COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2024/25

Prova Intermedia 2024

I M 1) Calcolare le radici terze del numero $e^{\log 8+\frac{3}{4}\pi i}$, limitandosi ad esprimerle in forma trigonometrica.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, si verifichi se risulta continua e poi anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x,y)=x^3+y^3$ ed il versore u del vettore $(1,1)$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulta: $\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x,y)=3\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{u,u} f(x,y)=0 \end{cases}$.

I M 4) Determinare se con l'equazione $f(x,y)=x^2\cdot\log y+y\,e^x-x=1$, soddisfatta nel punto $P=(0,1)$, è possibile definire una funzione implicita. In caso affermativo, calcolarne le derivate prima e seconda. Che tipo di punto viene determinato ?

I M 5) Verificare se con il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=xy+xz-2yz=0 \\ g(x,y,z)=2xyz-x^2z-y^3z=0\end{cases}$ si può definire, in un intorno di $P(1,1,1)$, una funzione in forma implicita. Se ciò è possibile, definire tale funzione e calcolarne le derivate prime.

I Appello Sessione Invernale 2025

I M 1) Se $z=\sqrt{3}-i$, calcolare $\sqrt{z}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=x\,|y|-|x|\,y$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x^2e^y-ye^x-x+y=0$ ed il punto $P_0=(1,1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x\to y(x)$ da questa definita.

I M 4) Data $f(x,y)=x\,y$, detti v e w i versori di $\mathbb{V}=(1,1)$ e $\mathbb{W}=(1,-1)$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=k$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0)=m$, determinare i valori di k e m affinchè risulti $(x_0,y_0)=(-2,3)$. Calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=2x-y \\ \text{s.v.: } 4x^2+y^2\leq 4\end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x-y+e^t \\ y'=-4x+y+1\end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} x\,y'=1+y^2 \\ y(1)=1\end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 4; 0\leq x\leq 1; 0\leq y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Invernale 2025

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^5=z$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=e^{x-y}-x+2y=1$ ed il punto $\mathrm{P}_0=(0,0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y=y(x)$ definibile con tale equazione.

II M 4) Data $f(x,y)=x^2y-2xy$, siano v il versore di $(1,1)$ e w quello di $(1,\,-1)$. Determinare tutti i punti (x_0,y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)=0 \end{cases}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x+y \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ 1-x\leq y \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x,y,z)=2x^2-3x-3xy^2+3y^2+z^2$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x+y+e^t \\ y'=x+y+2 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1; 1-x\leq y\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.