Compito di ANALISI MATEMATICA 7/01/2025

I M 1) Se $z=\sqrt{3}-\,i$, calcolare $\sqrt{z}$.

Risulta $\|z\|=\sqrt{3+1}=2$ per cui $z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$.
Quindi $\sqrt{z}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}+k\,\frac{2\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}+k\,\frac{2\pi}{2}\right)\right)=$
$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}+k\,\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}+k\,\pi\right)\right), 0\le k\le 1$ e quindi:
se $k=0$: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right)$;
se $k=1$: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{23\pi}{12}\right)$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=x\,|y|-|x|\,y$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

Vista l'espressione, la funzione è palesemente continua in tutto $\mathbb{R}^2$ con $f(0,0)=0$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\,|0|-|h|\,0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0\,|h|-|0|\,h-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0\,.$$
Quindi $\nabla f(0,0)=(0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,|y|-|x|\,y-0-(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,|y|-|x|\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$
Passando a coordinate polari otteniamo:
$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^2\left(\cos\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|-|\cos\vartheta|\operatorname{sen}\vartheta\right)}{\varrho}=\lim_{\varrho\to 0}\varrho\left(\cos\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|-|\cos\vartheta|\operatorname{sen}\vartheta\right)=0\,;$$
dato che $|\varrho\left(\cos\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|-|\cos\vartheta|\operatorname{sen}\vartheta\right)|\le 2\varrho$, il limite vale 0 con convergenza uniforme e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x^2e^y-ye^x-x+y=0$ ed il punto $P_0=(1,1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x\to y(x)$ da questa definita.

Da $\nabla f(x,y)=\left(2xe^y-ye^x-1;x^2e^y-e^x+1\right)$ si ha $\nabla f(1,1)=(e-1;1)$ ed essendo $f'_y(1,1)=1\neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y=y(x)$.
Risulta $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1)=-\frac{e-1}{1}=1-e$.
Essendo $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}2e^y-ye^x & 2xe^y-e^x\\ 2xe^y-e^x & x^2e^y\end{matrix}\right\|$ sarà $\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}e & e\\ e & e\end{matrix}\right\|$. Dalla:
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{f''_{xx}+2\,f''_{xy}\,(y')+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y} \text{ si ha } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(1)=-\frac{e+2\,e\,(1-e)+e\,(1-e)^2}{1}$$

e quindi $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(1) = 4e^2 - 4e - e^3$.
L'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x \to y(x)$ sarà quindi:
$P_2(x,1) = 1 + (1-e)(x-1) + \frac{1}{2}\left(4e^2 - 4e - e^3\right)(x-1)^2$.

I M 4) Data $f(x,y) = x\,y$, detti v e w i versori di $\mathbb{V} = (1,1)$ e $\mathbb{W} = (1,\,-1)$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = k$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = m$, determinare i valori di k e m affinchè risulti $(x_0,y_0) = (\,-2,3)$. Calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)$.

La funzione, essendo un polinomio, risulta differenziabile due volte ovunque.
Da $\mathbb{V} = (1,1)$ si ha $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, da $\mathbb{W} = (1,\,-1)$ si ha $w = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; inoltre dal gradiente $\nabla f(x,y) = (y;x)$ otteniamo:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = (y;x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k \\ \mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = (y;x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + x = \sqrt{2}\,k \\ y - x = \sqrt{2}\,m \end{cases}.$$

Essendo $(x_0,y_0) = (\,-2,3)$ sarà allora $\begin{cases} 3 - 2 = \sqrt{2}\,k \\ 3 + 2 = \sqrt{2}\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ m = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(\,-2,3) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, avremo infine:

$$\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0) = \mathcal{D}^2_{v,w} f(\,-2,3) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0\,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 - 4 \le 0 \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, il vincolo è qualificato, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = 2x - y - \lambda\left(4x^2 + y^2 - 4\right)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda = 0$:
$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \ne 0 \\ \Lambda'_y = \,-1 \ne 0 \\ 4x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$ e quindi il sistema non ammette soluzioni.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 8\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{2\lambda^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \ .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\sqrt{2} \\ \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} .$$

Avendo trovato due sole soluzioni, per il Teorema di Weierstrass una ci da il punto di massimo e l'altra il punto di minimo. Essendo $f(x,y) = 2x - y$ risulta $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$ mentre $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$ e quindi $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$ risulta il punto di massimo assoluto mentre $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ risulta il punto di minimo assoluto.

II M 2) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = -4x + y + 1 \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x + y = e^t \\ 4x + y' - y = 1 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale: $\begin{Vmatrix} D-1 & 1 \\ 4 & D-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^t \\ 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ 4 & D-1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left((D-1)^2 - 4\right)(x) = \left(D^2 - 2D - 3\right)(x) = (D+1)(D-3)(x) = (D-1)\left(e^t\right) - 1$

$\Rightarrow x'' - 2x' - 3x = e^t - e^t - 1 = -1$.

Da $\left(D^2 - 2D - 3\right) = (D+1)(D-3) = 0$ abbiamo le soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t) = k$. Sarà :

$x'_0(t) = x''_0(t) = 0$ e quindi andando a sostituire nella $x'' - 2x' - 3x = -1$ otteniamo:

$0 - 3k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$ e quindi la soluzione:

$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3}$.

Dalla prima equazione $x' = x - y + e^t$ ricaviamo $y = x - x' + e^t$ e quindi:

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3} - \left(-c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{3t}\right) + e^t =$

$y(t) = 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{3t} + e^t + \frac{1}{3}$

e quindi la soluzione generale del sistema sarà:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3} \\ y(t) = 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{3t} + e^t + \frac{1}{3} \end{cases} .$$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} x\,y' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

Equazione differenziale a variabili separabili. Posto $x \neq 0$ avremo:

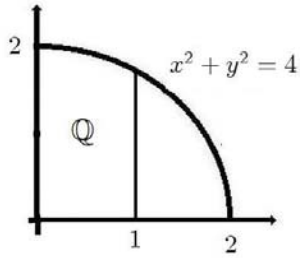
$$y' \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2}\, y'\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} y = \log x + k \Rightarrow y = \operatorname{tg}(\log x + k) .$$

Vista la condizione $y(1) = 1$ avremo $\operatorname{tg}(\log 1 + k) = \operatorname{tg} k = 1 \Rightarrow k = \frac{\pi}{4}$ e quindi la soluzione particolare $y = \operatorname{tg}\left(\log x + \frac{\pi}{4}\right)$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y\right\}$.

Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y\right\}$, normale rispetto all'asse x, dalla $x^2 + y^2 = 4$ otteniamo $y = \sqrt{4 - x^2}$ ed avremo:



$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 x\, \frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 2x - \frac{x^3}{2}\, \mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{1}{8}\, x^4\right|_0^1 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} .$$