COMPITO di MATEMATICA GENERALE 4/02/2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x)=e^x-e^{1-x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty} e^x-e^{1-x}=(\to 0)-(\to +\infty)=-\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} e^x-e^{1-x}=(\to +\infty)-(\to 0)=+\infty$.

$f(x)=e^x-e^{1-x}=e^x-\frac{e}{e^x}=\frac{e^{2x}-e}{e^x}>0 \Rightarrow e^{2x}>e^1 \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f(0)=1-e$.

La funzione è positiva per $x>\frac{1}{2}$, negativa per $x<\frac{1}{2}$.

$f'(x)=e^x+e^{1-x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$;

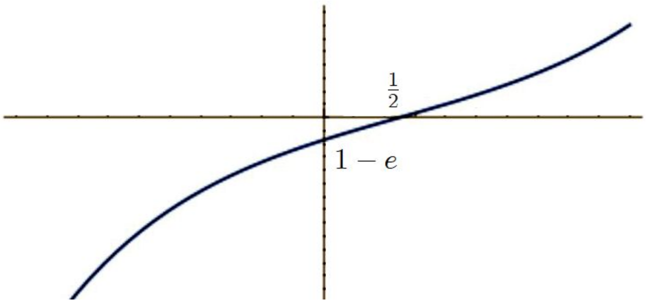
quindi la funzione è sempre crescente. Non ci sono punti di massimo o di minimo.

Da $f'(x)=e^x+e^{1-x}$ avremo poi $f''(x)=e^x-e^{1-x}>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$ come già visto per $f(x)>0$. Quindi $f(x)$ è funzione concava per $x<\frac{1}{2}$, convessa per $x>\frac{1}{2}$.

Nel punto $x=\frac{1}{2}$ abbiamo un punto di flesso con $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\log(1-x)}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-\operatorname{sen} x}{2x^2-\cos x}\right)^{\frac{x^2}{1+x}}.$$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\log(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2x}{-x}\cdot\frac{-x}{\log(1-x)}=1\cdot(-2)\cdot 1=-2$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-\operatorname{sen} x}{2x^2-\cos x}\right)^{\frac{x^2}{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2x^2}\right)^{\frac{x^2}{1+x}}=\left(\to\frac{3}{2}\right)^{(\to+\infty)}=+\infty$

in quanto $\operatorname{sen} x=o(3x^2)$ e $\cos x=o(2x^2)$ per $x\to+\infty$.

3) Date $f(x)=\log x$ e $g(x)=\log x-1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(x))$, il suo campo di esistenza, dove risulta invertibile e l'espressione della sua funzione inversa.

Da $f(x) = \log x$ e $g(x) = \log x - 1$ si ha $f(g(x)) = f(\log x - 1) = \log(\log x - 1)$.
Sarà quindi *C.E.*: $\begin{cases} x > 0 \\ \log x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > e \end{cases}$ e quindi *C.E.*: $x > e$.
Per vedere dove la funzione può essere invertibile, dato che è una funzione continua in tutto il suo Campo di esistenza, basterà vedere dove la funzione è strettamente monotòna, e quindi calcoliamo la sua derivata e ne studiamo il segno. Sarà:
$[f(g(x))]' = \dfrac{1}{\log x - 1} \cdot \dfrac{1}{x}$ ovvero il prodotto di due quantità positive per il *C.E.* Dato che la derivata è sempre positiva, la funzione è strettamente crescente nel suo Campo di esistenza, ovvero per $x > e$, e potrà quindi essere invertita in $]e, +\infty[$.
Determiniamo l'espressione della sua invers ed avremo:
$\log(\log x - 1) = y \Rightarrow \log x - 1 = e^y \Rightarrow \log x = e^y + 1 \Rightarrow x = e^{e^y + 1}$ e quindi l'espressione della funzione inversa sarà: $y = e^{e^x + 1}$.

4) Calcolare $\displaystyle\int_1^e \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k = 0)$ ed avremo, ricordando che:
$D(\log x) = \dfrac{1}{x}; D\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}; D(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$ per cui

$$\int_1^e \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \left(2\log x + 3\,\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{3}{5}+1}\,x^{\frac{3}{5}+1}\right|_1^e =$$
$$= \left(2\log x + \frac{3}{x} + \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}\right|_1^e = \left[2 + \frac{3}{e} + \frac{5}{8}e\sqrt[5]{e^3}\right] - \left[0 + 3 + \frac{5}{8}\right] = \frac{3}{e} + \frac{5}{8}e\sqrt[5]{e^3} - \frac{13}{8}.$$

5) Data $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(3x^2 - 6x; 3y^2 + 12y\right)$ per cui:
$$\begin{cases} 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \\ 3y^2 + 12y = 3y(y+4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}.$$
Abbiamo quattro punti stazionari: $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,-4)$, $(2,-4)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x - 6 & 0 \\ 0 & 6y + 12 \end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(0,0)| = -6 < 0 \\ |\mathbb{H}_1(0,0)| = 12 > 0 \end{cases}$ il punto $(0,0)$ è un punto di sella;
$\mathbb{H}(2,0) = \begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(2,0)| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2(2,0)| = 72 > 0 \end{cases}$, il punto $(2,0)$ è un punto di minimo;
$\mathbb{H}(0,-4) = \begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(0,-4)| = -6 < 0 \\ |\mathbb{H}_2(0,-4)| = 72 > 0 \end{cases}$, il punto $(0,-4)$ è un punto di massimo;

$\mathbb{H}(2,\,-4)=\begin{Vmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\begin{cases}|\mathbb{H}_1(2,\,-4)|=6>0\\ |\mathbb{H}_1(2,\,-4)|=\,-12<0\end{cases}$, il punto $(2,\,-4)$ è un punto di sella.

6) Sapendo che la retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^2-4x+2$ nel punto x_0 ha equazione $y=\,-2$, trovare x_0.

La retta di equazione $y=\,-2$ è una parallela all'asse delle ascisse, avendo un coefficiente angolare uguale a zero. Per avere una retta tangente al grafico della funzione parallela a questa retta dovremo avere un punto in cui la derivata della funzione è uguale a zero, quindi, da $f(x)=x^2-4x+2 \Rightarrow f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$. Quindi $x_0=2$.
Da $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ segue $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y=f(2)=\,-2$.

7) Determinare, usando la Regola di De L'Hopital, il valore del $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Preliminarmente controlliamo che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{0}{0}$. Le funzioni sono derivabili per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}^2 x}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+\operatorname{tg}^2x)}{2\operatorname{sen}x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\operatorname{sen}x\cos x}-\frac{\operatorname{tg}^2x}{2\operatorname{sen}x\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{2\cos x}-\frac{\operatorname{sen}x}{2\cos^3 x}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Quindi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

8) Data la matrice $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix}m & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}1\\ 1\\ -2\end{Vmatrix}$, determinare il valore di m in modo che il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulti parallelo al vettore $\mathbb{Y}=\begin{Vmatrix}4\\ 6\\ -4\end{Vmatrix}$.

Risulta $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}m & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\ 1\\ -2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}m+3-2\\ 1+0+2\\ 1-1-2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}m+1\\ 3\\ -2\end{Vmatrix}$; affinchè il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulti parallelo al vettore $(4,6,\,-4)$ dovrà essere uguale il rapporto tra le componenti di uguale indice, ovvero:

$$\frac{m+1}{4}=\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}\Rightarrow\frac{m+1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow m+1=2\Rightarrow m=1.$$

9) Date le tre proposizioni:
$\mathbb{A}$: la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x}$ è continua $\forall\, x\in\mathbb{R}$;
$\mathbb{B}$: la funzione $g(x)=e^x$ è derivabile $\forall\, x\in\mathbb{R}$;
$\mathbb{C}$: se due funzioni sono derivabili, anche il loro prodotto è una funzione derivabile;
dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna delle tre proposizioni, determinare verità o falsità della proposizione : $(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})\Rightarrow(non\,\mathbb{A}\,o\,\mathbb{C})$.

Esaminiamo lo stato di verità delle tre proposizioni:

$\mathbb{A}$: la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x}$ è continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$; la proposizione è falsa in quanto la funzione ha una discontinuità di seconda specie in $x=0$;

$\mathbb{B}$: la funzione $g(x)=e^x$ è derivabile $\forall\, x \in \mathbb{R}$; la proposizione è vera;

$\mathbb{C}$: se due funzioni sono derivabili, anche il loro prodotto è una funzione derivabile; la proposizione è vera.

Posto $P_1 : \mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}$ e $P_2 : non\, \mathbb{A}\, o\, \mathbb{C}$ avremo una tavola di verità costituita dalla seguente riga:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}$	$non\, \mathbb{A}$	$P_2 : non\, \mathbb{A}\, o\, \mathbb{C}$	$P_1 \Rightarrow P_2$
0	1	1	1	1	1	1

Guardando l'ultima colonna, si vede che la proposizione $(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}) \Rightarrow (non\, \mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$ risulta vera.

10) Data la funzione $f(x)=3\,\mathrm{sen}\,2x-2\cos 3x$, se ne determini l'espressione del polinomio di Mac Laurin di secondo grado.

Da $f(x)=3\,\mathrm{sen}\,2x-2\cos 3x$ risulta $f(0)=3\,\mathrm{sen}\,0-2\cos 0=0-2=\,-2$;
da $f'(x)=6\cos 2x+6\,\mathrm{sen}\,3x$ risulta $f'(0)=6\cos 0+6\,\mathrm{sen}\,0=6+0=6$;
da $f''(x)=\,-12\,\mathrm{sen}\,2x+18\cos 3x$ risulta $f''(0)=\,-12\,\mathrm{sen}\,0+18\cos 0=0+18=18$.
Essendo $P_2(x,0)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2$ avremo:

$P_2(x,0)=\,-2+6\,x+\frac{1}{2}\cdot 18\,x^2=\,-2+6\,x+9\,x^2$.