: $\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha = 1 + \mathrm{sen}\,2\alpha$, uguaglianza banalmente vera almeno per $\alpha = 0$.

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y \\ \text{s.v.} \begin{cases} y \le 1 - x^2 \\ 0 \le y \end{cases} \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y - 1 \le 0 \\ -y \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$



La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2x - y - \lambda_1(x^2 + y - 1) - \lambda_2(-y)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \ne 0 \\ \Lambda'_y = -1 \ne 0 \\ x^2 + y \le 1 \\ -y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - \lambda_1 = 0 \\ x^2 + y = 1 \\ -y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda_1} \\ \lambda_1 = -1 \\ x^2 + y = 1 \\ -y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - x^2 = 0 \\ \lambda_1 = -1 \\ 0 \le 0 \text{ vera} \end{cases};$$

il punto $P_1 : (-1; 0)$, con $\lambda_1 = -1 < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \ne 0 \\ \Lambda'_y = -1 + \lambda_2 = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

4) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ dato che $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$, avremo:

$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$. Il punto $(1,0)$ potrebbe essere punto di massimo.

$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$. Il punto $(-1,0)$ potrebbe essere punto di minimo, come già visto in precedenza.

Abbiamo trovato un solo candidato a punto di massimo ed un solo candidato a punto di minimo, e quindi, per il Teorema di Weierstrass, il punto $(1,0)$, con $f(1,0) = 2$ è il punto di massimo mentre il punto $(-1,0)$, con $f(-1,0) = -2$ è il punto di minimo.

Se anche volessimo a studiare la funzione sulla frontiera di $\mathcal{E}$, esaminando i punti del vincolo $y = 1 - x^2$, sostituendo avremo:
$f\big(x, 1 - x^2\big) = 2x - \big(1 - x^2\big) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 > 0$ per $x > -1$ ovvero la funzione è crescente su quel tratto di frontiera, e quindi $x = -1$ è punto di minimo mentre $x = 1$ è punto di massimo.
Se $y = 0$ avremo $f(x,0) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0\ \forall x$ ovvero funzione sempre crescente e considerazioni identiche al caso precedente.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' \cdot \log y = xy \\ y(0) = e \end{cases}$.

Equazione differenziale a variabili separabili. Posto $y \neq 0$ avremo:
$y' \cdot \dfrac{\log y}{y} = x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\log y}{y}\, y'\,\mathrm{d}x = \int \frac{\log y}{y}\,\mathrm{d}y = \int \log y \,\mathrm{d}(\log y) = \int x\,\mathrm{d}x + k \Rightarrow$
$\dfrac{1}{2}\log^2 y = \dfrac{1}{2}x^2 + k \Rightarrow \log^2 y = x^2 + m \Rightarrow \log y = \pm\sqrt{x^2 + m}$ avendo posto $m = 2k$.
Vista la condizione $y(0) = e$ scegliamo la soluzione di segno negativo ed avremo:
$y = e^{\sqrt{x^2+m}}$. Posto $y(0) = e$ otteniamo subito $m = k = 0$.

II M 3) Risolvere il sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y \end{cases}$.

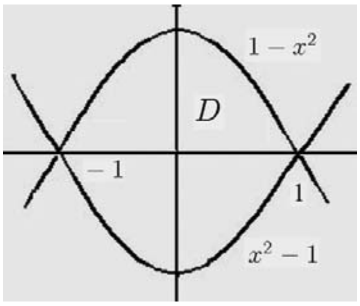
Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x - y = 0 \\ -x + y' - y = 0 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale: $\begin{Vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix}(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \big((D-1)^2 - 1\big)(x) = \big(D^2 - 2D\big)(x) = D(D-2)(x) = 0 \Rightarrow x'' - 2x' = 0$.
Da $D(D-2)(x) = 0$ abbiamo le soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 + c_2\, e^{2t}$.
Dalla prima equazione $x' = x + y$ ricaviamo $y = x' - x$ e quindi:
$y(t) = 0 + 2c_2\, e^{2t} - c_1 - c_2\, e^{2t} = -c_1 + c_2\, e^{2t}$

e quindi la soluzione generale del sistema sarà:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2\, e^{2t} \\ y(t) = -\, c_1 + c_2\, e^{2t} \end{cases}.$$

II M 4) Data $f(x,y) = x + y$ e data la regione $D = \{(x,y) : x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$, calcolare $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



$D = \{(x,y) : x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$, si avrà:

$$\iint_D x + y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} (x+y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(xy + \frac{1}{2}\, y^2 \right|_{x^2-1}^{1-x^2} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^2 - \left(x\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)^2 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(1 - x^2\right) + x\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x\left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2x - 2x^3 \mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{1}{2}\, x^4 \right|_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0\,.$$