Compito di ANALISI MATEMATICA 20/03/2025

I M 1) Dopo aver determinato le quattro soluzioni complesse dell'equazione $z^4+1=0$, se ne calcoli il loro prodotto.

Da $z^4+1=0$ segue $z=\sqrt[4]{-1}$.
Essendo $-1=(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$ avremo:
$\sqrt[4]{-1}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right), 0\le k\le 3$
Se $k=0$: $\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$;
se $k=1$: $\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$;
se $k=2$: $\cos\frac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;
se $k=3$: $\cos\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.
Avendo tutti modulo pari a 1 anche il loro numero prodotto avrà modulo pari ad 1.
Per avere l'argomento del numero prodotto basterà fare la somma degli argomenti, ovvero:
$\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}=4\pi$. Quindi $z_p=(\cos 4\pi+i\operatorname{sen}4\pi)=(\cos 0+i\operatorname{sen}0)=1$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, si verifichi che essa è continua $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e si determini poi se essa risulta anche differenziabile in $(0,0)$.

Vista l'espressione, la funzione è palesemente continua in tutto $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.
Valutiamo se la funzione è continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow\lim_{\varrho\to0}\frac{\varrho^5\cos^5\vartheta}{\varrho^4}=\lim_{\varrho\to0}\varrho\cos^5\vartheta=0;$$

dato che $\left|\varrho\cos^5\vartheta\right|\le\varrho$, la convergenza è uniforme e quindi la funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^5}{(h^2+0^2)^2}\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^5}{h^5}=1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{(0^2+h^2)^2}\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to0}0=0.$$

Quindi $\nabla f(0,0)=(1,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}-x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5-x^5-xy^4-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^4-2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\varrho\to0}-\frac{\varrho^5\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,(\operatorname{sen}^2\vartheta+2\cos^2\vartheta)}{\varrho^5}=$$

$= -\cos\vartheta\,\text{sen}^2\vartheta\left(1+\cos^2\vartheta\right)$ e quindi il limite vale 0 solo per particolari valori di ϑ per cui la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x^2\log y - y\log x = 0$ soddisfatta in $(1,1)$, verificare che con essa si definisce, in un intorno di $x_0=1$, una funzione $y=y(x)$. Approssimare tale funzione con un opportuno polinomio di II^ grado.

Da $\nabla f(x,y)=\left(2x\log y - y\,\dfrac{1}{x}; x^2\,\dfrac{1}{y}-\log x\right)$ si ha $\nabla f(1,1)=(-1;1)$ ed essendo $f'_y(1,1)=1\neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y=y(x)$.
Risulta $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\dfrac{-1}{1}=1$.
Essendo $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix} 2\log y + y\,\frac{1}{x^2} & 2x\,\frac{1}{y}-\frac{1}{x} \\ 2x\,\frac{1}{y}-\frac{1}{x} & -x^2\,\frac{1}{y^2}\end{matrix}\right\|$ sarà $\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\right\|$. Dalla:
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{f''_{xx}+2\,f''_{xy}\,(y')+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha :
$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(1) = -\dfrac{1+2\,(1)(1)+(-1)(1)^2}{1} = -2$.
Da $P_2(x,1)=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{1}{2}\,y''(1)(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)$ avremo
$P_2(x,1)=1+(1)(x-1)+\frac{1}{2}\,(-2)(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)$ e quindi
$P_2(x,1)=1+(x-1)-(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big) = -x^2+3x-1+o\big((x-1)^2\big)$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y)=e^{x-y}$, determinare tutte le direzioni v nelle quali, qualunque sia il punto (x_0,y_0), risulta $\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}}f\,(x_0,y_0)=0$.

La funzione risulta palesemente differenziabile.
Da $v=(\cos\alpha,\text{sen}\,\alpha)$ risulta $\mathcal{D}_v f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot(\cos\alpha,\text{sen}\,\alpha)$ e quindi:
$\mathcal{D}_v f(x,y)=(e^{x-y};-e^{x-y})\cdot(\cos\alpha,\text{sen}\,\alpha)=e^{x-y}\,(\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha)=0$ se $\cos\alpha=\text{sen}\,\alpha$ ovvero se $\alpha=\frac{\pi}{4}$ oppure $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x-y+1\\ \text{s.v.: } x^2+y^2\leq 1\end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x-y+1\\ \text{s.v.: } x^2+y^2-1\leq 0\end{cases}$.
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (cerchio) che è un insieme compatto, il vincolo è qualificato, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda)=x-y+1-\lambda\big(x^2+y^2-1\big)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda=0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \neq 0 \\ \Lambda'_y = -1 \neq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$ e quindi il sistema non ammette soluzioni.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{2\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} .$$

Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ potrebbe essere punto di massimo, invece il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ potrebbe essere punto di minimo. Avendo trovato due sole soluzioni, per il Teorema di Weierstrass una sarà il punto di massimo e l'altra il punto di minimo, per cui il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + 1$ è il punto di massimo mentre il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$ è il punto di minimo.

II M 2) Data $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 3yz$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

La funzione è una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 6x - 3y = 0 \\ f'_y = 2y - 3x + 3z = 0 \\ f'_z = 2z + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 4x - 3x + 3z = 0 \\ 2z + 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = -3z \\ 2z - 18z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Abbiamo un solo punto stazionario: $P_0 : (0, 0, 0)$.

Da $\mathbb{H}(x, y, z) = \mathbb{H}(0, 0, 0) = \begin{Vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$|\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5 < 0$. Ne segue che $(0, 0, 0)$ è un punto di sella.

II M 3) Tra tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - 2y + t \\ y' = x - y - t \end{cases}$ si determini quella per cui $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x + 2y = t \\ -x + y' + y = -t \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale: $\left\| \begin{matrix} D-1 & 2 \\ -1 & D+1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} t \\ -t \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left| \begin{matrix} D-1 & 2 \\ -1 & D+1 \end{matrix} \right| (x) = \left| \begin{matrix} t & 2 \\ -t & D+1 \end{matrix} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \big(D^2 - 1 + 2\big)(x) = \big(D^2 + 1\big)(x) = (D+1)(t) + 2t = 1 + t + 2t = 3t + 1\,.$

Quindi l'equazione sarà: $x'' + x = 3t + 1\,.$

Da $D^2 + 1 = 0$ abbiamo le due soluzioni $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t\,.$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t) = at + b\,.$

Sarà : $x_0'(t) = a, x_0''(t) = 0$ e quindi, andando a sostituire nella $x'' + x = 3t + 1$ otteniamo: $0 + at + b = 3t + 1 \Rightarrow a = 3$ e $b = 1$ e quindi la soluzione:

$x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + 3t + 1\,.$

Dalla prima equazione $x' - x + 2y = t$ ricaviamo $y = \frac{1}{2}(x - x' + t)$ e quindi:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + 3t + 1 - (c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t + 3) + t\right) =$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(c_1 (\operatorname{sen} t - \cos t) + c_2 (\cos t + \operatorname{sen} t) + 4t - 2\right)$$

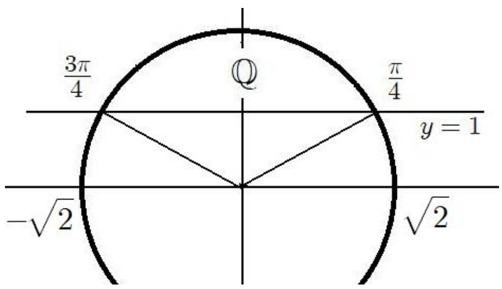
e quindi la soluzione generale del sistema sarà:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + 3t + 1 \\ y(t) = \frac{c_1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + \frac{c_2}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t) + 2t - 1 \end{cases}.$$

Dalla $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 + 1 = 1 \\ -\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = -2 \end{cases}$ da cui la soluzione particolare:

$$\begin{cases} x(t) = -2 \operatorname{sen} t + 3t + 1 \\ y(t) = -(\operatorname{sen} t - \cos t) + 2t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -2 \operatorname{sen} t + 3t + 1 \\ y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t + 2t - 1 \end{cases}.$$

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 2; 1 \le y\right\}$, calcolare $\iint\limits_{\mathbb{Q}} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$



Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 2; 1 \le y\right\}$, normale rispetto all'asse x, da $y = 1$ segue $x^2 = 1$ e dalla $x^2 + y^2 = 2$ otteniamo $y = \sqrt{2 - x^2}$ ed avremo:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{y^2}{2} \right|_1^{\sqrt{2-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\left(\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2 - 1\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\left(2 - x^2 - 1\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\,.$$