

COMPITI DI MATEMATICA GENERALE AA. 2024/25

Prova Intermedia Anno 2024-Compito A1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + x^3} \right)^{\frac{1-x^2}{x}}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{x}\right)$ e $g(x) = 2x - 1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+kx)}{3x} = 3$.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{C} \wedge \text{non } \mathbb{A})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ sia falsa.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \log\left(\frac{3^x - 2}{1 - x}\right)$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito B1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\log(1-x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - 3x + 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} \right)^{1-x}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x}\right)$ e $g(x) = 3x - 1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{kx^2} = 5$.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}) \wedge (\text{non } \mathbb{B} \vee \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$ sia vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \log\left(\frac{2^x - 3}{x - 2}\right)$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito C1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + x^2}{1 + x^3} \right)^{1+x^2}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{2x}\right)$ e $g(x) = 2x - 1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+kx)^2 - 1}{2x} = 4$.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathbb{C} \vee \mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$ sia falsa.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3-e^x}}$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito D1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin(x^2-x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x+3x^2}{2-x+2x^2} \right)^{2-x}.$$

2) Date le funzioni $f(x) = \log\left(\frac{2x-1}{x}\right)$ e $g(x) = x+2$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - e^{kx}}{x} = 0$.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}) \vee (\text{non } \mathbb{A} \wedge \mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ sia vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 2}{x - 3}}$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito A2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(3x+x^2)}{\sin(2x-x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4+3x}{3+3x} \right)^{2x-1}.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 2^{x-1}$ e che $f(g(x)) = 3x - 5$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = 2^{3x-1} - k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0, 6)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3?

4) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{2 - \log_2(2-x)}$.

5) Date le proposizioni \mathbb{A} e \mathbb{B} , e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow \text{non } \mathbb{B}) \vee (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$, determinare se la proposizione \mathbb{P} risulti una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito B2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin 2x)}{\text{tg } 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+2x}{2+2x} \right)^{3x}.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 3^{x+1}$ e che $f(g(x)) = 5x + 2$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = \log(x+1) - k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0, 2)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log_3(6-x)}$.

5) Date le proposizioni \mathbb{A} e \mathbb{B} , e data la proposizione $\mathbb{P} : (\text{non } \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$, determinare se la proposizione \mathbb{P} risulti una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito C2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^3 - 1}{\log(1+3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+3} \right)^{2x+3}.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 2^{x+1}$ e che $f(g(x)) = 2x - 3$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = e^{2-x} - k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0, 4)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log_2(4-x)}$.

5) Date le proposizioni \mathbb{A} e \mathbb{B} , e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}) \vee (\text{non } \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$, determinare se la proposizione \mathbb{P} risulti una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito D2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{2^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+4}{2x+3} \right)^{3x-1}.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = 3^{2-x}$ e che $f(g(x)) = 2x + 1$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = \log(3-x) - k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0, 4)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(5-x)}$.

5) Date le proposizioni \mathbb{A} e \mathbb{B} , e data la proposizione $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{A} \wedge \text{non } \mathbb{B})$, determinare se la proposizione \mathbb{P} risulti una tautologia.

I Appello Sessione Invernale 2025 - Compito A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (3-x)e^{x+2}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3-x+x^2}{2+x+2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2+x}}.$$

3) Date $f(x) = e^{1-2x}$ e $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$, siano $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta $f^{-1}(g^{-1}(x))$.

4) Calcolare $\int_0^1 2x^3 - 3\sqrt[3]{x} + e^{3x} dx$.

5) Data $f(x, y) = 3x^2 - 3x^2y + 2y^2 - 3y$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Data la funzione $f(x) = \log(x-2)$, determinare il punto (x_0, y_0) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$, e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

7) Data la funzione $f(x) = 3 \log 2x$ sapendo che il suo differenziale $df(2)$ è uguale a 0,1 si determini il valore dell'incremento dx .

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ trovare il vettore $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ per

il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1, -1)$ e di modulo pari a 9.

9) Si verifichi se la proposizione $[non(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})] \Rightarrow (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$, dove \mathbb{A} e \mathbb{B} sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

10) Determinare dove risulta convessa la funzione $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 3)$.

I Appello Sessione Invernale 2025 - Compito B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{1 - \cos 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - x + 3x^2}{2 + 3x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2-x}}$$

3) Date $f(x) = e^{3+x}$ e $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$, siano $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta $f^{-1}(g^{-1}(x))$.

4) Calcolare $\int_0^1 e^{2x} - 3x^2 - 2\sqrt{x} \, dx$.

5) Data $f(x, y) = 2x^2 + 3x + 3y^2 + 3xy^2$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Data la funzione $f(x) = \log(x + 3)$, determinare il punto (x_0, y_0) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione $y = \frac{1}{3}x - 1$, e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

7) Data la funzione $f(x) = 2 \log 3x$ sapendo che il suo differenziale $df(3)$ è uguale a 0,1 si determini il valore dell'incremento dx .

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ trovare il vettore $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1, -1)$ e di modulo pari a 8.

9) Si verifichi se la proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow non(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$, dove \mathbb{A} e \mathbb{B} sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

10) Determinare dove risulta convessa la funzione $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 4)$.

II Appello Sessione Invernale 2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^x - e^{1-x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x)}{\log(1 - x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - \sin x}{2x^2 - \cos x} \right)^{\frac{x^2}{1+x}}$$

3) Date $f(x) = \log x$ e $g(x) = \log x - 1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(x))$, il suo campo di esistenza, dove risulta invertibile e l'espressione della sua funzione inversa.

4) Calcolare $\int_1^e \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x^3} \, dx$.

5) Data $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Sapendo che la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 - 4x + 2$ nel punto x_0 ha equazione $y = -2$, trovare x_0 .

7) Determinare, usando la Regola di De L'Hopital, il valore del $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} m & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$, determinare il valore

di m in modo che il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulti parallelo al vettore $\mathbb{Y} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix}$.

9) Date le tre proposizioni:

\mathbb{A} : la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$;

\mathbb{B} : la funzione $g(x) = e^x$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$;

\mathbb{C} : se due funzioni sono derivabili, anche il loro prodotto è una funzione derivabile;
dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna delle tre proposizioni, determinare verità o falsità della proposizione : $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{C})$.

10) Data la funzione $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{cos} 3x$, se ne determini l'espressione del polinomio di Mac Laurin di secondo grado.