# Compito di ANALISI MATEMATICA 4/02/2025

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^5 = z$.

Da $z^5 = z$ segue $z^5 - z = z\left(z^4 - 1\right) = 0$.
Una prima soluzione è ovviamente $z = 0$.
Da $z^4 - 1 = 0$ segue $z^4 = 1$ ovvero $z = \sqrt[4]{1}$.
Essendo $1 = (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ avremo:
$\sqrt[4]{1} = \cos\left(\frac{0}{4} + k\,\frac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{4} + k\,\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(k\,\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\frac{\pi}{2}\right), 0 \le k \le 3$.
Se $k = 0 : \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$;
se $k = 1 : \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$;
se $k = 2 : \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$;
se $k = 3 : \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

Vista l'espressione, la funzione è palesemente continua in tutto $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.
Valutiamo se la funzione è continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^2 \cos^2\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta| = 0;$$
dato che $\left|\varrho^2 \cos^2\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|\right| \le \varrho^2$, la convergenza è uniforme e quindi la funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\,|0|}{\sqrt{h^2+0^2}} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0^2\,|h|}{\sqrt{0^2+h^2}} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,|y|}{x^2+y^2} = 0.$$
Passando a coordinate polari otteniamo:
$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho \cos^2\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta| = 0;$$
dato che $\left|\varrho \cos^2\vartheta\,|\operatorname{sen}\vartheta|\right| \le \varrho$, il limite vale 0 con convergenza uniforme e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x-y} - x + 2y = 1$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (0,0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione.

Da $\nabla f(x,y) = (e^{x-y} - 1; -e^{x-y} + 2)$ si ha $\nabla f(0,0) = (0;1)$ con $f'_y(0,0) = 1 \neq 0$ e quindi si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.
Risulta $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -\dfrac{0}{1} = 0$. Quindi $x = 0$ è punto stazionario.
Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{Vmatrix}$ sarà $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$. Dalla:
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{f''_{xx} + 2\,f''_{xy}\,(y') + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0) = -\dfrac{1 + 2\,(-1)\,(0) + 1\,(0)^2}{1} = -1$
e quindi, con $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0) = -1 < 0$, il punto $x = 0$ è punto di massimo relativo.

I M 4) Data $f(x,y) = x^2y - 2xy$, siano $v$ il versore di $(1,1)$ e $w$ quello di $(1,-1)$. Determinare tutti i punti $(x_0, y_0)$ per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$.

La funzione, essendo un polinomio, risulta differenziabile due volte ovunque.
Da $\mathbb{V} = (1,1)$ si ha $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, da $\mathbb{W} = (1,-1)$ si ha $w = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Dal gradiente $\nabla f(x,y) = \left(2xy - 2y; x^2 - 2x\right)$ otteniamo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 0 \end{Vmatrix}$.
Sarà $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \left(2xy - 2y; x^2 - 2x\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e
$\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$. Quindi avremo:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = (2xy - 2y; x^2 - 2x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

semplificando:

$$\begin{cases} 2xy - 2y + x^2 - 2x = 2 \\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2xy - 2y + x^2 - 2x = 2 \\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2y - 2x + 2 \\ 2x - 2 \end{Vmatrix} = 2y - 2x + 2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

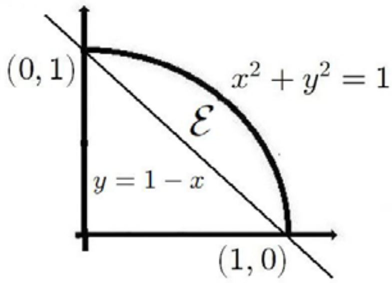
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{1+2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Quindi $(x_0, y_0) = \left(1 + \sqrt{3}, 0\right)$ oppure $(x_0, y_0) = \left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v. } \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ 1 - x \le y \end{cases} \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \le 0 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

$$\begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-x)^2 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(x-1) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$




La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x + y - \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 1\right) - \lambda_2(1 - x - y)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ :
$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \ne 0 \\ \Lambda'_y = 1 \ne 0 \\ x^2 + y \le 1 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$ :
$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - \lambda_1 y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda_1} \\ y = \frac{1}{2\lambda_1} \\ \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{4\lambda_1^2} = 1 \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda_1} \\ y = \frac{1}{2\lambda_1} \\ \lambda_1^2 = \frac{1}{2} \\ 1 - x - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0 : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0 : \text{falsa} \end{cases};$$

il punto $P_1 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ potrebbe essere punto di massimo.

Il punto $P_2 : \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin \mathcal{E}$.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ y = 1 - x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}.$$

Osserviamo che, per $y = 1 - x$ risulta $f(x, y) = x + y = x + 1 - x = 1$ ovvero la funzione obiettivo, su questo secondo vincolo, è costante e pari ad 1.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} 1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

I punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$, con $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1 < 0$ potrebbero essere punti di minimo. come già visto in precedenza.

Se studiamo la funzione sulla frontiera di $\mathcal{E}$, esaminiamo i punti del vincolo $x^2 + y^2 = 1$ ricorrendo alle coordinate polari, con $\varrho = 1$, $\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$, sostituendo avremo:

$f(\vartheta) = \cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta \Rightarrow f'(\vartheta) = -\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta \geq 0$ quando $\cos\vartheta \geq \operatorname{sen}\vartheta$, ovvero, dato che $\mathcal{E}$ sta nel primo quadrante, per $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$.

Questo conferma che $P_1 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $f(P_1) = \sqrt{2}$ è il punto di massimo, mentre tutti i punti del vincolo di equazione $y = 1 - x$ sono punti di minimo.

II M 2) Data $f(x, y, z) = 2x^2 - 3x - 3xy^2 + 3y^2 + z^2$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

La funzione è una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 4x - 3 - 3y^2 = 0 \\ f'_y = -6xy + 6y = 6y(1 - x) = 0 \\ f'_z = 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 3 - 3y^2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 4x - 3 - 3y^2 = 0 \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 - 3y^2 = 0 \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Abbiamo quindi tre punti stazionari: $P_1 : \left(\frac{3}{4}, 0, 0\right)$, $P_2 : \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $P_3 : \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

Da $\mathbb{H}(x,y,z) = \begin{Vmatrix} 4 & -6y & 0 \\ -6y & 6-6x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}\left(\frac{3}{4},0,0\right) = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 4 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_3| = 12 > 0 \end{cases}$ segue che $\left(\frac{3}{4},0,0\right)$ è un punto di minimo;

$\mathbb{H}\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = \begin{Vmatrix} 4 & -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; essendo $|\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 4 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0$ ne consegue che $\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ è un punto di sella.

$\mathbb{H}\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = \begin{Vmatrix} 4 & \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; essendo $|\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 4 & \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix} = -12 < 0$ ne consegue che $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ è un punto di sella.

II M 3) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x - y = e^t \\ -x + y' - y = 2 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale: $\begin{Vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^t \\ 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} e^t & -1 \\ 2 & D-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left((D-1)^2 - 1\right)(x) = \left(D^2 - 2D\right)(x) = (D-1)\left(e^t\right) + 2 = e^t - e^t + 2 = 2$.

Quindi l'equazione sarà: $x'' - 2x' = 2$.

Da $D^2 - 2D = D(D-2) = 0$ abbiamo le due soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 + c_2\, e^{2t}$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto che il termine noto è annichilato dall'operatore $D$, dovremo ipotizzare una soluzione $\lambda = 0$ doppia ponendo : $x_0(t) = at + b$.

Sarà : $x_0'(t) = a, x_0''(t) = 0$ e quindi, andando a sostituire nella $x'' - 2x' = 2$ otteniamo:
$0 - 2a = 2 \Rightarrow a = -1$ e quindi la soluzione: $x(t) = c_1 + c_2\, e^{2t} - t$.

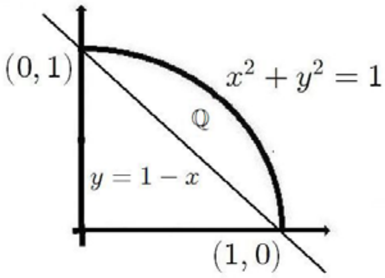
Dalla prima equazione $x' = x + y + e^t$ ricaviamo $y = x' - x - e^t$ e quindi:
$y(t) = 2c_2\, e^{2t} - 1 - \left(c_1 + c_2\, e^{2t} - t\right) - e^t = -c_1 + c_2\, e^{2t} + t - e^t - 1$.

e quindi la soluzione generale del sistema sarà:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2\, e^{2t} - t \\ y(t) = -c_1 + c_2\, e^{2t} + t - e^t - 1 \end{cases}.$$

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1; 1 - x \leq y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1; 1 - x \leq y\right\}$, normale rispetto all'asse $x$, dalla $x^2 + y^2 = 1$ otteniamo $y = \sqrt{1 - x^2}$ ed avremo:




$$\int\!\!\int_{\mathbb{Q}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left( \frac{y^2}{2} \right|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left( \left( \sqrt{1-x^2} \right)^2 - (1-x)^2 \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2} \left( 1 - x^2 - 1 - x^2 + 2x \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \left( 2x - 2x^2 \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - x^3 \, \mathrm{d}x = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \, .$$