

COMPITO di ANALISI MATEMATICA 10/10/2024

I M 1) Calcolare, usando la forma trigonometrica, $z = \frac{(1+i)^6}{(1-i)^3}$.

Risulta $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ e quindi:

$$(1+i)^6 = \left(\sqrt{2} \right)^6 \left(\cos 6 \frac{\pi}{4} + i \sin 6 \frac{\pi}{4} \right) = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -8i;$$

$1-i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ e quindi:

$$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2} \right)^3 \left(\cos 3 \frac{7\pi}{4} + i \sin 3 \frac{7\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos 3 \frac{7\pi}{4} + i \sin 3 \frac{7\pi}{4} \right) =$$

$$(1-i)^3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{21\pi}{4} + i \sin \frac{21\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) =$$

$$(1-i)^3 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Avremo infine: $z = \frac{(1+i)^6}{(1-i)^3} = \frac{8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)}{2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)} =$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ e quindi:}$$

$$z = \frac{(1+i)^6}{(1-i)^3} = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2(1+i).$$

I M 2) Verificare se la funzione $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0, 0)$.

Calcoliamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos^2 \vartheta \cdot \frac{\rho(\cos \vartheta - \sin \vartheta)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \vartheta (\cos \vartheta - \sin \vartheta) = 0.$$

La convergenza è uniforme dato che $|\rho \cos^2 \vartheta (\cos \vartheta - \sin \vartheta)| \leq 2\rho < \varepsilon$.

La funzione è quindi continua in $(0, 0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \cdot \frac{h-0}{h^2+0} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 \cdot \frac{0-h}{0+h^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[x^2 \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2} - 0 - (1, 0)(x, y) \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \text{ ovvero:}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{x^3 - yx^2}{x^2 + y^2} - x \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - yx^2 - x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-yx^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^3 (\cos \vartheta \sin \vartheta)(-\cos \vartheta - \sin \vartheta)}{\varrho^3} = (\cos \vartheta \sin \vartheta)(-\cos \vartheta - \sin \vartheta) = 0 \text{ solo per particolari valori di } \vartheta. \text{ La funzione non è differenziabile in } (0,0).$$

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = e^{x-y} + e^{z-y} - 2xyz = 0 \\ g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xz = 0 \end{cases}$, si verifichi che con esso si può definire nel punto $(1, 1, 1)$ una funzione implicita $x \rightarrow (y(x), z(x))$ e di tale funzione si calcolino poi le derivate $y'(1)$ e $z'(1)$.

Passando al calcolo della matrice Jacobiana avremo:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} e^{x-y} - 2yz & -e^{x-y} - e^{z-y} - 2xz & e^{z-y} - 2xy \\ 3x^2 - 3z & 3y^2 & 3z^2 - 3x \end{vmatrix} \text{ da cui poi:}$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)}(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dato che $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3 \neq 0$ si può definire una funzione $x \rightarrow (y, z)$ della quale avremo le derivate:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = - \frac{0}{3} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = - \frac{3}{3} = -1.$$

I M 4) Data $f(x, y) = e^{x-y}$ si determini almeno una direzione $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ per la quale risulti $\mathcal{D}_v f(0, 0) = \mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0)$.

La funzione è differenziabile due volte in tutto \mathbb{R}^2 e quindi avremo:

$$\mathcal{D}_v f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v \text{ e } \mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = v \cdot \mathbb{H}(0, 0) \cdot v^T.$$

Essendo $\nabla f(x, y) = (e^{x-y}; -e^{x-y}) \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (1; -1)$ e da $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ si ha: $\mathcal{D}_v f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v = (1; -1) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha$ ed essendo poi:

$$\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ avremo infine:}$$

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ -\cos \alpha + \sin \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) + \sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha).$$

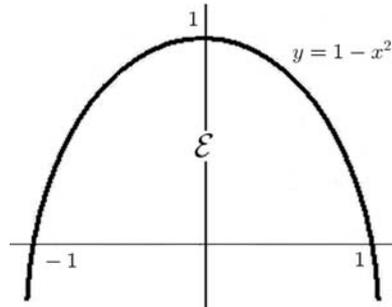
Quindi $\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha = 1 - \sin 2\alpha$.

Si deve determinare almeno una direzione per la quale sia: $\cos \alpha - \sin \alpha = 1 + \sin 2\alpha$, uguaglianza banalmente vera almeno per $\alpha = 0$.

I M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = 2x - y \\ \text{s.v. } \begin{cases} y \leq 1 - x^2 \\ 0 \leq y \end{cases} \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma
$$\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = 2x - y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y - 1 \leq 0 \\ -y \leq 0 \end{cases} \end{cases} .$$

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} .$$



La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile \mathcal{E} che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2x - y - \lambda_1(x^2 + y - 1) - \lambda_2(-y) .$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \neq 0 \\ \Lambda'_y = -1 \neq 0 \\ x^2 + y \leq 1 \\ -y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione} .$$

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - \lambda_1 = 0 \\ x^2 + y = 1 \\ -y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda_1} \\ \lambda_1 = -1 \\ x^2 + y = 1 \\ -y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - x^2 = 0 \\ \lambda_1 = -1 \\ 0 \leq 0 \text{ vera} \end{cases} ;$$

il punto $P_1 : (-1; 0)$, con $\lambda_1 = -1 < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \neq 0 \\ \Lambda'_y = -1 + \lambda_2 = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione} .$$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ dato che } \begin{cases} x^2 + y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ avremo:}$$

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} . \text{ Il punto } (1, 0) \text{ potrebbe essere punto di massimo.}$$

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} . \text{ Il punto } (-1, 0) \text{ potrebbe essere punto di minimo,}$$

come già visto in precedenza.

Abbiamo trovato un solo candidato a punto di massimo ed un solo candidato a punto di minimo, e quindi, per il Teorema di Weierstrass, il punto $(1, 0)$, con $f(1, 0) = 2$ è il punto di massimo mentre il punto $(-1, 0)$, con $f(-1, 0) = -2$ è il punto di minimo.

Se anche volessimo a studiare la funzione sulla frontiera di \mathcal{E} , esaminando i punti del vincolo $y = 1 - x^2$, sostituendo avremo:

$f(x, 1 - x^2) = 2x - (1 - x^2) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 > 0$ per $x > -1$ ovvero la funzione è crescente su quel tratto di frontiera, e quindi $x = -1$ è punto di minimo mentre $x = 1$ è punto di massimo.

Se $y = 0$ avremo $f(x, 0) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0 \forall x$ ovvero funzione sempre crescente e considerazioni identiche al caso precedente.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' \cdot \log y = xy \\ y(0) = e \end{cases}$.

Equazione differenziale a variabili separabili. Posto $y \neq 0$ avremo:

$$y' \cdot \frac{\log y}{y} = x \Rightarrow \int \frac{\log y}{y} y' dx = \int \frac{\log y}{y} dy = \int \log y d(\log y) = \int x dx + k \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \log^2 y = \frac{1}{2} x^2 + k \Rightarrow \log^2 y = x^2 + m \Rightarrow \log y = \pm \sqrt{x^2 + m} \text{ avendo posto } m = 2k.$$

Vista la condizione $y(0) = e$ scegliamo la soluzione di segno negativo ed avremo:

$$y = e^{-\sqrt{x^2 + m}}. \text{ Posto } y(0) = e \text{ otteniamo subito } m = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

II M 3) Risolvere il sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x - y = 0 \\ -x + y' - y = 0 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matri-

ciale: $\left\| \begin{array}{cc} D - 1 & -1 \\ -1 & D - 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} D - 1 & -1 \\ -1 & D - 1 \end{array} \right| (x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ((D - 1)^2 - 1)(x) = (D^2 - 2D)(x) = D(D - 2)(x) = 0 \Rightarrow x'' - 2x' = 0.$$

Da $D(D - 2)(x) = 0$ abbiamo le soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 + c_2 e^{2t}$.

Dalla prima equazione $x' = x + y$ ricaviamo $y = x' - x$ e quindi:

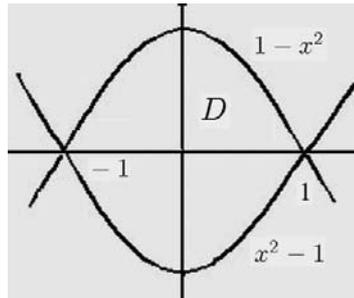
$$y(t) = 0 + 2c_2 e^{2t} - c_1 - c_2 e^{2t} = -c_1 + c_2 e^{2t}$$

e quindi la soluzione generale del sistema sarà:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \\ y(t) = -c_1 + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

II M 4) Data $f(x, y) = x + y$ e data la regione $D = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$, calcolare $\int \int_D f(x, y) dx dy$.

Vista la regione di integrazione:



$D = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$, si avrà:

$$\begin{aligned} \int \int_D x + y dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-x^2} (x + y) dy dx = \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2-1}^{1-x^2} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 x(1-x^2) + \frac{1}{2} (1-x^2)^2 - \left(x(x^2-1) + \frac{1}{2} (x^2-1)^2 \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 x(1-x^2) + x(1-x^2) + \frac{1}{2} (1-x^2)^2 - \frac{1}{2} (1-x^2)^2 dx = \\ &= \int_{-1}^1 2x(1-x^2) dx = \int_{-1}^1 2x - 2x^3 dx = \left(x^2 - \frac{1}{2} x^4 \Big|_{-1}^1 \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$