COMPITO di MATEMATICA GENERALE 20/03/2025

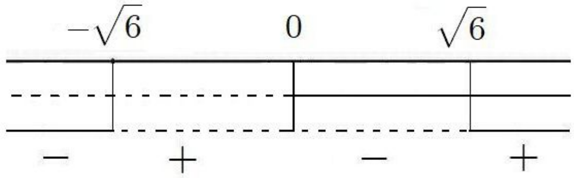
1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^3 - 6x$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 6x = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 6x = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

$$f(x) = x^3 - 6x > 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<-\sqrt{6} \cup x>\sqrt{6} \end{cases}$$



$f(x) > 0$ per $-\sqrt{6} < x < 0 \cup \sqrt{6} < x$.

$f(x) < 0$ per $x < -\sqrt{6} \cup 0 < x < \sqrt{6}$.

$f(0) = f\left(-\sqrt{6}\right) = f\left(-\sqrt{6}\right) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3\left(x^2 - 2\right) > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}$;

quindi la funzione è crescente per $x < -\sqrt{2}$, decrescente per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, crescente per $\sqrt{2} < x$.

Quindi in $x = -\sqrt{2}$ abbiamo un punto di massimo, con $f\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$ mentre in $x = \sqrt{2}$ abbiamo un punto di minimo, con $f\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$.

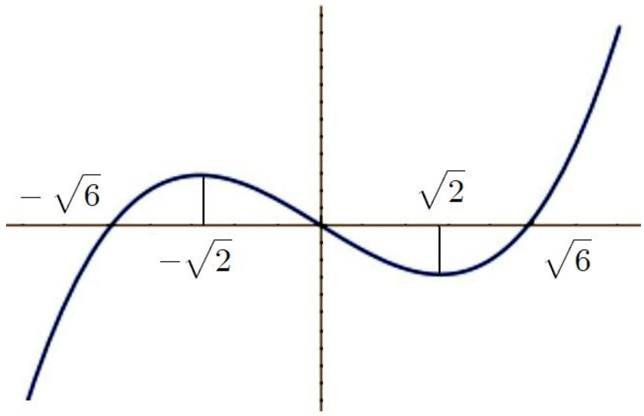
Da $f'(x) = 3x^2 - 6$ avremo poi $f''(x) = 6x > 0$ per $x > 0$.

Quindi $f(x)$ è funzione concava per $x < 0$, convessa per $x > 0$.

Nel punto $x = 0$ abbiamo un punto di flesso con $f(0) = 0$.

Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}\,; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x + 1}.$$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)^{e^x+1} = \lim\limits_{t\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+1} = e$

in quanto $t = e^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

3) Date le funzioni $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 1$, dopo aver determinato le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, risolvere la disequazione $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$.

Da $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x + 1$ si ha :
$f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$; avremo poi :
$g(f(x)) = g(x^2 - 2) = x^2 - 2 + 1 = x^2 - 1$. Sarà poi:
$f(g(x)) + g(f(x)) = x^2 + 2x - 1 + x^2 - 1 = 2x^2 + 2x - 2 \leq 10 \Rightarrow x^2 + x - 6 \leq 0$.
Da $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \leq 0$ segue $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$ per $-3 \leq x \leq 2$.

4) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx}$, sapendo che essa presenta, sia sulla destra che sulla sinistra, un asintoto obliquo di equazione $y = x$ e che interseca l'asse delle ascisse nel punto $(1, 0)$, determinare i valori dei parametri a, b e c.

Se la funzione ha per asintoto obliquo la retta di equazione $y = x$, ovvero una retta con $m = 1$ e $q = 0$, essendo:
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ed inoltre $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx$, avremo:
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2} = \dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = 1$; sarà poi
$q = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + ax + b}{x} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + ax + b - x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax + b}{x} = a = 0$ avremo
$f(x) = \dfrac{x^2 + b}{x}$ e dato che la funzione interseca l'asse delle ascisse nel punto $(1, 0)$, dovrà essere $f(1) = \dfrac{1+b}{1} = 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$.
Sarà quindi infine $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k = 0)$ ed avremo:
$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}\left(1+e^{2x}\right) = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow$$
$= \dfrac{1}{2}\log t = \dfrac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right)$ e da questo
$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \left(\tfrac{1}{2}\log\left(1+e^{2x}\right)\right|_0^1 = \tfrac{1}{2}\left[\log\left(1+e^2\right) - \log(1+1)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\left(1+e^2\right) - \log 2\right] = \log\left(\frac{1+e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}\,.$$

6) Data la funzione $f(x,y)=y^2+xy^2+x^2-14x$, determinare la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y)=\left(f'_x,f'_y\right)=\left(y^2+2x-14;2y+2xy\right)$ per cui:
$\begin{cases} y^2+2x-14=0 \\ 2y(1+x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=14 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2=16 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=\pm 4 \\ x=-1 \end{cases}.$
Abbiamo tre punti stazionari: $(7,0)$, $(-1,4)$, $(-1,-4)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}(7,0)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(7,0)|=2>0 \\ |\mathbb{H}_2(7,0)|=32>0 \end{cases}$ il punto $(7,0)$ è un punto di minimo;
$\mathbb{H}(-1,4)=\begin{Vmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 0 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$|\mathbb{H}_2(-1,4)|=-64<0,$ il punto $(-1,4)$ è un punto di sella;
$\mathbb{H}(-1,-4)=\begin{Vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 0 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$|\mathbb{H}_2(-1,-4)|=-64<0,$ il punto $(-1,-4)$ è un punto di sella;

7) Data la funzione $f(x)=\frac{5}{x}$, si consideri la retta tangente al suo grafico nel punto $x=1$; siano A e B i punti in cui tale retta tangente taglia gli assi coordinati e sia O l'origine degli assi. Determinare l'area del triangolo AOB.

L'equazione della retta tangente è data da $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.
Da $f(x)=\frac{5}{x}$ segue $f(1)=5$, da $f'(x)=-\frac{5}{x^2}$ segue $f'(1)=-5$ per cui l'equazione della retta tangente sarà data da:
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-5=-5\,(x-1)\Rightarrow y=-5x+10.$
Se $x=0\Rightarrow y=10$ mentre $y=0$ se $x=2$.
I vertici del triangolo sono $(0,10)$, $(0,0)$ e $(2,0)$ per cui avremo infine:
Area triangolo AOB $=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2=10$.

8) Data la matrice $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$, trovare tutti i vettori che soddisfano all'uguaglianza $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{X}$.

Risulta $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} x+0+z \\ 0+y+0 \\ x+0+z \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{Vmatrix}$; affinchè sia $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{X}$ dovrà essere $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$ ovvero $\begin{cases} x+z=x \\ y=y \\ x+z=z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$ e quindi tutti i vettori che soddisfano all'uguaglianza $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{X}$ sono i vettori $(0,y,0)$, $\forall y\in\mathbb{R}$.

9) Date le tre proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, nell'ipotesi che sia la proposizione $P_1 : \mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$ che la proposizione $P_2 : \mathbb{C} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})$ siano vere, si determini se risulta sempre vera la proposizione $P : (\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{A}$.

Costruita la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C}$	$\mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$	$\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}$	$\mathbb{C} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})$	$\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C}$	$(\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{A}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1

bisogna considerare dove, per ipotesi, sia $P_1 : \mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$ che $P_2 : \mathbb{C} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})$ siano vere; quindi si devono considerare tutte le righe meno la sesta e la settima.
Ma nella quinta riga la proposizione $P : (\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{A}$ risulta falsa, e quindi non è vero che quando $P_1 : \mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$ e $P_2 : \mathbb{C} \Rightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})$ sono vere allora anche $P : (\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{A}$ risulta vera.

10) Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, si verifichi che essa soddisfa al Teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 3]$, determinando poi il punto x_0 risultante dall'applicazione del Teorema.

La funzione data è un polinomio, quindi continua e derivabile su tutta la retta reale.
Risulta poi $f(0) = f(3) = 1$ e quindi esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo $[0, 3]$ in cui risulta $f'(x_0) = 0$. Da $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\,(x-2) = 0$ segue $x_0 = 2$.