$\boxed{\text{Prova Intermedia Anno 2024- Compito } \mathbb{A}1}$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x+x^2}{1+2x+x^3}\right)^{\frac{1-x^2}{x}}\ .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{9x^2}\cdot\frac{9x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 1=\frac{9}{2}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x+x^2}{1+2x+x^3}\right)^{\frac{1-x^2}{x}}=(\to 0^+)^{(\to-\infty)}=e^{(\to-\infty)(\to-\infty)}=+\infty\,.$$

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{x}\right)$ e $g(x)=2x-1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(x))=f(2x-1)=\log\left(\frac{1+2x-1}{2x-1}\right)=\log\left(\frac{2x}{2x-1}\right).$$

$$g(f(x))=g\left(\log\left(\frac{1+x}{x}\right)\right)=2\log\left(\frac{1+x}{x}\right)-1=2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\,.$$

Ora determiniamo le funzioni inverse.

Da $\log\left(\frac{2x}{2x-1}\right)=y\Rightarrow\frac{2x}{2x-1}=e^y\Rightarrow 2x=e^y(2x-1)\Rightarrow 2x\,e^y-2x=e^y\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=\frac{e^y}{e^y-1}\Rightarrow x=\frac{e^y}{2(e^y-1)}$ e quindi la funzione inversa: $y=\frac{e^x}{2(e^x-1)}$.

Da $2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1=y\Rightarrow 2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=y+1\Rightarrow\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{y+1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{x}=e^{\frac{y+1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{x}=e^{\frac{y+1}{2}}-1\Rightarrow x=\frac{1}{e^{\frac{y+1}{2}}-1}$ e quindi la funzione inversa:

$y=\frac{1}{e^{\frac{x+1}{2}}-1}$.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+kx)}{3x}=3$.

Risulta $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+kx)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+kx)}{kx}\cdot\frac{kx}{3x}=1\cdot\frac{k}{3}=3\Rightarrow k=9$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{C}\,e\,non\,\mathbb{A})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ sia falsa.

Posto $P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ e $P_2:\mathbb{C}\,e\,non\,\mathbb{A}$, dato che per ipotesi $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ è falsa, dovremo nella tavola di verità considerare solo le righe nelle quali $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ hanno diverso stato di verità, ovvero se una è vera l'altra è falsa e viceversa. La $\mathbb{B}$ può essere invece sia vera che falsa.

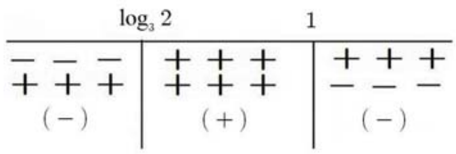
Quindi avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$non\, \mathbb{A}$	$P_2 : \mathbb{C}\, e\, non\, \mathbb{A}$	$P_1\, o\, P_2$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

La proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, o\, (\mathbb{C}\, e\, non\, \mathbb{A})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ è vera mentre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono false. Negli altri casi è vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \log\left(\dfrac{3^x - 2}{1 - x}\right)$.

Dobbiamo imporre $\dfrac{3^x - 2}{1 - x} > 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 3^x - 2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 3^x > 2 \\ x < 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x > \log_3 2 \\ x < 1 \end{array} \right.$



e quindi $\mathcal{C.E.}$: $]\log_3 2; 1[$ ovvero $\log_3 2 < x < 1$.

Prova Intermedia Anno 2024- Compito $\mathbb{B}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\log(1-x)} \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - 3x + 2x^2}{1 + 2x + 3x^2}\right)^{1-x} .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\log(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + (-x))^{\frac{1}{2}} - 1}{-x} \cdot \frac{-x}{\log(1 + (-x))} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - 3x + 2x^2}{1 + 2x + 3x^2}\right)^{1-x} = \left(\to \frac{2}{3}\right)^{(\to -\infty)} = +\infty .$$

2) Date le funzioni $f(x) = \log\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ e $g(x) = 3x - 1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(x)) = f(3x - 1) = \log\left(\frac{3x - 1 + 2}{3x - 1}\right) = \log\left(\frac{3x + 1}{3x - 1}\right) .$$

$$g(f(x)) = g\left(\log\left(\frac{x+2}{x}\right)\right) = 3\log\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1 = 3\log\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 1 .$$

Ora determiniamo le funzioni inverse. Da:

$$\log\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right) = y \Rightarrow \frac{3x+1}{3x-1} = e^y \Rightarrow 3x + 1 = e^y(3x - 1) \Rightarrow 3x\, e^y - 3x = 1 + e^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{1 + e^y}{e^y - 1} \Rightarrow x = \frac{1 + e^y}{3(e^y - 1)}$$ e quindi la funzione inversa: $y = \dfrac{1 + e^x}{3(e^x - 1)}$.

Da $3\log\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) - 1 = y \Rightarrow 3\log\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = y + 1 \Rightarrow \log\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{y+1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\dfrac{2}{x}=e^{\frac{y+1}{3}} \Rightarrow \dfrac{2}{x}=e^{\frac{y+1}{3}}-1 \Rightarrow x=\dfrac{2}{e^{\frac{y+1}{3}}-1}$ e quindi la funzione inversa: $y=\dfrac{2}{e^{\frac{x+1}{3}}-1}$.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{kx^2}=5$.

Risulta $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{kx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{k^2x^2}\cdot k=\dfrac{1}{2}\cdot k=5 \Rightarrow k=10$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C})\, e\, (non\,\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ sia vera.

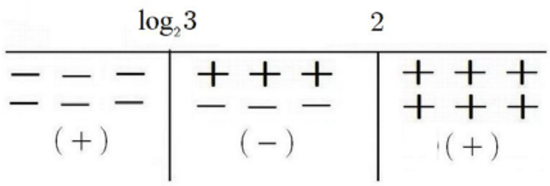
Posto $P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C}$ e $P_2: non\,\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C}$, dato che per ipotesi $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ è vera, dovremo nella tavola di verità considerare solo le righe nelle quali $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ hanno lo stesso stato di verità, ovvero dove ambedue sono vere e dove ambedue sono false. La $\mathbb{C}$ può essere invece sia vera che falsa.
Quindi avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C}$	$non\,\mathbb{B}$	$P_2: non\,\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C}$	$P_1\, e\, P_2$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

La proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C})\, e\, (non\,\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono vere mentre $\mathbb{C}$ è falsa. Negli altri casi è vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\log\left(\dfrac{2^x-3}{x-2}\right)$.

Dobbiamo imporre $\dfrac{2^x-3}{x-2}>0 \Rightarrow \left\langle\begin{matrix}2^x-3>0\\ x-2>0\end{matrix}\right. \Rightarrow \left\langle\begin{matrix}2^x>3\\ x>2\end{matrix}\right. \Rightarrow \left\langle\begin{matrix}x>\log_2 3\\ x>2\end{matrix}\right.$



e quindi $\mathcal{C.E.}:\ ]-\infty;\log_2 3[\,\cup\,]2;+\infty[$ ovvero $x<\log_2 3\cup 2<x$.

$\boxed{\text{Prova Intermedia Anno 2024- Compito }\mathbb{C}1}$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{\operatorname{sen} 3x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{1+x^3}\right)^{1+x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\operatorname{sen}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen}3x}=\log 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}\cdot\log 3=\log 3^{\frac{2}{3}}=\log\sqrt[3]{9}\,.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x^2}{1+x^3}\right)^{1+x^2}=(\to 0^+)^{(\to+\infty)}=e^{(\to+\infty)(-\infty)}=e^{(\to-\infty)}=0^+\,.$$

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\frac{x+1}{2x}\right)$ e $g(x)=2x-1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(x))=f(2x-1)=\log\left(\frac{2x-1+1}{2(2x-1)}\right)=\log\left(\frac{2x}{4x-2}\right)=\log\left(\frac{x}{2x-1}\right).$$
$$g(f(x))=g\left(\log\left(\frac{x+1}{2x}\right)\right)=2\log\left(\frac{x+1}{2x}\right)-1=2\log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)-1\,.$$
Ora determiniamo le funzioni inverse. Da:
$$\log\left(\frac{x}{2x-1}\right)=y\Rightarrow\frac{x}{2x-1}=e^y\Rightarrow x=e^y(2x-1)\Rightarrow 2x\,e^y-x=e^y\Rightarrow$$
$\Rightarrow x\,(2e^y-1)=e^y\Rightarrow x=\frac{e^y}{2e^y-1}$ e quindi la funzione inversa: $y=\frac{e^x}{2e^x-1}$.

Da $2\log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)-1=y\Rightarrow 2\log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)=y+1\Rightarrow\log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)=\frac{y+1}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}=e^{\frac{y+1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{2x}=e^{\frac{y+1}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{2e^{\frac{y+1}{2}}-1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2e^{\frac{y+1}{2}}-1}$ e quindi la funzione inversa: $y=\frac{1}{2e^{\frac{x+1}{2}}-1}$.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x\to 0}\frac{(1+kx)^2-1}{2x}=4$.

Risulta $\lim_{x\to 0}\frac{(1+kx)^2-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+kx)^2-1}{kx}\cdot\frac{kx}{2x}=2\cdot\frac{k}{2}=4\Rightarrow k=4$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})\Rightarrow(non\,\mathbb{C}\,o\,\mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ sia falsa.

Posto $P_1:\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$ e $P_2: non\,\mathbb{C}\,o\,\mathbb{B}$, dato che per ipotesi $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ è falsa, dovremo nella tavola di verità considerare solo le righe nelle quali $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ hanno diverso stato di verità, ovvero se una è vera l'altra è falsa e viceversa. La $\mathbb{C}$ può essere invece sia vera che falsa.
Quindi avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{C}$	$P_2: non\,\mathbb{C}\,o\,\mathbb{B}$	$P_1\Rightarrow P_2$
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1

La proposizione $(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})\Rightarrow(non\,\mathbb{C}\,o\,\mathbb{B})$ risulta quindi sempre vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{3-e^x}}$.

Dobbiamo imporre $\dfrac{x+1}{3-e^x} \geq 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x+1 \geq 0 \\ 3-e^x > 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x \geq -1 \\ e^x < 3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x \geq -1 \\ x < \log 3 \end{matrix} \right.$

	-1	$\log 3$
$-\ -\ -$	$+\ +\ +$	$+\ +\ +$
$+\ +\ +$	$+\ +\ +$	$-\ -\ -$
$(-)$	$(+)$	$(-)$

e quindi $\mathcal{C.E.}$: $[-1;\log 3[$ ovvero $-1 \leq x < \log 3$.

Prova Intermedia Anno 2024- Compito $\mathbb{D}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\text{sen}(x^2-x)}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x+3x^2}{2-x+2x^2}\right)^{2-x}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\text{sen}(x^2-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{\text{sen}(x^2-x)} = 1\cdot 0\cdot 1 = 0 \text{ in quanto:}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1} = 0\,.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x+3x^2}{2-x+2x^2}\right)^{2-x} = \left(\to\frac{3}{2}\right)^{(\to-\infty)} = 0^+\,.$$

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)$ e $g(x)=x+2$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(x)) = f(x+2) = \log\left(\frac{2(x+2)-1}{x+2}\right) = \log\left(\frac{2x+3}{x+2}\right).$$
$$g(f(x)) = g\left(\log\left(\frac{2x-1}{x}\right)\right) = \log\left(\frac{2x-1}{x}\right)+2 = \log\left(2-\frac{1}{x}\right)+2\,.$$

Ora determiniamo le funzioni inverse. Da:

$$\log\left(\frac{2x+3}{x+2}\right) = y \Rightarrow \frac{2x+3}{x+2} = e^y \Rightarrow 2x+3 = e^y(x+2) \Rightarrow x\,e^y - 2x = 3-2e^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\,(e^y-2) = 3-2e^y \Rightarrow x = \frac{3-2e^y}{e^y-2} \text{ e quindi la funzione inversa: } y = \frac{3-2e^x}{e^x-2}\,.$$

Da $\log\left(2-\dfrac{1}{x}\right)+2 = y \Rightarrow \log\left(2-\dfrac{1}{x}\right) = y-2 \Rightarrow 2-\dfrac{1}{x} = e^{y-2} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = 2-e^{y-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2-e^{y-2}} \text{ e quindi la funzione inversa: } y = \frac{1}{2-e^{x-2}}\,.$$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-e^{kx}}{x} = 0$.

Risulta :

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-e^{kx}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}-\frac{e^{kx}-1}{kx}\cdot k=\log 3-1\cdot k=\log 3-k=0\Rightarrow k=\log 3\,.$$

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C})\,o\,(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ sia vera.

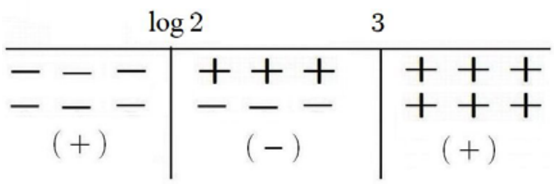
Posto $P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C}$ e $P_2: non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$, dato che per ipotesi $(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ è vera, dovremo nella tavola di verità considerare solo le righe nelle quali $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ hanno lo stesso stato di verità, ovvero dove ambedue sono vere e dove ambedue sono false. La $\mathbb{A}$ può essere invece sia vera che falsa. Quindi avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C}$	$non\,\mathbb{A}$	$P_2: non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$	$P_1\,o\,P_2$
1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

La proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C})\,o\,(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})$ è falsa quando $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono false mentre $\mathbb{A}$ è vera. Negli altri casi è vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-2}{x-3}}$.

Dobbiamo imporre $\dfrac{e^x-2}{x-3}\geq 0\Rightarrow\begin{cases}e^x-2\geq0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x\geq2\\x>3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\log 2\\x>3\end{cases}$



e quindi $\mathcal{C.E.}:\ ]-\infty;\log 2]\cup]3;+\infty[$ ovvero $x\leq\log 2\cup 3<x$.