Compito di ANALISI MATEMATICA 6/6/2025

I M 1) Se $z = \dfrac{3-i}{1-2i}$, calcolare $\sqrt[3]{z}$.

Sarà $z = \dfrac{3-i}{1-2i} \cdot \dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{3+6i-i+2}{1+4} = \dfrac{5+5i}{5} = 1+i$.
Essendo $1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ avremo:
$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2$.
Se $k=0$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)$;
se $k=1$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{9\pi}{12}\right) =$
$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\,i$;
se $k=2$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua nel punto $(0,0)$, e se del caso verificare poi se essa fosse anche differenziabile in $(0,0)$.

Valutiamo se la funzione è continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^2\,(\varrho\cos^3\vartheta + \mathrm{sen}^2\,\vartheta)}{\varrho^2} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\cos^3\vartheta + \mathrm{sen}^2\,\vartheta = \mathrm{sen}^2\,\vartheta$
e quindi il limite vale 0 solo per particolari valori di ϑ per cui la funzione non è continua e quindi neppure differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^2e^y - ye^x = 0$ soddisfatta nel punto $(1,1)$, verificare se con essa si possa definire, in un intorno opportuno, una funzione $y = y(x)$ oppure una funzione $x = x(y)$. Di tale funzione calcolare nel punto opportuno derivata prima e seconda.

Da $\nabla f(x,y) = \left(2x\,e^y - ye^x; x^2e^y - e^x\right)$ si ha $\nabla f(1,1) = (2e-e; e-e) = (e;0)$ ed essendo $f'_x(1,1) = e \neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $x = x(y)$, mentre essendo $f'_y(1,1) = 0$ non si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.
Risulta $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(1) = -\dfrac{f'_y(1,1)}{f'_x(1,1)} = -\dfrac{0}{e} = 0$.
Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2\,e^y - ye^x & 2x\,e^y - e^x \\ 2x\,e^y - e^x & x^2e^y \end{Vmatrix}$ sarà $\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} e & e \\ e & e \end{Vmatrix}$. Dalla:
$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = -\dfrac{f''_{yy} + 2\,f''_{xy}\,(x') + f''_{xx}\,(x')^2}{f'_x}$ si ha :
$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(1) = -\dfrac{e + 2\,(e)(0) + (e)(0)^2}{e} = -1$.
Essendo $x'(1) = 0$ e $x''(1) = -1 < 0$, in tale punto abbiamo un punto di massimo.

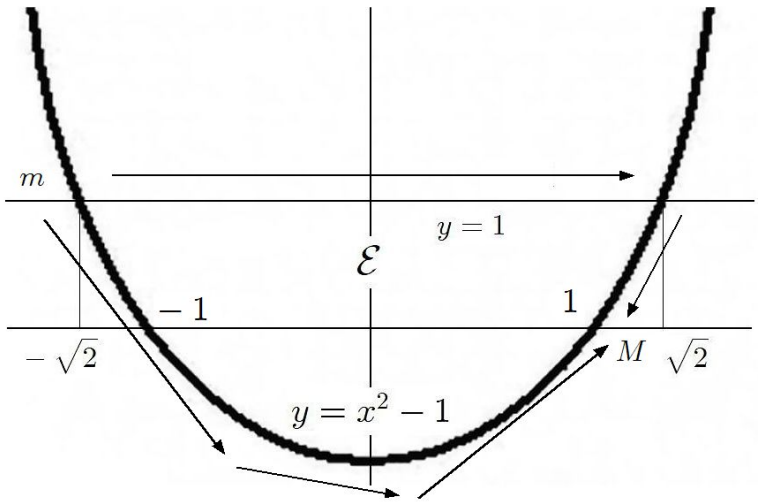
I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x-\sqrt{3}y}$, determinare le direzioni $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ nelle quali risulta $\mathcal{D}_v f\,(0,0) = 0$.

Essendo la funzione differenziabile, risulta $\mathcal{D}_v f\,(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.
Da $\nabla f(x,y) = \left(e^{x-\sqrt{3}y},\, -\sqrt{3}\, e^{x-\sqrt{3}y}\right)$ risulta $\nabla f(0,0) = \left(1,\, -\sqrt{3}\right)$ e quindi:
$\mathcal{D}_v f(0,0) = \left(1,\, -\sqrt{3}\right) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha - \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha$
ovvero $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ oppure $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y + 1 \\ \text{s.v.: } x^2 - 1 \le y \le 1 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y + 1 \\ x^2 - y - 1 \le 0 \\ y - 1 \le 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}.$$



La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = 2x - y + 1 - \lambda_1\left(x^2 - y - 1\right) - \lambda_2(y-1)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \neq 0 \\ \Lambda'_y = -1 \neq 0 \\ x^2 - y \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione .}$$

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ y = 0 \\ y \leq 1 : \text{vera} \end{cases}$$

il punto $P_1 : (1, 0)$, con $\lambda_1 = 1 > 0$ potrebbe essere punto di massimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \neq 0 \\ \Lambda'_y = -1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 \\ x^2 - 1 \leq y \end{cases} \text{ non ci sono soluzioni .}$$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \lambda_2 = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} : \text{il punto } P_2 : \left(\sqrt{2}; 1\right), \text{ con } \lambda_1 > 0 \text{ e}$$

$\lambda_2 < 0$ non è ne punto di massimo ne punto di minimo;

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ \lambda_2 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} : \text{il punto } P_3 : \left(-\sqrt{2}; 1\right), \text{ con } \lambda_1 < 0$$

e $\lambda_2 < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

Avendo trovato un solo candidato sia per il punto di massimo che per quello di minimo, il punto $P_1 : (1, 0)$, con $f(1, 0) = 3$ è il punto di massimo mentre il punto $P_3 : \left(-\sqrt{2}; 1\right)$, con $f\left(-\sqrt{2}; 1\right) = -2\sqrt{2}$ è il punto di minimo.

Se, tanto per completezza, studiamo la funzione sulla frontiera di $\mathcal{E}$, esaminiamo i punti dei due vincoli:
se $y = 1 \Rightarrow f(x, 1) = 2x - 1 + 1 = 2x$ funzione strettamente crescente;
se $y = x^2 - 1 \Rightarrow f\left(x, x^2 - 1\right) = 2x - x^2 + 1 + 1 = -x^2 + 2x + 1$;
da $f(x) = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \geq 0$ per $x \leq 1$ e quindi si ritrovano un punto di massimo in $x = 1$ ed un punto di minimo in $x = -\sqrt{2}$.

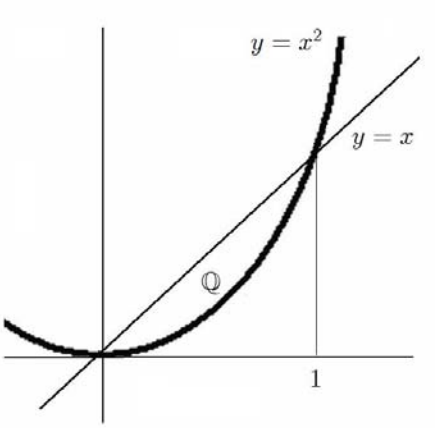
II M 2) Data $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 3xy + 3y$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

La funzione è una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:
$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 6x - 3y = 0 \\ f'_y = 2y - 3x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 4x - 3x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \end{cases}$.
Abbiamo un solo punto stazionario: $P_0 : (-3, -6)$.
Da $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(-3, -6) = \begin{Vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0 \end{cases}$.
Ne segue che $(-3, -6)$ è un punto di minimo.

II M 3) Tra tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = -x - y \end{cases}$ si determini quella per cui $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x - y = e^t \\ x + y' + y = 0 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale:
$\begin{Vmatrix} D-1 & -1 \\ 1 & D+1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^t \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ 1 & D+1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} e^t & -1 \\ 0 & D+1 \end{vmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(D^2 - 1 + 1\big)(x) = \big(D^2\big)(x) = (D+1)\big(e^t\big) + 0 = e^t + e^t = 2e^t$.
Quindi l'equazione sarà: $x'' = 2e^t$.
Risolvendo l'equazione omogenea, da $D^2 = 0$ abbiamo la soluzione doppia $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 + c_2\, t$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t) = ke^t$.
Sarà : $x'_0(t) = x''_0(t) = ke^t$ e quindi, andando a sostituire nella $x'' = 2e^t$ otteniamo:
$ke^t = 2e^t \Rightarrow k = 2$ e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea:
$x(t) = c_1 + c_2\, t + 2e^t$.
Potevamo operare anche in altro modo:
da $x''_0(t) = 2e^t \Rightarrow x'_0(t) = \int 2e^t \,\mathrm{d}t + k = 2e^t + k \Rightarrow x_0(t) = \int 2e^t + k \,\mathrm{d}t + m \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0(t) = 2e^t + kt + m$. Posto $m = c_1$ e $k = c_2$ si ritrova la precedente soluzione.
Dalla prima equazione $x' = x + y + e^t$ ricaviamo $y = x' - x - e^t$ e quindi:
$y(t) = c_2 + 2e^t - c_1 - c_2\, t - 2e^t - e^t = -c_1 + c_2 - c_2\, t - e^t$
e quindi la soluzione generale del sistema sarà:
$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2\, t + 2e^t \\ y(t) = -c_1 + c_2(1-t) - e^t \end{cases}$.
Dalla $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2 = 1 \\ -c_1 + c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ da cui la soluzione particolare:
$\begin{cases} x(t) = -1 + 2e^t \\ y(t) = 1 - e^t \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq x\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\, y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.



Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq y \leq x\right\}$, normale rispetto all'asse x, da $y = x$ segue $x^2 = x$ da cui otteniamo $x = 0$ e $x = 1$ ed avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x\, y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \mathrm{d}x \right.$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \right.$$