COMPITO di MATEMATICA GENERALE 7/01/2025 - B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x+2)\, e^{1-x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} (x+2)\, e^{1-x} = (\to\ -\infty)(\to\ +\infty) = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} (x+2)\, e^{1-x} = (\to\ +\infty)(\to 0^+) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{e^{x-1}} = 0^+$;

$f(x) = (x+2)\, e^{1-x} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 2e$.

La funzione è positiva per $x > -2$, negativa per $x < -2$.

$f'(x) = e^{1-x} - (x+2)\, e^{1-x} = (-1-x)\, e^{1-x} > 0 \Rightarrow -1-x > 0 \Rightarrow x < -1$;

quindi la funzione è crescente per $x < -1$, decrescente per $x > -1$.

Quindi in $x = -1$, con $f(-1) = e^2$ abbiamo un punto di massimo assoluto.

Da $f'(x) = (-1-x)\, e^{1-x}$ avremo poi :

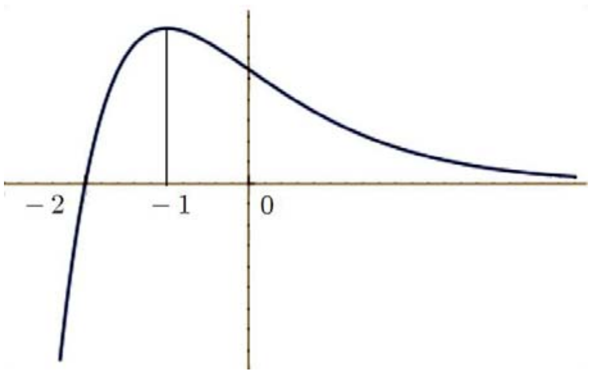
$f''(x) = -e^{1-x} - (-1-x)\, e^{1-x} = x\, e^{1-x} > 0 \Rightarrow x > 0$.

Quindi: $f(x)$ è funzione convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$.

Nel punto $x = 0$ abbiamo un punto di flesso con $f(0) = 2e$.

Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{(x+2)\, e^{1-x}}{x} = +\infty$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x^2}{1 - \cos 2x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1 - x + 3x^2}{2 + 3x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2-x}}$.

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x^2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x^2}{3x^2} \cdot \dfrac{3x^2}{4x^2} \cdot \dfrac{4x^2}{1 - \cos 2x} = 1 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot 2 = \dfrac{3}{2}$.

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1 - x + 3x^2}{2 + 3x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2-x}} = \left(\to \dfrac{3}{2} \right)^{(\to +\infty)} = +\infty$.

3) Date $f(x) = e^{3+x}$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, siano $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta $f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big)$.

Da $f(x) = e^{3+x} = y$ si ha $3 + x = \log y$ da cui $x = \log y - 3$ e la funzione inversa sarà $y = f^{-1}(x) = \log x - 3$.

Da $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3} = y$ avremo $x - 1 = y\,(x+3)$ da cui $x\,(1-y) = 3y + 1$ ed infine: $x = \dfrac{3y+1}{1-y}$ e la funzione inversa sarà $y = g^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{1-x}$. Sarà quindi:
$f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big) = f^{-1}\Big(\frac{3x+1}{1-x}\Big) = \log\Big(\frac{3x+1}{1-x}\Big) - 3 = \log(3x+1) - \log(1-x) - 3$.

4) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} - 3x^2\ - 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k=0)$ ed avremo:

$$\int_0^1 e^{2x} - 3x^2\ - 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\,e^{2x} - x^3\ - 2\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\,x^{1+\frac{1}{2}}\right|_0^1 =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,e^{2x} - x^3\ - \frac{4}{3}\,\sqrt{x^3}\right|_0^1 = \left[\frac{1}{2}e^2 - 1 - \frac{4}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 0\ - 0\right] = \frac{1}{2}e^2 - \frac{17}{6}\,.$$

5) Data $f(x,y) = 2x^2 + 3x + 3y^2 + 3xy^2$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \big(f'_x, f'_y\big) = \big(4x + 3 + 3y^2; 6y + 6xy\big)$ per cui:

$$\begin{cases} 4x + 3 + 3y^2 = 0 \\ 6y + 6xy = 6y\,(1+x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x =\ -\frac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 4x + 3 + 3y^2 = 0 \\ 1 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x =\ -1 \\ 3y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x =\ -1 \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x =\ -1 \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Abbiamo tre punti stazionari: $\Big(-\frac{3}{4}, 0\Big)$, $\Big(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ e $\Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 4 & 6y \\ 6y & 6+6x \end{Vmatrix}$, avremo:

$\mathbb{H}\Big(-\frac{3}{4}, 0\Big) = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\begin{cases} \big|\mathbb{H}_1\big(-\frac{3}{4}, 0\big)\big| = 4 > 0 \\ \big|\mathbb{H}_2\big(-\frac{3}{4}, 0\big)\big| = 6 > 0 \end{cases}$, il punto $\Big(-\frac{3}{4}, 0\Big)$ è un punto di minimo;

$\mathbb{H}\Big(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \begin{Vmatrix} 4 & \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\left|\mathbb{H}_2\Big(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\right| = 0\ - 12 < 0$, il punto $\Big(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}\Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \begin{Vmatrix} 4 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\left|\mathbb{H}_2\Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\right| = 0\ - 12 < 0$, il punto $\Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ è un punto di sella.

6) Data la funzione $f(x) = \log(x+3)$, determinare il punto (x_0, y_0) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione $y = \frac{1}{3}x - 1$, e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Da $f(x) = \log(x+3)$ segue $f'(x) = \frac{1}{x+3}$.
Due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, per cui dovrà essere :
$f'(x_0) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$ ovvero: $x + 3 = 3 \Rightarrow x_0 = 0$ da cui $y_0 = \log(0+3) = \log 3$.
Quindi l'equazione della retta tangente in $x_0 = 0$ sarà:
$y - \log 3 = \frac{1}{3}(x - 0)$ ovvero $y = \frac{1}{3}x + \log 3$.

7) Data la funzione $f(x) = 2\log 3x$ sapendo che il suo differenziale $\mathrm{d}f(3)$ è uguale a $0,1$ si determini il valore dell'incremento $\mathrm{d}x$.

Sappiamo che $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.
Da $f(x) = 2\log 3x$ abbiamo $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{2}{x}$. Se $x_0 = 3$ avremo $f'(3) = \frac{2}{3}$.
Sarà quindi $\mathrm{d}f(3) = f'(3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\mathrm{d}x = 0,1 = \frac{1}{10} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$.

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|$ e $\mathbb{B} = \left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right\|$ trovare il vettore $\mathbb{X} = \left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\|$ per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1, -1)$ e di modulo pari a 8.

Sarà:
$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2-1-2 & -2+0+1 \\ 1+0-4 & -1+0+2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right\|$$
da cui $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X} = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -x-y \\ -3x+y \end{matrix}\right\|$.
Affinchè il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulti perpendicolare al vettore $(1, -1)$ il loro prodotto scalare dovrà essere uguale a zero, per cui:
$(-x-y, -3x+y) \cdot (1, -1) = -x - y + 3x - y = 2x - 2y = 0 \Rightarrow y = x$.
Quindi $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X} = (-x-x, -3x+x) = (-2x, -2x)$.
Per avere il modulo di $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ uguale a 8 dovrà risultare:
$\|\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}\| = \sqrt{(-2x)^2 + (-2x)^2} = \sqrt{2(4x^2)} = 8 \Rightarrow 2(4x^2) = 64 \Rightarrow x^2 = 8$ e quindi $x = \pm 2\sqrt{2}$ da cui le due soluzioni $(x, y) = (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ e $(x, y) = (-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

9) Si verifichi se la proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$, dove $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

Poniamo per brevità $P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ e $P_2 : non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$	$P_2 : non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$	$P_1 \Rightarrow P_2$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

Guardando l'ultima colonna, si verifica che la proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ non risulta una tautologia.

10) Determinare dove risulta convessa la funzione $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 4)$.

Dovendo studiare il segno della derivata seconda della funzione, avremo:
$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 4) = e^{2x} - 3e^x - 4$ da cui
$f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x$ e da questa $f''(x) = 4e^{2x} - 3e^x = e^x\,(4e^x - 3) > 0$ per $4e^x > 3$ ovvero per $e^x > \dfrac{3}{4} \Rightarrow x > \log\dfrac{3}{4} = \log 3 - \log 4$.
Quindi la funzione è concava per $x < \log\dfrac{3}{4}$ mentre è convessa per $x > \log\dfrac{3}{4}$.
In $x = \log\dfrac{3}{4}$ abbiamo quindi un punto di flesso.
$f\left(\log\frac{3}{4}\right) = \left(e^{\log\frac{3}{4}} + 1\right)\left(e^{\log\frac{3}{4}} - 4\right) = \left(\frac{3}{4} + 1\right)\left(\frac{3}{4} - 4\right) = \frac{7}{4}\left(-\frac{13}{4}\right) = -\frac{91}{16}$.