COMPITI DI MATEMATICA GENERALE AA. 2024/25

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{A}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x+x^2}{1+2x+x^3}\right)^{\frac{1-x^2}{x}}.$$

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ e $g(x)=2x-1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+kx)}{3x}=3$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\, o\,(\mathbb{C}\, e\, non\,\mathbb{A})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ sia falsa.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\log\left(\dfrac{3^x-2}{1-x}\right)$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{B}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\log(1-x)}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3x+2x^2}{1+2x+3x^2}\right)^{1-x}.$$

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ e $g(x)=3x-1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{kx^2}=5$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C})\, e\,(non\,\mathbb{B}\, o\,\mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ sia vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\log\left(\dfrac{2^x-3}{x-2}\right)$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{C}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\operatorname{sen} 3x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x^2}{1+x^3}\right)^{1+x^2}.$$

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$ e $g(x)=2x-1$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+kx)^2-1}{2x}=4$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\, e\,\mathbb{B})\Rightarrow(non\,\mathbb{C}\, o\,\mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ sia falsa.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{3-e^x}}$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{D}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen}(x^2-x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x+3x^2}{2-x+2x^2}\right)^{2-x}$.

2) Date le funzioni $f(x)=\log\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)$ e $g(x)=x+2$, determinare l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-e^{kx}}{x}=0$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{C})\,o\,(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ sia vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-2}{x-3}}$.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{A}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x+x^2)}{\operatorname{sen}(2x-x^2)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4+3x}{3+3x}\right)^{2x-1}$.

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=2^{x-1}$ e che $f(g(x))=3x-5$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x)=2^{3x-1}-k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,6)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3 ?

4) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{2-\log_2(2-x)}$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P}:(\mathbb{A}\Leftrightarrow non\,\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{A})$, determinare sa la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{B}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\operatorname{sen}2x)}{\operatorname{tg}3x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3+2x}{2+2x}\right)^{3x}$.

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=3^{x+1}$ e che $f(g(x))=5x+2$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x)=\log(x+1)-k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,2)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3 ?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x)=\sqrt{1-\log_3(6-x)}$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P}:(non\,\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{C}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^3-1}{\log(1+3x)}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x+3}.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=2^{x+1}$ e che $f(g(x))=2x-3$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x)=e^{2-x}-k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,4)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2 ?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x)=\sqrt{1-\log_2(4-x)}$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P}:(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B})\ o\ (non\, \mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{A})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

Prova Intermedia Anno 2024-Compito $\mathbb{D}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\operatorname{sen}x}-1}{2^x-1}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{3x-1}.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=3^{2-x}$ e che $f(g(x))=2x+1$, determinare la funzione $g(x)$ e l'espressione dell'inversa di $g(x)$.

3) Data la funzione $f(x)=\log(3-x)-k$ si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto $(0,4)$. Per quale valore del parametro k il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2 ?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione $f(x)=\sqrt{2-\log_3(5-x)}$.

5) Date le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, e data la proposizione $\mathbb{P}:(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\ o\ (\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B})$, determinare se la proposizione $\mathbb{P}$ risulti una tautologia.

I Appello Sessione Invernale 2025 - Compito $\mathbb{A}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x)=(3-x)\,e^{x+2}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 2x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-x+x^2}{2+x+2x^2}\right)^{\frac{1-x^2}{2+x}}.$$

3) Date $f(x)=e^{1-2x}$ e $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$, siano $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta $f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big)$.

4) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2x^3-3\sqrt[3]{x}+e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

5) Data $f(x,y)=3x^2-3x^2y+2y^2-3y$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Data la funzione $f(x)=\log(x-2)$, determinare il punto (x_0,y_0) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione $y=\dfrac{1}{2}x+1$, e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

7) Data la funzione $f(x)=3\log 2x$ sapendo che il suo differenziale $\mathrm{d}f(2)$ è uguale a $0,1$ si determini il valore dell'incremento $\mathrm{d}x$.

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$ e $\mathbb{B} = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\|$ trovare il vettore $\mathbb{X} = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$ per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1, \, -1)$ e di modulo pari a 9.
9) Si verifichi se la proposizione $[non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})] \Rightarrow (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$, dove $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.
10) Determinare dove risulta convessa la funzione $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 3)$.

$\boxed{\text{I Appello Sessione Invernale 2025 - Compito } \mathbb{B}}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x+2)\, e^{1-x}$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{1 - \cos 2x} \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - x + 3x^2}{2 + 3x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2-x}} .$$

3) Date $f(x) = e^{3+x}$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, siano $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta $f^{-1}\big(g^{-1}(x)\big)$.
4) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} - 3x^2 - 2\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$.
5) Data $f(x, y) = 2x^2 + 3x + 3y^2 + 3xy^2$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.
6) Data la funzione $f(x) = \log\,(x+3)$, determinare il punto (x_0, y_0) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione $y = \dfrac{1}{3}\, x - 1$, e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.
7) Data la funzione $f(x) = 2 \log 3x$ sapendo che il suo differenziale $\mathrm{d}f(3)$ è uguale a $0,1$ si determini il valore dell'incremento $\mathrm{d}x$.
8) Date le matrici $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|$ e $\mathbb{B} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix} \right\|$ trovare il vettore $\mathbb{X} = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$ per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1, \, -1)$ e di modulo pari a 8.
9) Si verifichi se la proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow non\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$, dove $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.
10) Determinare dove risulta convessa la funzione $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 4)$.

$\boxed{\text{II Appello Sessione Invernale 2025}}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^x - e^{1-x}$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log\,(1 + 2x)}{\log\,(1 - x)} \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - \operatorname{sen} x}{2x^2 - \cos x} \right)^{\frac{x^2}{1+x}} .$$

3) Date $f(x) = \log x$ e $g(x) = \log x - 1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(x))$, il suo campo di esistenza, dove risulta invertibile e l'espressione della sua funzione inversa.
4) Calcolare $\displaystyle\int_1^e \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x^3}\, \mathrm{d}x$.

5) Data $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2$, si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.
6) Sapendo che la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 - 4x + 2$ nel punto x_0 ha equazione $y = -2$, trovare x_0.
7) Determinare, usando la Regola di De L'Hopital, il valore del $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}$.
8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} m & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}$, determinare il valore di m in modo che il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulti parallelo al vettore $\mathbb{Y} = \begin{Vmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{Vmatrix}$.
9) Date le tre proposizioni:
$\mathbb{A}$: la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
$\mathbb{B}$: la funzione $g(x) = e^x$ è derivabile $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
$\mathbb{C}$: se due funzioni sono derivabili, anche il loro prodotto è una funzione derivabile;
dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna delle tre proposizioni, determinare verità o falsità della proposizione : $(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}) \Rightarrow (non\, \mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$.
10) Data la funzione $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 3x$, se ne determini l'espressione del polinomio di Mac Laurin di secondo grado.

Appello Sessione Straordinaria I 2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^3 - 6x$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x + 1}$.
3) Date le funzioni $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 1$, dopo aver determinato le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, risolvere la disequazione $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$.
4) Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx}$, sapendo che essa presenta, sia sulla destra che sulla sinistra, un asintoto obliquo di equazione $y = x$ e che interseca l'asse delle ascisse nel punto $(1, 0)$, determinare i valori dei parametri a, b e c.
5) Calcolare $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, \mathrm{d}x$.
6) Data la funzione $f(x,y) = y^2 + xy^2 + x^2 - 14x$, determinare la natura dei suoi punti stazionari.
7) Data la funzione $f(x) = \frac{5}{x}$, si consideri la retta tangente al suo grafico nel punto $x = 1$; siano A e B i punti in cui tale retta tangente taglia gli assi coordinati e sia O l'origine degli assi. Determinare l'area del triangolo AOB.
8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$, trovare tutti i vettori che soddisfano all'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}$.

9) Date le tre proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, nell'ipotesi che sia la proposizione $P_1 : \mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$ che la proposizione $P_2 : \mathbb{C} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})$ siano vere, si determini se risulta sempre vera la proposizione $P : (\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{A}$.

10) Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, si verifichi che essa soddisfa al Teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 3]$, determinando poi il punto x_0 risultante dall'applicazione del Teorema.