# Compito di ANALISI MATEMATICA 4/7/2025

I M 1) Se $z = 1 + i$, calcolare $\sqrt[3]{z^4}$.

Da $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ otteniamo:

$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -4\,.$

Quindi $\sqrt[3]{z^4} = \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2\,.$

Se $k = 0$ : $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$;

se $k = 1$ : $\sqrt[3]{4}\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = -\sqrt[3]{4}$;

se $k = 2$ : $\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ .

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua nel punto $(0,0)$, e se del caso verificare poi se essa fosse anche differenziabile in $(0,0)$.

Valutiamo se la funzione è continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\left(\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right) = 0\,.$$

Dato che $\left|\varrho\left(\cos^3\vartheta - \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right)\right| < 2\,\varrho$ la convergenza è uniforme per cui la funzione è continua anche in $(0,0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 - 0^3}{h^2 + 0^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0^3 - h^3}{0^2 + h^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h^3}{h^3} = -1\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1, -1)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 - (1, -1)(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3 - (x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3 - x^3 - xy^2 + yx^2 + y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right)}{\varrho^3} =$$

$= \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\right)$ e quindi il limite vale 0 solo per particolari valori di $\vartheta$ per cui la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x^3y^2z - xy^2z^3 = 0 \\ g(x,y,z) = x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z} + x - y = 0 \end{cases}$ e il punto $\mathrm{P} = (1,1,1)$ che lo soddisfa, verificare che con esso è definibile una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$ e di questa calcolare le derivate prime.

Sia $f$ che $g$ sono palesemente funzioni differenziabili in $\mathbb{R}^3$; passiamo quindi a costruire la matrice Jacobiana: $J(f,g) = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \begin{Vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{Vmatrix}$ e quindi:

$$J(f,g) = \begin{Vmatrix} 3x^2y^2z - y^2z^3 & 2x^3yz - 2xyz^3 & x^3y^2 - 3xy^2z^2 \\ e^{y-z} - y\,e^{x-z} + 1 & x\,e^{y-z} - e^{x-z} - 1 & -x\,e^{y-z} + y\,e^{x-z} \end{Vmatrix}$$ da cui:

$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. Dato che $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$, per la quale avremo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{-2} = 1\,;$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{-2} = 1\,.$$

I M 4) Data $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, siano $v$ e $w$ i versori di $(1,1)$ e $(1,-1)$. Sapendo che $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_w f(\mathrm{P}_0) = 0$, si determini $\mathrm{P}_0$.

Essendo funzione differenziabile, sarà $\mathcal{D}_v f\,(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot v$ e $\mathcal{D}_w f\,(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot w$.
Essendo: $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $w = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\nabla f(x,y) = (2x - 3y, 4y - 3x)$, avremo:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = (2x - 3y, 4y - 3x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \\ \mathcal{D}_w f(\mathrm{P}_0) = (2x - 3y, 4y - 3x) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \end{cases}$$ ovvero:

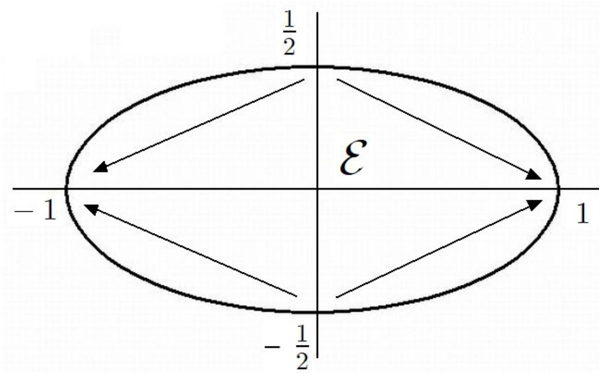
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4y - 3x = 2 \\ 2x - 3y - 4y + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 2 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 5x - 7x - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Quindi $\mathrm{P}_0 = (-7, -5)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v. } x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$.

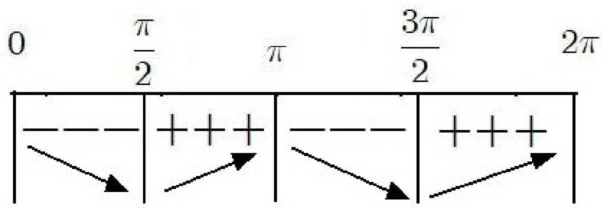
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, il vincolo è qualificato, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.




Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda\left(x^2+4y^2-1\right)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda = 0$ :
$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = -2y = 0 \\ x^2+4y^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2+4y^2 \le 1 \end{cases}$. Ma $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ ed essendo $|\mathbb{H}_2|(0,0) = -4 < 0$ il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

2) caso $\lambda \neq 0$ :
$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = -2y - 8\lambda y = 0 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\,(1-\lambda) = 0 \\ -2y\,(1+4\lambda) = 0 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0+0 = 1\, n.v. \end{cases} \cup$
$\cup \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \\ 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \\ \text{impossibile} \end{cases}$.
I punti $(1,0)$ e $(-1,0)$, con $\lambda = 1 > 0$ potrebbero essere punti di massimo, i punti $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, con $\lambda = -\dfrac{1}{4} < 0$ potrebbero essere punto di minimo.
Completiamo lo studio analizzando il comportamento della funzione nei punti della frontiera.
Essendo una ellisse, usiamo la forma parametrica $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{cases}$ ed avremo:
$f(t) = \cos^2 t - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t \Rightarrow f'(t) = 2\cos t\,(-\operatorname{sen} t) - \dfrac{1}{4}\, 2\operatorname{sen} t\cos t = -4\operatorname{sen} t\cos t \Rightarrow$
$f'(t) = -2\operatorname{sen} 2t > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2t < 0$ vera per :
$\pi < 2t < 2\pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < t < \pi$ e per $3\pi < 2t < 4\pi \Rightarrow \dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.




Per $t = \dfrac{\pi}{2}$ otteniamo il punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e per $t = \dfrac{3\pi}{2}$ otteniamo il punto $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ che vedono confermata la loro natura di punti di minimo, $t = \pi$ otteniamo il punto $(-1,0)$ e per $t = 2\pi$ otteniamo il punto $(1,0)$ che vedono confermata la loro natura di punti di massimo.

In conclusione, in $(1,0)$ e $(-1,0)$ con $f(1,0)=f(-1,0)=1$ abbiamo punti di massimo, in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ con $f\left(0,\frac{1}{2}\right)=f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ abbiamo punti di minimo.

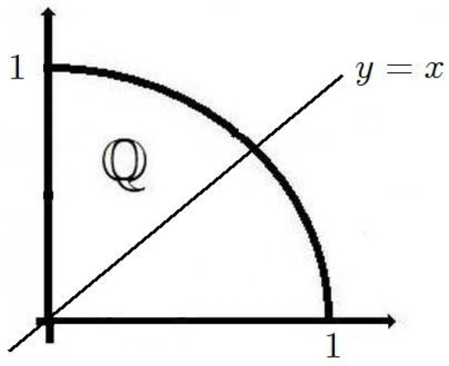
II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'=\frac{y^2}{x} \\ y(1)=1 \end{cases}$ .

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili, per cui, posto $y^2 \neq 0$ avremo:
$y'=\dfrac{y^2}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{y^2}\,y'=\dfrac{1}{x}$ e passando alle primitive: $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,y'\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y=\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+k \Rightarrow$
$-\dfrac{1}{y}=\log x+k \Rightarrow y=\dfrac{1}{m-\log x}$ , avendo posto $m=-k$ .
Da $y(1)=1 \Rightarrow 1=\dfrac{1}{m} \Rightarrow m=1$ e $k=-1$ .
E quindi la soluzione particolare $y=\dfrac{1}{1-\log x}$ .
La $y^2=0 \Rightarrow y=0$ è una soluzione particolare che si ottiene per $m \to \infty$ .

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari: $\begin{cases} x'=y+1 \\ y'=x+t \end{cases}$ .

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x'-y=1 \\ -x+y'=t \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale:
$\begin{Vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ t \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{vmatrix}(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ t & D \end{vmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(D^2-1\right)(x)=(D)(1)+t=0+t=t$ .
Quindi l'equazione sarà: $x''-x=t$ .
Risolvendo l'equazione omogenea, da $D^2-1=0$ abbiamo le soluzioni $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t)=c_1e^t+c_2\,e^{-t}$ .
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t)=at+b$ .
Sarà : $x_0'(t)=a, x_0''(t)=0$ e quindi, andando a sostituire nella $x''-x=t$ otteniamo:
$0-at-b=t \Rightarrow a=-1, b=0$ e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea:
$x(t)=c_1e^t+c_2\,e^{-t}-t$ .
Dalla prima equazione $x'=y+1$ ricaviamo $y=x'-1$ e quindi:
$y(t)=c_1e^t-c_2\,e^{-t}-1-1=c_1e^t-c_2\,e^{-t}-2$ .
e quindi la soluzione generale del sistema sarà:
$\begin{cases} x(t)=c_1+c_2\,t-t \\ y(t)=c_1e^t-c_2\,e^{-t}-2 \end{cases}$ .

II M 4) Se $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1; 0\leq x\leq y\right\}$ , calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ .




Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1; 0 \leq x \leq y\right\}$, conviene passare a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ ed avremo:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} x\, y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \cdot \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\vartheta\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$