

COMPITI DI ANALISI MATEMATICA AA. 2024/25

Prova Intermedia 2024

I M 1) Calcolare le radici terze del numero $e^{\log 8 + \frac{3}{4}\pi i}$, limitandosi ad esprimerle in forma trigonometrica.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, si verifichi se risulta

continua e poi anche differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3$ ed il versore u del vettore $(1, 1)$, determinare tutti i punti (x, y) nei quali risulta: $\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x, y) = 3\sqrt{2} \\ \mathcal{D}_{u,u}^2 f(x, y) = 0 \end{cases}$.

I M 4) Determinare se con l'equazione $f(x, y) = x^2 \cdot \log y + y e^x - x = 1$, soddisfatta nel punto $P = (0, 1)$, è possibile definire una funzione implicita. In caso affermativo, calcolarne le derivate prima e seconda. Che tipo di punto viene determinato?

I M 5) Verificare se con il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = xy + xz - 2yz = 0 \\ g(x, y, z) = 2xyz - x^2z - y^3z = 0 \end{cases}$ si può definire, in un intorno di $P(1, 1, 1)$, una funzione in forma implicita. Se ciò è possibile, definire tale funzione e calcolarne le derivate prime.

I Appello Sessione Invernale 2025

I M 1) Se $z = \sqrt{3} - i$, calcolare $\sqrt{z}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x, y) = x|y| - |x|y$ risulta differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = x^2 e^y - y e^x - x + y = 0$ ed il punto $P_0 = (1, 1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x \rightarrow y(x)$ da questa definita.

I M 4) Data $f(x, y) = xy$, detti v e w i versori di $\mathbb{V} = (1, 1)$ e $\mathbb{W} = (1, -1)$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = k$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0, y_0) = m$, determinare i valori di k e m affinché risulti $(x_0, y_0) = (-2, 3)$. Calcolare poi $\mathcal{D}_{v,w}^2 f(x_0, y_0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = 2x - y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = -4x + y + 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} x y' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y\}$, calcolare $\int\int_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy$.

II Appello Sessione Invernale 2025

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^5 = z$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ risulta differen-

ziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = e^{x-y} - x + 2y = 1$ ed il punto $P_0 = (0, 0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione.

II M 4) Data $f(x, y) = x^2 y - 2xy$, siano v il versore di $(1, 1)$ e w quello di $(1, -1)$. Determinare tutti i punti (x_0, y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = \sqrt{2} \\ \mathcal{D}_{v,w}^2 f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x + y \\ \text{s.v. } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 - x \leq y \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x, y, z) = 2x^2 - 3x - 3xy^2 + 3y^2 + z^2$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1; 1 - x \leq y\}$, calcolare $\iint_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy$.

Appello Sessione Straordinaria I 2025

I M 1) Dopo aver determinato le quattro soluzioni complesse dell'equazione $z^4 + 1 = 0$, se ne calcoli il loro prodotto.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, si verifichi che essa è

continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e si determini poi se essa risulta anche differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = x^2 \log y - y \log x = 0$ soddisfatta in $(1, 1)$, verificare che con essa si definisce, in un intorno di $x_0 = 1$, una funzione $y = y(x)$. Approssimare tale funzione con un opportuno polinomio di II° grado.

I M 4) Data la funzione $f(x, y) = e^{x-y}$, determinare tutte le direzioni v nelle quali, qualunque sia il punto (x_0, y_0) , risulta $\mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x - y + 1 \\ \text{s.v.: } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 3yz$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Tra tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - 2y + t \\ y' = x - y - t \end{cases}$ si determini quella per cui $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2; 1 \leq y\}$, calcolare $\iint_{\mathbb{Q}} x^2 y \, dx \, dy$.