COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2024/25

Prova Intermedia 2024

I M 1) Calcolare le radici terze del numero $e^{\log 8+\frac{3}{4}\pi i}$, limitandosi ad esprimerle in forma trigonometrica.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, si verifichi se risulta continua e poi anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x,y)=x^3+y^3$ ed il versore u del vettore $(1,1)$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulta: $\begin{cases}\mathcal{D}_u f(x,y)=3\sqrt{2}\\ \mathcal{D}^2_{u,u} f(x,y)=0\end{cases}$.

I M 4) Determinare se con l'equazione $f(x,y)=x^2\cdot\log y+y\,e^x-x=1$, soddisfatta nel punto $P=(0,1)$, è possibile definire una funzione implicita. In caso affermativo, calcolarne le derivate prima e seconda. Che tipo di punto viene determinato ?

I M 5) Verificare se con il sistema $\begin{cases}f(x,y,z)=xy+xz-2yz=0\\ g(x,y,z)=2xyz-x^2z-y^3z=0\end{cases}$ si può definire, in un intorno di $P(1,1,1)$, una funzione in forma implicita. Se ciò è possibile, definire tale funzione e calcolarne le derivate prime.

I Appello Sessione Invernale 2025

I M 1) Se $z=\sqrt{3}-i$, calcolare $\sqrt{z}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=x\,|y|-|x|\,y$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x^2e^y-ye^x-x+y=0$ ed il punto $P_0=(1,1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x\to y(x)$ da questa definita.

I M 4) Data $f(x,y)=x\,y$, detti v e w i versori di $\mathbb{V}=(1,1)$ e $\mathbb{W}=(1,-1)$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=k$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0)=m$, determinare i valori di k e m affinchè risulti $(x_0,y_0)=(-2,3)$. Calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=2x-y\\ \text{s.v.: } 4x^2+y^2\leq 4\end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases}x'=x-y+e^t\\ y'=-4x+y+1\end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases}x\,y'=1+y^2\\ y(1)=1\end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 4; 0\leq x\leq 1; 0\leq y\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Invernale 2025

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^5=z$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=e^{x-y}-x+2y=1$ ed il punto $\mathrm{P}_0=(0,0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y=y(x)$ definibile con tale equazione.

II M 4) Data $f(x,y)=x^2y-2xy$, siano v il versore di $(1,1)$ e w quello di $(1,-1)$. Determinare tutti i punti (x_0,y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=\sqrt{2} \\ \mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)=0 \end{cases}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x+y \\ \text{s.v.} \begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ 1-x\leq y \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x,y,z)=2x^2-3x-3xy^2+3y^2+z^2$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il sistema lineare di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x+y+e^t \\ y'=x+y+2 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1; 1-x\leq y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Appello Sessione Straordinaria I 2025

I M 1) Dopo aver determinato le quattro soluzioni complesse dell'equazione $z^4+1=0$, se ne calcoli il loro prodotto.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, si verifichi che essa è continua $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e si determini poi se essa risulta anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x^2\log y-y\log x=0$ soddisfatta in $(1,1)$, verificare che con essa si definisce, in un intorno di $x_0=1$, una funzione $y=y(x)$. Approssimare tale funzione con un opportuno polinomio di II^ grado.

I M 4) Data la funzione $f(x,y)=e^{x-y}$, determinare tutte le direzioni $\boldsymbol{v}$ nelle quali, qualunque sia il punto (x_0,y_0), risulta $\mathcal{D}_{\boldsymbol{v}} f\,(x_0,y_0)=0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x-y+1 \\ \text{s.v.: } x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-3xy+3yz$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Tra tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x-2y+t \\ y'=x-y-t \end{cases}$ si determini quella per cui $\begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 2; 1\leq y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

I Appello Sessione Estiva 2025

I M 1) Se $z = \dfrac{3-i}{1-2i}$, calcolare $\sqrt[3]{z}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua nel punto $(0,0)$, e se del caso verificare poi se essa fosse anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^2 e^y - y e^x = 0$ soddisfatta nel punto $(1,1)$, verificare se con essa si possa definire, in un intorno opportuno, una funzione $y = y(x)$ oppure una funzione $x = x(y)$. Di tale funzione calcolare nel punto opportuno derivata prima e seconda.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x-\sqrt{3}y}$, determinare le direzioni $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ nelle quali risulta $\mathcal{D}_v f(0,0) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - y + 1 \\ \text{s.v.: } x^2 - 1 \le y \le 1 \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 3xy + 3y$, si analizzi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Tra tutte le soluzioni del sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = -x - y \end{cases}$ si determini quella per cui $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \le y \le x\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\,y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Estiva 2025

I M 1) Se $z = 1 + i$, calcolare $\sqrt[3]{z^4}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua nel punto $(0,0)$, e se del caso verificare poi se essa fosse anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x^3y^2z - xy^2z^3 = 0 \\ g(x,y,z) = x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z} + x - y = 0 \end{cases}$ e il punto $\mathrm{P} = (1,1,1)$ che lo soddisfa, verificare che con esso è definibile una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$ e di questa calcolare le derivate prime.

I M 4) Data $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, siano v e w i versori di $(1,1)$ e $(1,-1)$. Sapendo che $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_w f(\mathrm{P}_0) = 0$, si determini P_0.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v. } x^2 + 4y^2 \le 1 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari: $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + t \end{cases}$.

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1; 0 \le x \le y\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\,y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.