COMPITO di ANALISI MATEMATICA 11/01/2024

I M 1) Se $z = 1 - \sqrt{3}\,i$, calcolare $\sqrt{z^3}$.

Da $z = 1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$ risulta:
$z^3 = 2^3\left(\cos 5\pi + i\,\text{sen}\,5\pi\right) = 8\left(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi\right) = -8$.
Per cui: $\sqrt{z^3} = \sqrt{-8} = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)\right)$, $0 \le k \le 1$ ovvero
$\sqrt{z^3} = \sqrt{-8} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)$, $0 \le k \le 1$ e quindi
se $k = 0 : 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,i$;
se $k = 1 : 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,(-i) = -2\sqrt{2}\,i$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$, si calcoli, usando la definizione, $\mathcal{D}_v f(0,0)$, dove v è il versore di $(1,1)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^3\cos^3\vartheta}{\varrho^2} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\cos^3\vartheta = 0$; la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho\cos^3\vartheta\right| \le \varrho < \varepsilon$, soddisfatta per $0 < \varrho < \varepsilon$. La funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^3}{h^2+0} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = 1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0}{0+h^2} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 - (1,0)\cdot(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\text{, ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^3 - x\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ e quindi se}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{-\varrho^3\cos\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^3} = \lim_{\varrho\to 0}\left(-\cos\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta\right) = \left(-\cos\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta\right);$$

il limite risulta uguale a zero solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Per calcolare $\mathcal{D}_v f(0,0)$, dove v è il versore di $(1,1)$, dato che la funzione in $(0,0)$ non è risultata differenziabile, bisogna usare la definizione, ovvero calcolare:

$\mathcal{D}_v f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t}$ dove $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e quindi

$$\mathcal{D}_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{2\sqrt{2}\,t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Quindi $\mathcal{D}_v f(0,0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^4 y - y^3 x = 0$ ed il punto $P_0 = (1,1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x \to y(x)$ da questa definita.

Dato il gradiente : $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 y - y^3; x^4 - 3y^2 x\right)$ da cui $\nabla f(1,1) = (3;\, -2)$;
essendo $f'_y = -2 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $x \to y(x)$ con derivata prima:
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2}$.

Sarà poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 12x^2 y & 4x^3 - 3y^2 \\ 4x^3 - 3y^2 & -6yx \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} 12 & 1 \\ 1 & -6 \end{Vmatrix}$ per cui, dalla

$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(1) = -\dfrac{f''_{xx} + 2\, f''_{xy}\,(y') + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ avremo :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(1) = -\frac{12 + 2\cdot\frac{3}{2} - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \frac{15 - \frac{27}{2}}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

Quindi $P_2(x,1) = 1 + \dfrac{3}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}(x-1)^2 = 1 + \dfrac{3}{2}(x-1) + \dfrac{3}{8}(x-1)^2$.

I M 4) Data $f(x,y) = e^x - e^y$, sia v il versore di $(1,1)$. Si verifichi che se in un punto (x,y) risulta $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, allora risulta anche $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = 0$.

La funzione $f(x,y) = e^x - e^y$ è ovunque differenziabile due volte, ed avremo quindi:

$\mathcal{D}_v f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot v = (e^x,\, -e^y)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^x - e^y)$ e pure

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = v\cdot\mathbb{H}(x,y)\cdot v^T = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^x & 0 \\ 0 & -e^y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}(e^x - e^y)\,.$$

Se $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, allora $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e^x - e^y) = 0$ ovvero $e^x - e^y = 0$ e quindi risulterà pure:

$\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^y) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, il vincolo è qualificato, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda) = x + y - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda = 0$:
$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \neq 0 \\ \Lambda'_y = 1 \neq 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}$ e quindi il sistema non ammette soluzioni.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + 4\frac{1}{64\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + 4\frac{1}{64\lambda^2} = \frac{5}{16\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} .$$

Avendo trovato due sole soluzioni, per il Teorema di Weierstrass una ci da il punto di massimo e l'altra il punto di minimo. Essendo $f(x, y) = x + y$ risulta $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ mentre $f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ e quindi $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ risulta il punto di massimo assoluto mentre $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ risulta il punto di minimo assoluto.

II M 2) Data $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$, studiare la natura dei suoi punti stazionari.

La funzione, essendo un polinomio, è differenziabile di ogni ordine in tutto $\mathbb{R}^2$.
Imponendo le condizioni del I ordine avremo:
$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 + 3y^2 - 6x, 6xy - 6y\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 6y(x-1) = 0 \end{cases}$ e quindi:
$\begin{cases} 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ oppure
$\begin{cases} 3y^2 - 3 = 3(y^2 - 1) = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.
Abbiamo quindi quattro punti stazionari: $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$.
Essendo $\mathbb{H}(x, y) = \left\| \begin{matrix} 6x - 6 & 6y \\ 6y & 6x - 6 \end{matrix} \right\|$ risulterà:
$\mathbb{H}(0,0) = \left\| \begin{matrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -6 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \end{cases}$ per cui $(0,0)$ è punto di massimo;

$\mathbb{H}(2,0) = \begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \end{cases}$ per cui $(0,2)$ è punto di minimo;

$\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -36 < 0$ per cui $(1,1)$ è punto di sella;

$\mathbb{H}(1,-1) = \begin{Vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -36 < 0$ per cui $(1,-1)$ è punto di sella.

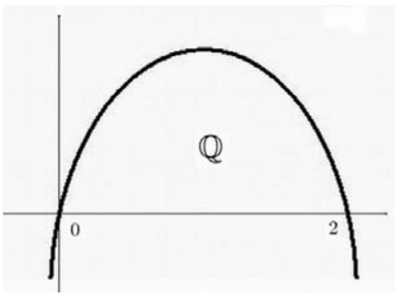
II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 2e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

Da $y'' - 4y' + 3y = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$ e quindi le due soluzioni $\lambda = 3$ e $\lambda = 1$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $y(x)$ sarà: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2\, e^x$.
Dato che il termine noto $y = 2e^x$ compare anche tra le componenti della soluzione generale, per trovare la soluzione particolare dell'equazione non omogenea dobbiamo vedere la soluzione $\lambda = 1$ come una soluzione doppia e quindi ipotizzare una soluzione particolare del tipo $y = ae^x + bxe^x$ da cui avremo: $y' = ae^x + be^x + bxe^x = (a+b)e^x + bxe^x$ e da questa: $y'' = (a+b)e^x + be^x + bxe^x = (a+2b)e^x + bxe^x$. Andando a sostituire si ha:
$(a+2b)e^x + bxe^x - 4\left((a+b)e^x + bxe^x\right) + 3(ae^x + bxe^x) = -2be^x = 2e^x \Rightarrow b = -1$.
La soluzione generale della non omogenea sarà quindi $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2\, e^x - xe^x$.
Imponendo le condizioni, da $\begin{cases} y(x) = c_1 e^{3x} + c_2\, e^x - xe^x \\ y'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2\, e^x - e^x - xe^x \end{cases}$ otteniamo:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = 3c_1 + c_2 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ 3c_1 + 1 - c_1 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare del problema: $y(x) = -\dfrac{1}{2} e^{3x} + \dfrac{3}{2}\, e^x - xe^x$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 2x - x^2\right\}$.



Vista la regione di integrazione:
$\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 2x - x^2\right\}$ avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{2x-x^2} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x-x^2} \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 x \, \frac{(2x-x^2)^2}{2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 x \left(2x^2 + \frac{x^4}{2} - 2x^3 \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 2x^3 + \frac{x^5}{2} - 2x^4 \,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\, x^4 + \frac{1}{12}\, x^6 - \frac{2}{5}\, x^5 \right|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,16 + \frac{1}{12}\,64 - \frac{2}{5}\,32 = 8 + \frac{16}{3} - \frac{64}{5} \; = \frac{120 + 80 - 192}{15} = \frac{8}{15}\,.$$