

## COMPITI DI MATEMATICA GENERALE AA. 2024/25

### Prova Intermedia Anno 2024-Compito A1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + x^3} \right)^{\frac{1-x^2}{x}}.$$

2) Date le funzioni  $f(x) = \log \left( \frac{1+x}{x} \right)$  e  $g(x) = 2x - 1$ , determinare l'espressione delle funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$  e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+kx)}{3x} = 3$ .

4) Date le tre generiche proposizioni  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$ , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione  $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{C} \wedge \neg \mathbb{A})$  nell'ipotesi che la proposizione  $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C})$  sia falsa.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione  $f(x) = \log \left( \frac{3^x - 2}{1 - x} \right)$ .

### Prova Intermedia Anno 2024-Compito B1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\log(1-x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1-3x+2x^2}{1+2x+3x^2} \right)^{1-x}.$$

2) Date le funzioni  $f(x) = \log \left( \frac{x+2}{x} \right)$  e  $g(x) = 3x - 1$ , determinare l'espressione delle funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$  e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{kx^2} = 5$ .

4) Date le tre generiche proposizioni  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$ , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione  $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}) \wedge (\neg \mathbb{B} \vee \mathbb{C})$  nell'ipotesi che la proposizione  $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$  sia vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione  $f(x) = \log \left( \frac{2^x - 3}{x - 2} \right)$ .

### Prova Intermedia Anno 2024-Compito C1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x^2}{1+x^3} \right)^{1+x^2}.$$

2) Date le funzioni  $f(x) = \log \left( \frac{x+1}{2x} \right)$  e  $g(x) = 2x - 1$ , determinare l'espressione delle funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$  e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+kx)^2 - 1}{2x} = 4$ .

4) Date le tre generiche proposizioni  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$ , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione  $(\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}) \Rightarrow (\neg \mathbb{C} \vee \mathbb{B})$  nell'ipotesi che la proposizione  $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$  sia falsa.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3-e^x}}$ .

**Prova Intermedia Anno 2024-Compito D1**

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin(x^2-x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x+3x^2}{2-x+2x^2} \right)^{2-x}.$$

2) Date le funzioni  $f(x) = \log\left(\frac{2x-1}{x}\right)$  e  $g(x) = x+2$ , determinare l'espressione delle funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$  e di queste determinare poi l'espressione dell'inversa.

3) Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - e^{kx}}{x} = 0$ .

4) Date le tre generiche proposizioni  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$ , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione  $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C})$  o  $(\text{non } \mathbb{A} \wedge \mathbb{B})$  nell'ipotesi che la proposizione  $(\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$  sia vera.

5) Determinare il campo d'esistenza della funzione  $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 2}{x - 3}}$ .

**Prova Intermedia Anno 2024-Compito A2**

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x+x^2)}{\sin(2x-x^2)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4+3x}{3+3x} \right)^{2x-1}.$$

2) Date le due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , sapendo che  $f(x) = 2^{x-1}$  e che  $f(g(x)) = 3x-5$ , determinare la funzione  $g(x)$  e l'espressione dell'inversa di  $g(x)$ .

3) Data la funzione  $f(x) = 2^{3x-1} - k$  si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto  $(0, 6)$ . Per quale valore del parametro  $k$  il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3?

4) Determinare il campo d'esistenza della funzione  $f(x) = \sqrt{2 - \log_2(2-x)}$ .

5) Date le proposizioni  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , e data la proposizione  $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow \text{non } \mathbb{B}) \vee (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ , determinare se la proposizione  $\mathbb{P}$  risulti una tautologia.

**Prova Intermedia Anno 2024-Compito B2**

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin 2x)}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3+2x}{2+2x} \right)^{3x}.$$

2) Date le due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , sapendo che  $f(x) = 3^{x+1}$  e che  $f(g(x)) = 5x+2$ , determinare la funzione  $g(x)$  e l'espressione dell'inversa di  $g(x)$ .

3) Data la funzione  $f(x) = \log(x+1) - k$  si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto  $(0, 2)$ . Per quale valore del parametro  $k$  il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 3?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione  $f(x) = \sqrt{1 - \log_3(6-x)}$ .

5) Date le proposizioni  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , e data la proposizione  $\mathbb{P} : (\text{non } \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ , determinare se la proposizione  $\mathbb{P}$  risulti una tautologia.

**Prova Intermedia Anno 2024-Compito C2**

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^3 - 1}{\log(1+3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+4}{x+3} \right)^{2x+3}.$$

2) Date le due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , sapendo che  $f(x) = 2^{x+1}$  e che  $f(g(x)) = 2x - 3$ , determinare la funzione  $g(x)$  e l'espressione dell'inversa di  $g(x)$ .

3) Data la funzione  $f(x) = e^{2-x} - k$  si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto  $(0, 4)$ . Per quale valore del parametro  $k$  il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione  $f(x) = \sqrt{1 - \log_2(4 - x)}$ .

5) Date le proposizioni  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , e data la proposizione  $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}) \vee (\text{non } \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$ , determinare se la proposizione  $\mathbb{P}$  risulti una tautologia.

### Prova Intermedia Anno 2024-Compito D2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{2^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+4}{2x+3} \right)^{3x-1}.$$

2) Date le due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , sapendo che  $f(x) = 3^{2-x}$  e che  $f(g(x)) = 2x + 1$ , determinare la funzione  $g(x)$  e l'espressione dell'inversa di  $g(x)$ .

3) Data la funzione  $f(x) = \log(3 - x) - k$  si considerino il punto in cui essa taglia l'asse delle ascisse, l'origine degli assi ed il punto  $(0, 4)$ . Per quale valore del parametro  $k$  il triangolo avente questi tre punti come vertici ha area uguale a 2?

4) Determinare il campo d'esistenza per la funzione  $f(x) = \sqrt{2 - \log_3(5 - x)}$ .

5) Date le proposizioni  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , e data la proposizione  $\mathbb{P} : (\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{A} \wedge \text{non } \mathbb{B})$ , determinare se la proposizione  $\mathbb{P}$  risulti una tautologia.

### I Appello Sessione Invernale 2025 - Compito A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = (3 - x)e^{x+2}$ .

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3 - x + x^2}{2 + x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2+x}}.$$

3) Date  $f(x) = e^{1-2x}$  e  $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$ , siano  $f^{-1}(x)$  e  $g^{-1}(x)$  le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta  $f^{-1}(g^{-1}(x))$ .

4) Calcolare  $\int_0^1 2x^3 - 3\sqrt[3]{x} + e^{3x} dx$ .

5) Data  $f(x, y) = 3x^2 - 3x^2y + 2y^2 - 3y$ , si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Data la funzione  $f(x) = \log(x - 2)$ , determinare il punto  $(x_0, y_0)$  in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

7) Data la funzione  $f(x) = 3 \log 2x$  sapendo che il suo differenziale  $df(2)$  è uguale a 0,1 si determini il valore dell'incremento  $dx$ .

8) Date le matrici  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  e  $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$  trovare il vettore  $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  per

il quale il vettore  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$  risulta perpendicolare al vettore  $(1, -1)$  e di modulo pari a 9.

9) Si verifichi se la proposizione  $[non(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})] \Rightarrow (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$ , dove  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

10) Determinare dove risulta convessa la funzione  $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 3)$ .

### I Appello Sessione Invernale 2025 - Compito B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$ .

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{1 - \cos 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - x + 3x^2}{2 + 3x + 2x^2} \right)^{\frac{1-x^2}{2-x}}.$$

3) Date  $f(x) = e^{3+x}$  e  $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$ , siano  $f^{-1}(x)$  e  $g^{-1}(x)$  le espressioni delle loro funzioni inverse. Determinare l'espressione della funzione composta  $f^{-1}(g^{-1}(x))$ .

4) Calcolare  $\int_0^1 e^{2x} - 3x^2 - 2\sqrt{x} \, dx$ .

5) Data  $f(x, y) = 2x^2 + 3x + 3y^2 + 3xy^2$ , si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Data la funzione  $f(x) = \log(x + 3)$ , determinare il punto  $(x_0, y_0)$  in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta di equazione  $y = \frac{1}{3}x - 1$ , e determinare poi l'equazione di tale retta tangente.

7) Data la funzione  $f(x) = 2 \log 3x$  sapendo che il suo differenziale  $df(3)$  è uguale a 0,1 si determini il valore dell'incremento  $dx$ .

8) Date le matrici  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$  e  $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$  trovare il vettore  $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

per il quale il vettore  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$  risulta perpendicolare al vettore  $(1, -1)$  e di modulo pari a 8.

9) Si verifichi se la proposizione  $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow non(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ , dove  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

10) Determinare dove risulta convessa la funzione  $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 4)$ .

### II Appello Sessione Invernale 2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = e^x - e^{1-x}$ .

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x)}{\log(1 - x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - \sin x}{2x^2 - \cos x} \right)^{\frac{x^2}{1+x}}.$$

3) Date  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = \log x - 1$ , determinare l'espressione della funzione composta  $f(g(x))$ , il suo campo di esistenza, dove risulta invertibile e l'espressione della sua funzione inversa.

4) Calcolare  $\int_1^e \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x^3} \, dx$ .

5) Data  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2$ , si determinino i suoi eventuali punti di massimo e minimo relativo.

6) Sapendo che la retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  nel punto  $x_0$  ha equazione  $y = -2$ , trovare  $x_0$ .

7) Determinare, usando la Regola di De L'Hopital, il valore del  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}$ .

8) Data la matrice  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} m & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$  ed il vettore  $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ , determinare il valore

di  $m$  in modo che il vettore  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$  risulti parallelo al vettore  $\mathbb{Y} = \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix}$ .

9) Date le tre proposizioni:

$\mathbb{A}$  : la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

$\mathbb{B}$  : la funzione  $g(x) = e^x$  è derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

$\mathbb{C}$  : se due funzioni sono derivabili, anche il loro prodotto è una funzione derivabile;  
dopo aver determinato verità o falsità di ciascuna delle tre proposizioni, determinare verità o falsità della proposizione :  $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{C})$ .

10) Data la funzione  $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 3x$ , se ne determini l'espressione del polinomio di Mac Laurin di secondo grado.

#### Appello Sessione Straordinaria I 2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = x^3 - 6x$ .

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^{e^x + 1}.$$

3) Date le funzioni  $f(x) = x^2 - 2$  e  $g(x) = x + 1$ , dopo aver determinato le funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$ , risolvere la disequazione  $f(g(x)) + g(f(x)) \leq 10$ .

4) Data la funzione  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx}$ , sapendo che essa presenta, sia sulla destra che sulla sinistra, un asintoto obliquo di equazione  $y = x$  e che interseca l'asse delle ascisse nel punto  $(1, 0)$ , determinare i valori dei parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

5) Calcolare  $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$ .

6) Data la funzione  $f(x, y) = y^2 + xy^2 + x^2 - 14x$ , determinare la natura dei suoi punti stazionari.

7) Data la funzione  $f(x) = \frac{5}{x}$ , si consideri la retta tangente al suo grafico nel punto  $x = 1$ ; siano A e B i punti in cui tale retta tangente taglia gli assi coordinati e sia O l'origine degli assi. Determinare l'area del triangolo AOB.

8) Data la matrice  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  ed il vettore  $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ , trovare tutti i vettori che soddisfano all'uguaglianza  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}$ .

9) Date le tre proposizioni  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$ , nell'ipotesi che sia la proposizione  $P_1 : \mathbb{B} \Rightarrow (\mathbb{A} \circ \mathbb{C})$  che la proposizione  $P_2 : \mathbb{C} \Rightarrow (\mathbb{A} \circ \mathbb{B})$  siano vere, si determini se risulta sempre vera la proposizione  $P : (\mathbb{B} \circ \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{A}$ .

10) Data la funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ , si verifichi che essa soddisfa al Teorema di Rolle nell'intervallo  $[0, 3]$ , determinando poi il punto  $x_0$  risultante dall'applicazione del Teorema.

**I Appello Sessione Estiva 2025**

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = x \cdot e^{2x}$ .

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\log(1+x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2+x+3x^2}{3+x+2x^2} \right)^{1-x}.$$

3) Date le funzioni  $f(x) = \frac{1+x}{x}$ ,  $g(x) = 2^x - 1$  e  $h(x) = 3x - 1$ , determinare l'espressione della funzione composta  $f(g(h(x)))$  e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

4) Date le funzioni  $f(x) = 3^{2x+1} + k$  e  $g(x) = \log(x-2)$ , siano A il punto in cui  $f(x)$  taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione  $g(x)$  taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro  $k > 0$  in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 7.

5) Calcolare  $\int_0^1 e^{2x} - e^{3x} + e^x dx$ .

6) Data la funzione  $f(x, y) = x^2y - y^2 + xy$ , determinare la natura dei suoi punti stazionari.

7) Data la funzione  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  si determinino i punti nei quali la retta tangente al grafico della funzione nel punto  $x = 1$  taglia l'asse delle ascisse e quello delle ordinate.

8) Data la matrice  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix}$  ed il vettore  $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$  determinare il valore del parametro  $k$  affinché il vettore  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$  sia perpendicolare al vettore  $(1, -1, 1)$ .

9) Date le generiche proposizioni  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$  e  $\mathbb{C}$ , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione  $P : (\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$  nell'ipotesi che la proposizione  $(\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B})$  sia vera.

10) Determinare l'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado per la funzione  $f(x) = e^x - \log(x+1)$ .