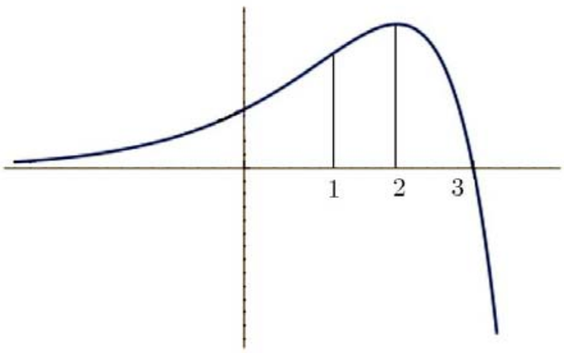
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 7/01/2025 - A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (3-x)\, e^{x+2}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} (3-x)\, e^{x+2} = (\to +\infty)(\to 0^+) = \lim_{t\to+\infty} (3+t)\, e^{-t+2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3+t}{e^{t-2}} = 0^+$ avendo posto $x = -t$;
$\lim_{x\to+\infty} (3-x)\, e^{x+2} = (\to -\infty)(\to +\infty) = -\infty$.
$f(x) = (3-x)\, e^{x+2} > 0 \Rightarrow 3-x > 0 \Rightarrow x < 3$, $f(3) = 0$, $f(0) = 3e^2$.
La funzione è positiva per $x < 3$, negativa per $x > 3$.
$f'(x) = -e^{x+2} + (3-x)\, e^{x+2} = (2-x)\, e^{x+2} > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$;
quindi la funzione è crescente per $x < 2$, decrescente per $x > 2$.
Quindi in $x = 2$, con $f(2) = e^4$ abbiamo un punto di massimo assoluto.
Da $f'(x) = (2-x)\, e^{x+2}$ avremo poi :
$f''(x) = -e^{x+2} + (2-x)\, e^{x+2} = (1-x)\, e^{x+2} > 0 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1$.
Quindi $f(x)$ è funzione convessa per $x < 1$, concava per $x > 1$.
Nel punto $x = 1$ abbiamo un punto di flesso con $f(1) = 2e^3$.
Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{(3-x)\, e^{x+2}}{x} = -\infty$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 2x} \;;\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3-x+x^2}{2+x+2x^2}\right)^{\frac{1-x^2}{2+x}}.$$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{4x^2} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{9}{8}$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3-x+x^2}{2+x+2x^2}\right)^{\frac{1-x^2}{2+x}} = \left(\to \frac{1}{2}\right)^{(\to -\infty)} = +\infty$.

3) Date $f(x) = e^{1-2x}$ e $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$, siano $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta $f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big)$.

Da $f(x) = e^{1-2x} = y$ si ha $1 - 2x = \log y$ da cui $x = \dfrac{1 - \log y}{2}$ e la funzione inversa sarà $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \log x}{2}$.

Da $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1} = y$ avremo $x - 2 = y\,(x+1)$ da cui $x\,(1-y) = y + 2$ ed infine: $x = \dfrac{y+2}{1-y}$ e la funzione inversa sarà $y = g^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$.

Sarà quindi $f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big) = f^{-1}\Big(\dfrac{x+2}{1-x}\Big) = \dfrac{1 - \log\left(\frac{x+2}{1-x}\right)}{2} = \dfrac{1 - \log(x+2) + \log(1-x)}{2}$.

4) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2x^3 - 3\sqrt[3]{x} + e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k = 0)$ ed avremo:

$$\int_0^1 2x^3 - 3\sqrt[3]{x} + e^{3x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{4}\,x^4 - 3\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\,x^{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\,e^{3x}\right|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,x^4 - \frac{9}{4}\,\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{3}\,e^{3x}\right|_0^1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{4} + \frac{1}{3}\,e^3\right] - \left[0 - 0 + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\,e^3 - \frac{25}{12}.$$

5) Data $f(x,y) = 3x^2 - 3x^2y + 2y^2 - 3y$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \big(f'_x, f'_y\big) = \big(6x - 6xy; 4y - 3x^2 - 3\big)$ per cui:

$$\begin{cases} 6x - 6xy = 6x(1-y) = 0 \\ 4y - 3x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 - y = 0 \\ 4y - 3x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = 1 \end{cases}.$$

Abbiamo tre punti stazionari: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6 - 6y & -6x \\ -6x & 4 \end{Vmatrix}$, avremo:

$\mathbb{H}\left(0, \frac{3}{4}\right) = \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\begin{cases} \left|\mathbb{H}_1\left(0, \frac{3}{4}\right)\right| = 4 > 0 \\ \left|\mathbb{H}_2\left(0, \frac{3}{4}\right)\right| = 6 > 0 \end{cases}$, il punto $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ è un punto di minimo;

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} & 4 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right| = 0 - 12 < 0$, il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & 4 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\left|\mathbb{H}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right| = 0 - 12 < 0$, il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ è un punto di sella.

6) Data la funzione $f(x)=\log(x-2)$, determinare il punto (x_0,y_0) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione $y=\frac{1}{2}x+1$, e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.
Da $f(x)=\log(x-2)$ segue $f'(x)=\frac{1}{x-2}$.
Due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, per cui dovrà essere :
$f'(x_0)=\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2}$ ovvero: $x-2=2\Rightarrow x_0=4$ da cui $y_0=\log(4-2)=\log 2$.
Quindi l'equazione della retta tangente in $x_0=4$ sarà:
$y-\log 2=\frac{1}{2}(x-4)$ ovvero $y=\frac{1}{2}x-2+\log 2$.

7) Data la funzione $f(x)=3\log 2x$ sapendo che il suo differenziale $\mathrm{d}f(2)$ è uguale a $0,1$ si determini il valore dell'incremento $\mathrm{d}x$.

Sappiamo che $\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.
Da $f(x)=3\log 2x$ abbiamo $f'(x)=3\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{3}{x}$. Se $x_0=2$ avremo $f'(2)=\frac{3}{2}$.
Sarà quindi $\mathrm{d}f(2)=f'(2)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\,\mathrm{d}x=0,1=\frac{1}{10}\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$.

8) Date le matrici $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}=\begin{Vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 2\end{Vmatrix}$ trovare il vettore $\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}x\\ y\end{Vmatrix}$ per il quale il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1,-1)$ e di modulo pari a 9.

Da $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}=\begin{Vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1-2+0 & 1-1+4\\ -2+2+0 & 2+1+0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-3 & 4\\ 0 & 3\end{Vmatrix}$ si ha $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}-3 & 4\\ 0 & 3\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x\\ y\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-3x+4y\\ 3y\end{Vmatrix}$.
Affinchè il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$ risulti perpendicolare al vettore $(1,-1)$ il loro prodotto scalare dovrà essere uguale a zero, per cui:
$(-3x+4y,3y)\cdot(1,-1)=-3x+4y-3y=-3x+y=0\Rightarrow y=3x$.
Quindi $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=(-3x+12x,9x)=(9x,9x)$.
Per avere il modulo di $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$ uguale a 9 dovrà risultare:
$\|\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}\|=\sqrt{(9x)^2+(9x)^2}=\sqrt{2\,(81x^2)}=9\Rightarrow 2\left(81x^2\right)=81$ e quindi $x^2=\frac{1}{2}$ da cui $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi le due soluzioni $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

9) Si verifichi se la proposizione $[non\,(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{A})]\Rightarrow(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})$, dove $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

Poniamo per brevità $P_1: non\,(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{A})$ e $P_2:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$	$P_1 : non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$	$P_2 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$P_1 \Rightarrow P_2$
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1

Guardando l'ultima colonna, si verifica che la proposizione $[non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})] \Rightarrow (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ risulta una tautologia.

10) Determinare dove risulta convessa la funzione $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 3)$.

Dovendo studiare il segno della derivata seconda della funzione, avremo:
$f(x) = (e^x + 2)(e^x - 3) = e^{2x} - e^x - 6$ da cui
$f'(x) = 2e^{2x} - e^x$ e da questa $f''(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x\,(4e^x - 1) > 0$ per $4e^x > 1$
ovvero per $e^x > \dfrac{1}{4} \Rightarrow x > \log\dfrac{1}{4} = \log 1 - \log 4 = -\log 4$.
Quindi la funzione è concava per $x < \log\dfrac{1}{4}$ mentre è convessa per $x > \log\dfrac{1}{4}$.
In $x = \log\dfrac{1}{4}$ abbiamo quindi un punto di flesso.
$f\left(\log\frac{1}{4}\right) = \left(e^{\log\frac{1}{4}} + 2\right)\left(e^{\log\frac{1}{4}} - 3\right) = \left(\frac{1}{4} + 2\right)\left(\frac{1}{4} - 3\right) = \frac{9}{4}\left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{99}{16}$.