Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{A}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,(3x+x^2)}{\text{sen}\,(2x-x^2)}$; $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4+3x}{3+3x}\right)^{2x-1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,(3x+x^2)}{\text{sen}\,(2x-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,(3x+x^2)}{3x+x^2} \cdot \frac{3x+x^2}{2x-x^2} \cdot \frac{2x-x^2}{\text{sen}\,(2x-x^2)} = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}\,.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4+3x}{3+3x}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3+3x+1}{3+3x}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3+3x}\right)^{3+3x}\right]^{\frac{2x-1}{3+3x}} = e^{\frac{2}{3}}\,.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 2^{x-1}$ e che $f(g(x)) = 3x-5$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

Da $f(g(x)) = 2^{g(x)-1} = 3x-5 \Rightarrow g(x)-1 = \log_2(3x-5) \Rightarrow g(x) = \log_2(3x-5)+1$.
Ora determiniamo la funzione inversa di $g(x)$. Da:
$\log_2(3x-5)+1 = y \Rightarrow \log_2(3x-5) = y-1 \Rightarrow 3x-5 = 2^{y-1} \Rightarrow 3x = 2^{y-1}+5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{2^{y-1}+5}{3}$ e quindi la funzione inversa: $y = \frac{2^{x-1}+5}{3}$.

3) Data la funzione $f(x) = 2^{3x-1}-k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,6)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3 ?

Determiniamo il punto in cui la funzione taglia l'asse delle ascisse ponendo:
$f(x) = 2^{3x-1}-k = 0 \Rightarrow 2^{3x-1} = k \Rightarrow 3x-1 = \log_2 k \Rightarrow x = \frac{\log_2 k+1}{3}$.
Sarà quindi Area $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\log_2 k+1}{3} = \log_2 k+1 = 3 \Rightarrow \log_2 k = 2 \Rightarrow k = 2^2 = 4$.

4) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{2-\log_2(2-x)}$.

Dovranno essere soddisfatte le due condizioni: $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2-\log_2(2-x)\geq 0 \end{cases}$ da cui si ha:
$\begin{cases} x<2 \\ \log_2(2-x)\leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ 2-x\leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\geq -2 \end{cases}$ e quindi $\mathcal{C.E.} = [-2;2[$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow non\,\mathbb{B})\; o\; (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$, determinare sa la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Posto $\mathbb{P}_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow non\,\mathbb{B}$ e $\mathbb{P}_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$ dobbiamo verificare se $\mathbb{P}_1\, o\, \mathbb{P}_2$ risulti una tautologia.
Costruendo la tavola di verità avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{P}_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{P}_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$	$\mathbb{P}_1\ o\ \mathbb{P}_2$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Come si vede dall'ultima colonna, la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow non\,\mathbb{B})\, o\, (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ risulta una tautologia.

$\boxed{\text{Prova Intermedia Anno 2024-Compito } \mathbb{B}2}$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+\operatorname{sen} 2x)}{\operatorname{tg} 3x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3+2x}{2+2x}\right)^{3x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} 2x)}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} 2x)}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{3x} \cdot \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}\,.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3+2x}{2+2x}\right)^{3x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2+2x+1}{2+2x}\right)^{3x} = \lim_{x\to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2+2x}\right)^{2+2x}\right]^{\frac{3x}{2+2x}} = e^{\frac{3}{2}}\,.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 3^{x+1}$ e che $f(g(x)) = 5x+2$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

Da $f(g(x)) = 3^{g(x)+1} = 5x+2 \Rightarrow g(x)+1 = \log_3(5x+2) \Rightarrow g(x) = \log_3(5x+2) - 1$.
Ora determiniamo la funzione inversa di $g(x)$. Da:
$\log_3(5x+2) - 1 = y \Rightarrow \log_3(5x+2) = y+1 \Rightarrow 5x+2 = 3^{y+1} \Rightarrow 5x = 3^{y+1} - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{3^{y+1}-2}{5}$ e quindi la funzione inversa: $y = \dfrac{3^{x+1}-2}{5}$.

3) Data la funzione $f(x) = \log(x+1) - k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,2)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3 ?

Determiniamo il punto in cui la funzione taglia l'asse delle ascisse ponendo:
$f(x) = \log(x+1) - k = 0 \Rightarrow \log(x+1) = k \Rightarrow x+1 = e^k \Rightarrow x = e^k - 1$.
Sarà quindi $\text{Area} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (e^k - 1) = 3 \Rightarrow e^k - 1 = 3 \Rightarrow e^k = 4 \Rightarrow k = \log 4$.

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log_3(6-x)}$.

Dovranno essere soddisfatte le due condizioni: $\begin{cases} 6-x>0 \\ 1-\log_3(6-x) \geq 0 \end{cases}$ da cui si ha:
$\begin{cases} x<6 \\ \log_3(6-x) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<6 \\ 6-x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<6 \\ x \geq 3 \end{cases}$ e quindi $\mathcal{C.E.} = [3;6[$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P} : (non\,\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\, o\, (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Posto $\mathbb{P}_1 : non\,\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ e $\mathbb{P}_2 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ dobbiamo verificare se $\mathbb{P}_1\, o\, \mathbb{P}_2$ risulti una tautologia. Costruendo la tavola di verità avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{A}$	$\mathbb{P}_1 : non\,\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{P}_2 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{P}_1\, o\, \mathbb{P}_2$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1

Come si vede dall'ultima colonna, la proposizione $\mathbb{P} : (non\,\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\, o\, (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ risulta una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{C}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^3-1}{\log(1+3x)} \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x+3} .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^3-1}{\log(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^3-1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{\log(1+3x)} = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = 2\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3+1}{x+3}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\frac{2x+3}{x+3}} = e^2\,.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 2^{x+1}$ e che $f(g(x)) = 2x-3$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

Da $f(g(x)) = 2^{g(x)+1} = 2x-3 \Rightarrow g(x)+1 = \log_2(2x-3) \Rightarrow g(x) = \log_2(2x-3)-1\,.$
Ora determiniamo la funzione inversa di $g(x)$. Da:

$$\log_2(2x-3)-1 = y \Rightarrow \log_2(2x-3) = y+1 \Rightarrow 2x-3 = 2^{y+1} \Rightarrow 2x = 2^{y+1}+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2^{y+1}+3}{2}$$ e quindi la funzione inversa: $$y = \frac{2^{x+1}+3}{2}\,.$$

3) Data la funzione $f(x) = e^{2-x}-k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,4)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2 ?

Determiniamo il punto in cui la funzione taglia l'asse delle ascisse ponendo:
$f(x) = e^{2-x}-k = 0 \Rightarrow e^{2-x} = k \Rightarrow 2-x = \log k \Rightarrow x = 2-\log k\,.$
Sarà quindi $\text{Area} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2-\log k) = 2 \Rightarrow 2-\log k = 1 \Rightarrow \log k = 1 \Rightarrow k = e\,.$

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x) = \sqrt{1-\log_2(4-x)}\,.$

Dovranno essere soddisfatte le due condizioni: $\begin{cases} 4-x>0 \\ 1-\log_2(4-x)\ge 0 \end{cases}$ da cui si ha:

$$\begin{cases} x<4 \\ \log_2(4-x)\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ 4-x\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x\ge 2 \end{cases}$$ e quindi $\mathcal{C.E.} = [2;4[\,.$

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B})\, o\, (non\, \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Posto $\mathbb{P}_1 : \mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}$ e $\mathbb{P}_2 : non\, \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}$ dobbiamo verificare se $\mathbb{P}_1\, o\, \mathbb{P}_2$ risulti una tautologia.
Costruendo la tavola di verità avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\, \mathbb{B}$	$\mathbb{P}_1 : \mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}$	$\mathbb{P}_2 : non\, \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}$	$\mathbb{P}_1\, o\, \mathbb{P}_2$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0

Come si vede dall'ultima colonna, la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B})\, o\, (non\, \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$ non risulta una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{D}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\operatorname{sen} x} - 1}{2^x - 1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+4}{2x+3}\right)^{3x-1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen} x} - 1}{2^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x}{2^x - 1} = \log 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} .$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3+1}{2x+3}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x+3}\right)^{2x+3}\right]^{\frac{3x-1}{2x+3}} = e^{\frac{3}{2}} .$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 3^{2-x}$ e che $f(g(x)) = 2x+1$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

Da $f(g(x)) = 3^{2-g(x)} = 2x+1 \Rightarrow 2 - g(x) = \log_3(2x+1) \Rightarrow g(x) = 2 - \log_3(2x+1)$.
Ora determiniamo la funzione inversa di $g(x)$. Da:
$2 - \log_3(2x+1) = y \Rightarrow \log_3(2x+1) = 2 - y \Rightarrow 2x+1 = 3^{2-y} \Rightarrow 2x = 3^{2-y} - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{3^{2-y} - 1}{2}$ e quindi la funzione inversa: $y = \dfrac{3^{2-x} - 1}{2}$.

3) Data la funzione $f(x) = \log(3-x) - k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,4)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2 ?

Determiniamo il punto in cui la funzione taglia l'asse delle ascisse ponendo:
$f(x) = \log(3-x) - k = 0 \Rightarrow \log(3-x) = k \Rightarrow 3 - x = e^k \Rightarrow x = 3 - e^k$.
Sarà quindi Area $= \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3 - e^k) = 2 \Rightarrow 3 - e^k = 1 \Rightarrow e^k = 2 \Rightarrow k = \log 2$.

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(5-x)}$.

Dovranno essere soddisfatte le due condizioni: $\begin{cases} 5-x>0 \\ 2-\log_3(5-x)\geq 0 \end{cases}$ da cui si ha:

$\begin{cases} x<5 \\ \log_3(5-x)\leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5 \\ 5-x\leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\geq -4 \end{cases}$ e quindi $\mathcal{C}.\mathcal{E}.=[-4;5[$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P}:(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Posto $\mathbb{P}_1:\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$ e $\mathbb{P}_2:\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B}$ dobbiamo verificare se $\mathbb{P}_1\,o\,\mathbb{P}_2$ risulti una tautologia. Costruendo la tavola di verità avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{P}_1:\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{P}_1\,o\,\mathbb{P}_2$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1

Come si vede dall'ultima colonna, la proposizione $\mathbb{P}:(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B})$ non risulta una tautologia.