COMPITO di MATEMATICA GENERALE 10/09/2024

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x - \log x$.

C.E.: $x > 0$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{x\to 0^+} x - \log x = (\to 0 - (-\infty)) = +\infty$;

$\lim_{x\to +\infty} x - \log x = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\log x}{x}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$.

C'è un asintoto verticale in $x = 0$ solo sulla destra.

Per valutare l'eventuale presenza di un asintoto obliquo dobbiamo calcolare

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x - \log x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{\log x}{x}\right) = (1-0) = 1$.

Quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo con $m = 1$.

Occorre quindi ora calcolare:

$\lim_{x\to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to +\infty} x - \log x - x = \lim_{x\to +\infty} -\log x = -\infty$

e quindi non ci sono asintoti obliqui.

$f(x) = x - \log x > 0 \Rightarrow x > \log x$: vera $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

La funzione è sempre strettamente positiva.

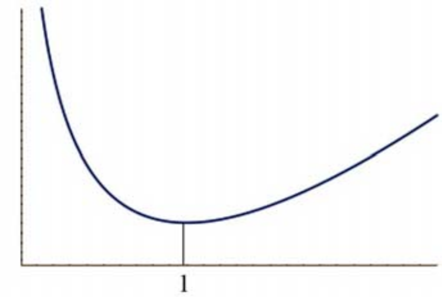
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow x > 1$;

quindi la funzione è decrescente per $0 < x < 1$, crescente per $x > 1$.

Quindi in $x = 1$, con $f(1) = 1$ abbiamo un punto di minimo.

Da $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ segue $f''(x) = 0 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ e quindi la funzione è sempre convessa.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\log(1+2x)}$; $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{1-x}$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{2x} \cdot \frac{2x}{\log(1+2x)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{1-x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{(1+x)+1}{1+x}\right)^{1-x} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^{1+x}\right]^{\frac{1-x}{1+x}} =$

$= \lim_{t\to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{\lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{1+x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

3) Date le funzioni $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = e^x$ e $h(x)$, si determini l'espressione di $h(x)$ sapendo che risulta $f(g(h(x))) = 2^x - 1$.

Da $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = e^x$ segue $f(g(x)) = 3e^x + 1$ e quindi:
$f(g(h(x))) = 3e^{h(x)} + 1$. Da $f(g(h(x))) = 3e^{h(x)} + 1 = 2^x - 1$ segue $3e^{h(x)} = 2^x - 2$ da cui: $e^{h(x)} = \frac{2^x - 2}{3}$ da cui infine $h(x) = \log \frac{2^x - 2}{3}$.

4) Determinare il Campo di esistenza della funzione $f(x) = \log\left(\frac{e^x - 2}{e^x - 1}\right)$ e calcolare poi il limite nei suoi punti di frontiera.

Dobbiamo imporre $\frac{e^x - 2}{e^x - 1} > 0 \Rightarrow \left\langle \begin{smallmatrix} e^x - 2 > 0 \\ e^x - 1 > 0 \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{smallmatrix} e^x > 2 \\ e^x > 1 \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{smallmatrix} x > \log 2 \\ x > 0 \end{smallmatrix} \right.$ e quindi:

	0	$\log 2$
$-\ -\ -$	$-\ -\ -$	$+\ +\ +$
$-\ -\ -$	$+\ +\ +$	$+\ +\ +$
$(+)$	$(-)$	$(+)$

per cui sarà *C.E.*: $x < 0 \cup \log 2 < x$ ovvero *C.E.*: $]-\infty; 0[\cup]\log 2; +\infty[$.

5) Calcolare $\int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k = 0)$, e avremo:
$\int \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \log x + \frac{1}{x}$ e quindi:
$\int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left(\log x + \frac{1}{x}\right|_1^2 = \left[\log 2 + \frac{1}{2}\right] - [\log 1 + 1] = \log 2 - \frac{1}{2}$.

6) Data la funzione $f(x) = \log(x - 3)$ si determini il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $y = -7x - 1$, determinando poi l'equazione di tale retta tangente.

L'equazione della retta tangente nel punto $x = x_0$ è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Per avere rette perpendicolari occorre che le due rette abbiano coefficienti angolari che sono uno l'opposto del reciproco dell'altro: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Dato che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione è dato dalla derivata calcolata nel punto, dovrà risultare $f'(x_0) = -\frac{1}{-7} = \frac{1}{7}$ e quindi, essendo $f'(x) = \frac{1}{x - 3} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{x_0 - 3}$, dovrà essere: $f'(x_0) = \frac{1}{x_0 - 3} = \frac{1}{7} \Rightarrow x_0 - 3 = 7 \Rightarrow x_0 = 10$.

7) Data la funzione $f(x, y) = x^2 - 2xy + y - y^2$, determinare la natura del suo punto stazionario.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x, y) = \left(f'_x, f'_y\right) = (2x - 2y; 1 - 2x - 2y)$ per cui:

$$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x=1 \end{cases} \text{ da cui: } \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Abbiamo un solo punto stazionario: $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\mathbb{H}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\left\|\begin{matrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{matrix}\right\|$, per cui:

$\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right|=-4-4=-8<0$, il punto $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ è un punto di sella.

8) Dati i vettori $\mathbb{X}_1=(1,1,m)$ e $\mathbb{X}_2=(2,k,4)$, sia $\mathbb{A}$ la matrice avente $\mathbb{X}_1$ ed $\mathbb{X}_2$ come righe e sia $\mathbb{Y}=(1,-1,1)$. Si determinino i valori di m e k per cui $\mathbb{A}\cdot\mathbb{Y}$ dà per risultato il vettore nullo.

Sarà $\mathbb{A}\cdot\mathbb{Y}=\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & m \\ 2 & k & 4 \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 1-1+m \\ 2-k+4 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} m \\ 6-k \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\|\Rightarrow\begin{cases} m=0 \\ k=6 \end{cases}.$

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $\mathbb{P}_1\Rightarrow\mathbb{P}_2$ con $\mathbb{P}_1:(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}_2:\mathbb{A}\Leftrightarrow non\,\mathbb{C}$, nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$ sia vera.

Dato che la proposizione $\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$ risulta vera, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ saranno o contemporaneamente vere o contemporaneamente false, mentre $\mathbb{C}$ potrà essere sia vera che falsa, e quindi la tavola di verità diviene la seguente, ricordando che $\mathbb{P}_1:(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}_2:\mathbb{A}\Leftrightarrow non\,\mathbb{C}$:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A}e\mathbb{B}$	$\mathbb{B}o\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}e\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}o\mathbb{C})$	$non\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\Leftrightarrow non\,\mathbb{C}$	$\mathbb{P}_1\Rightarrow\mathbb{P}_2$
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0

10) Determinare l'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado per la funzione $f(x)=e^{3x}-e^{2x}+e^{x}$.

La funzione è derivabile almeno due volte in tutto il suo campo di esistenza.
L'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado di una funzione $f(x)$ è data da : $\mathbb{P}_2(x;0)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2=f(0)+f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(0)\,x^2$ da cui poi la formula: $f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(0)\,x^2+o(x^2)$. Sarà quindi:
$f(x)=e^{3x}-e^{2x}+e^{x}\Rightarrow f(0)=1-1+1=1$;
$f'(x)=3e^{3x}-2e^{2x}+e^{x}\Rightarrow f'(0)=3-2+1=2$;
$f''(x)=9e^{3x}-4e^{2x}+e^{x}\Rightarrow f''(0)=9-4+1=6$ e quindi avremo:
$\mathbb{P}_2(x;0)=1+2x+\frac{1}{2}\cdot 6\,x^2=1+2x+3x^2$ da cui anche:
$f(x)=e^{3x}-e^{2x}+e^{x}=1+2x+3x^2+o(x^2)$.