Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA 19/11/2024

I M 1) Calcolare le radici terze del numero $e^{\log 8+\frac{3}{4}\pi i}$, limitandosi ad esprimerle in forma trigonometrica.

Da $z = e^{\log 8+\frac{3}{4}\pi i} = e^{\log 8} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = 8 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$ segue

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2$$ e quindi:

se $k = 0 : 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$;

se $k = 1 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right)$;

se $k = 2 : 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, si verifichi se risulta continua e poi anche differenziabile in $(0,0)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\,|\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta|}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\,|\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta| = 0\,;$$

la convergenza è uniforme dato che $|\varrho\,|\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta|| \le \varrho < \varepsilon$, soddisfatta per $\varrho < \varepsilon$. La funzione è continua in $(0,0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{|h\cdot 0|}{\sqrt{h^2+0}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{|0\cdot h|}{\sqrt{0+h^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0$$ ovvero se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)\cdot(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\,|\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta|}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta| = |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta|\,;$$

il limite vale 0 solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x,y)=x^3+y^3$ ed il versore u del vettore $(1,1)$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulta: $\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x,y)=3\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{u,u} f(x,y)=0 \end{cases}$.

La funzione, essendo un polinomio, risulta differenziabile due volte ovunque.
Da $(1,1)$ si ha $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dal gradiente $\nabla f(x,y)=\left(3x^2;3y^2\right)$ otteniamo:
$\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{Vmatrix}$. Quindi sarà:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(3x^2;3y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{u,u} f(x,y)=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \frac{6x}{\sqrt{2}} \\ \frac{6y}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}=0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{3y^2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2} \\ 3x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2=6 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x^2=2 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=-x \end{cases}$$

e quindi le due soluzioni

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

I M 4) Determinare se con l'equazione $f(x,y)=x^2\cdot\log y+y\,e^x-x=1$, soddisfatta nel punto $P=(0,1)$, è possibile definire una funzione implicita. In caso affermativo, calcolarne le derivate prima e seconda. Che tipo di punto viene determinato ?

Da $\nabla f(x,y)=\left(2x\cdot\log y+y\,e^x-1;x^2\cdot\frac{1}{y}+e^x\right)$ si ha $\nabla f(0,1)=(0;1)$ ed essendo $f'_y(0,1)=1\neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y=y(x)$.
Risulta $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)=-\dfrac{0}{1}=0$ e quindi il punto $x=0$ risulta un punto stazionario.
Essendo $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix} 2\log y+y\,e^x & 2x\cdot\frac{1}{y}+e^x \\ 2x\cdot\frac{1}{y}+e^x & -\frac{x^2}{y^2} \end{Vmatrix}$ per cui $\mathbb{H}(0,1)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Dalla:
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{f''_{xx}+2\,f''_{xy}\,(y')+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0)=-\dfrac{1+2\cdot 1\cdot(0)+0\cdot(0)^2}{1}$ e quindi $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0)=-1<0$ per cui il punto $x=0$ risulta un punto di massimo.

I M 5) Verificare se con il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=xy+xz-2yz=0 \\ g(x,y,z)=2xyz-x^2z-y^3z=0 \end{cases}$ si può definire, in un intorno di $P(1,1,1)$, una funzione in forma implicita. Se ciò è possibile, definire tale funzione e calcolarne le derivate prime.

Calcoliamo la matrice Jacobiana :
$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}=\begin{Vmatrix} y+z & x-2z & x-2y \\ 2yz-2xz & 2xz-3y^2z & 2xy-x^2-y^3 \end{Vmatrix}$ da cui:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \left\|\begin{matrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Occorre quindi trovare un minore di ordine 2 che abbia il determinante diverso da 0.

Dato che $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ mentre $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ e $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, in base al Teorema del Dini si possono definire una funzione implicita $x \to (y,z)$ oppure una funzione implicita $z \to (x,y)$. Non si può definire una funzione implicita $y \to (x,z)$.

Se scegliamo la funzione implicita $x \to (y,z)$ avremo:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1;1) = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{-1} = 0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1;1) = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{-1} = 2.$$

Se scegliamo invece la funzione implicita $z \to (x,y)$ avremo:

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1;1) = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}(1;1) = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{-2} = 0.$$