



Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di
ANALISI MATEMATICA
Numeri complessi

AA. 2025/26

NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi nascono storicamente dall'esigenza di dare una soluzione a problemi privi di essa in ambito reale. Si inizia con la seguente:

Definizione 1 : Dicesi **unità immaginaria**, denotata con la lettera i , quel numero (non reale) tale che $i^2 = -1$.

Si può arrivare a tale definizione supponendo che vi possano essere numeri per i quali opposto e reciproco coincidono: $-x = \frac{1}{x}$, da cui otteniamo $x^2 = -1$, che, algebricamente risolta, ci fornisce $x = \pm\sqrt{-1}$. Avendo posto, per definizione, $i^2 = -1$, sia i che $-i$ sono le soluzioni di tale equazione, e quindi risulta $\frac{1}{i} = -i$.

Per quanto riguarda le potenze dell'unità immaginaria i avremo:

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = i \cdot i^2 = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 = i^0,$$

ovvero queste si ripetono con periodicità pari a 4. Ciò ne consente un calcolo molto rapido.

Esempio 1 : $i^{725} = i^{181 \cdot 4 + 1} = (i^4)^{181} \cdot i^1 = 1^{181} \cdot i = i$.

$$i^{-321} = i^{-(80 \cdot 4) - 1} = (i^4)^{-80} \cdot i^{-1} = 1^{-80} \cdot \frac{1}{i} = -i.$$

Definizione 2 : I numeri del tipo ki , con $k \in \mathbb{R}$, vengono detti **numeri immaginari** (puri).

Dai numeri immaginari si passa a definire i numeri complessi:

Definizione 3 : Dicesi **numero complesso** un numero della forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero la somma di un numero reale con un numero immaginario.

Il numero a si dice la **parte reale** del numero complesso $a + bi$, mentre bi è detta la **parte immaginaria**, e b è detto il **coefficiente dell'immaginario**.

Il numero $a + bi$ è detto numero complesso in **forma algebrica**.

Indicato con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, risulta $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; infatti i numeri reali sono un sottoinsieme dei numeri complessi, potendosi porre: $a = a + 0i, \forall a \in \mathbb{R}$.

Consideriamo ora la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. E' facile vedere come esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$: ad ogni coppia (a, b) corrisponde uno ed un solo numero complesso in forma algebrica $a + bi$, e viceversa. Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi ed i punti del piano $\mathbb{R}^2$; la parte reale a ha il ruolo dell'ascissa, il coefficiente dell'immaginario b ha il ruolo dell'ordinata.

Un piano cartesiano, ad ogni punto (a, b) del quale viene fatto corrispondere il numero complesso $a + bi$, prende il nome di **piano complesso**. L'asse delle ascisse prende il nome di **asse reale**, dato che ad esso corrispondono i numeri $a + 0i$, ovvero i numeri che sono reali, mentre quello delle ordinate prende il nome di **asse immaginario**, dato che ad esso corrispondono i numeri $0 + bi$, ovvero i numeri che sono immaginari. Il numero reale 0 corrisponde alla coppia $(0, 0)$, il numero reale 1 alla coppia $(1, 0)$, l'unità immaginaria i alla coppia $(0, 1)$.

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

Definizione 4 : Dati due numeri complessi espressi in forma algebrica $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, si definiscono la loro **somma** e la loro **differenza** come:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Ovvero la somma (differenza) di due numeri complessi è un numero complesso avente per parte reale la somma (differenza) delle parti reali e per parte immaginaria la somma (differenza) delle parti immaginarie.

Usando invece la notazione a coppie, se $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, definiamo:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2) \text{ quale somma, e}$$

$$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2; b_1 - b_2) \text{ quale differenza dei due numeri complessi.}$$

Si noti l'analogia con la somma e la differenza di vettori in $\mathbb{R}^2$.

Passiamo al **prodotto** di due numeri complessi in forma algebrica. Eseguendo il prodotto mediante le regole del calcolo letterale, e ricordando che $i^2 = -1$, avremo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

Con la notazione a coppie scriveremo invece:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

E' facile vedere come gli **elementi neutri** rispetto alla somma ed al prodotto siano ancora 0 e 1, ovvero le coppie (0, 0) e (1, 0).

Passiamo ora al calcolo del reciproco di un numero complesso $z = a + bi$. Per fare questo introduciamo il concetto di coniugato:

Definizione 5 : Dato il numero complesso $a + bi$ si dice suo **coniugato** il numero complesso $a - bi$, ovvero il numero avente la stessa parte reale e l'opposto per coefficiente dell'immaginario.

Il coniugato di z si indica con $\bar{z}$, ed avremo quindi $\bar{z} = a - bi$.

Per calcolare il **reciproco** di z moltiplichiamo e dividiamo per il suo coniugato $\bar{z}$, ed avremo:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

$$\text{Nella notazione a coppie avremo: } \frac{1}{(a, b)} = (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha quindi un unico reciproco. Ricordiamo che $\frac{1}{i} = -i$.

Passiamo infine al **quoziente** $\frac{z_1}{z_2}$, vedendolo come il prodotto $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, ed avremo:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + a_2 b_1 i - a_1 b_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \text{ Mediante la notazione a coppie scriveremo:} \\ \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right). \end{aligned}$$

Esempio 2 : $(3 + 2i) - (5 - i) = -2 + 3i$.

$$(3 + 2i) \cdot (5 - i) = 15 - 3i + 10i - 2i^2 = 17 + 7i.$$

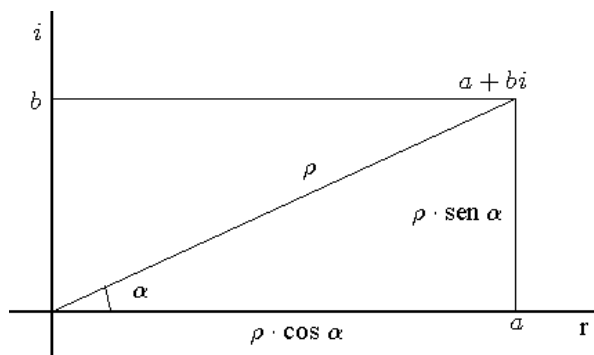
$$\frac{3 + 2i}{5 - i} = \frac{3 + 2i}{5 - i} \cdot \frac{5 + i}{5 + i} = \frac{15 + 3i + 10i - 2}{25 + 1} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Dato un numero complesso $z = a + bi \neq 0$, come illustrato in figura, valgono le seguenti

uguaglianze: $\begin{cases} a = \rho \cos \alpha \\ b = \rho \sin \alpha \end{cases}$, dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ viene detto **modulo** del numero

complesso $z = a + bi$ mentre α , l'angolo formato dal segmento che unisce i punti (0, 0) e (a, b) con il semiasse reale positivo, è detto **argomento** del numero complesso $z = a + bi$.



Avremo allora, sostituendo:

$$z = a + bi = \rho \cos \alpha + i \rho \sin \alpha = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

che viene detta **forma trigonometrica** del numero complesso.

Notiamo che $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$.

Si ha poi $\frac{b}{a} = \frac{\rho \sin \alpha}{\rho \cos \alpha} = \tan \alpha$, da cui otteniamo, $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Notiamo come la rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non sia unica; infatti, se $k \in \mathbb{Z}$, si ha $\rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \rho (\cos (\alpha + 2k\pi) + i \sin (\alpha + 2k\pi))$, per la periodicità, a meno di giri interi, delle funzioni seno e coseno.

Esempio 3 : Essendo $|i| = \sqrt{0 + 1} = 1$, otteniamo : $i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

Essendo $|-1| = 1$, otteniamo $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$.

Essendo $|-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, otteniamo : $-1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$, quindi per $z = -1 + i$, risulta $\rho = \sqrt{2}$ e $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

Essendo $|2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$, otteniamo : $2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, quindi per $z = 2\sqrt{3} + 2i$, risulta $\rho = 4$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

OPERAZIONI SUI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

La forma trigonometrica dei numeri complessi non è di particolare utilità per calcolare somma e differenza di numeri complessi, operazioni per le quali è più utile operare in forma algebrica. Diversa è la situazione per quanto riguarda il prodotto, il reciproco, il quoziente, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice.

Siano allora dati due numeri complessi in forma trigonometrica:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ e } z_2 = \rho_2 (\cos \beta + i \sin \beta).$$

Eseguendo il prodotto avremo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)). \text{ Ovvero:} \end{aligned}$$

Teorema 1 : Il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

Si estende facilmente la regola al prodotto di quanti si vogliano numeri complessi.

Passiamo ora al calcolo del reciproco di un numero complesso $z \neq 0$; avremo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \frac{1}{\rho} \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha)} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \frac{1}{\rho} (\cos \alpha - i \sin \alpha) = \frac{1}{\rho} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)). \text{ Ovvero:}\end{aligned}$$

Teorema 2 : Il reciproco di un numero complesso in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il reciproco del modulo e per argomento l'opposto dell'argomento. Calcoliamo infine il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica, come prodotto del primo per il reciproco del secondo. Avremo:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \rho_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot \frac{1}{\rho_2} (\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)) = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)). \text{ Ovvero:}\end{aligned}$$

Teorema 3 : Il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.

Le formule fin qui ottenute prendono il nome di **formule di De Moivre**.

Esempio 4 : Sapendo che $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, $2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, e $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$, otteniamo:

$$\frac{i}{2\sqrt{3} + 2i} = \frac{1}{4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} i.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{-1 + i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i.\end{aligned}$$

POTENZE DI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

Utilizzando quanto visto per il prodotto, calcoliamo la potenza ad esponente naturale di un numero complesso. Se $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ e se $n \in \mathbb{N}$, avremo :

$z^n = [\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = \rho^n \cdot (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$, dato che il modulo sarà il prodotto di n moduli tutti uguali a ρ , mentre l'argomento è la somma di n argomenti tutti uguali ad α .

Ovvero:

Teorema 4 : La **potenza ad esponente naturale** di un numero complesso in forma trigonometrica ha per modulo la potenza n -esima del modulo e per argomento il multiplo secondo n dell'argomento.

Esempio 5 : Essendo $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$, sarà

$$(-1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos \left(8 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(8 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) \right) = 16 (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 16.$$

Passiamo alle potenze ad esponente intero $m \in \mathbb{Z}$. Dato che $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, basta definire le potenze ad esponente $m \in \mathbb{Z}_-$. Per far questo poniamo $m = -n, n \in \mathbb{N}$.

Essendo $z^{-n} = (z^{-1})^n$, basterà applicare la regola trovata per gli esponenti naturali al numero z^{-1} , il reciproco di z . Avremo quindi, se $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$:

$$\begin{aligned}
z^m &= z^{-n} = (z^{-1})^n = [(\rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha))^{-1}]^n = \left[\frac{1}{\rho} (\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)) \right]^n = \\
&= \frac{1}{\rho^n} (\cos(-n\alpha) + i \operatorname{sen}(-n\alpha)) = \rho^m (\cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha).
\end{aligned}$$

Quindi la **potenza ad esponente intero** m , positivo o negativo che sia, si definisce nello stesso modo delle potenze ad esponente naturale: ha per modulo la potenza m -esima del modulo e per argomento il multiplo secondo m dell'argomento.

Si noti come il risultato trovato per il reciproco coincida, ovviamente, con quello che si trova applicando l'elevamento a potenza -1 .

Esempio 6 : Essendo $2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$, sarà anche:

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{3} + 2i)^{-12} &= 4^{-12} \left(\cos \left(-12 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(-12 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{4^{12}} (\cos(-2\pi) + i \operatorname{sen}(-2\pi)) = \frac{1}{4^{12}} (1 + i \cdot 0) = \frac{1}{4^{12}}.
\end{aligned}$$

Passiamo alle potenze ad esponente razionale, iniziando dagli esponenti del tipo $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ovvero studiamo il problema dell'estrazione della **radice n -esima** di un numero complesso.

Vogliamo definire $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$, con $z = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$.

Posto $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = w$, con w incognito, sia $w = x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, con x e y incogniti.

Essendo $z = w^n$, sostituendo otteniamo: $\rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = x^n(\cos ny + i \operatorname{sen} ny)$.

Quest'ultima uguaglianza risulta soddisfatta se:

$$\begin{cases} \rho = x^n \\ \alpha + 2k\pi = ny \end{cases}, \text{ ovvero se } \begin{cases} x = \sqrt[n]{\rho} \\ y = \frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La prima uguaglianza ha una sola soluzione, la radice n -esima positiva di ρ , mentre la seconda uguaglianza esprime la possibilità che gli argomenti dei due numeri complessi z e w^n diano luogo allo stesso punto del piano complesso pur differendo per multipli interi di un giro.

Il valore $\frac{\alpha}{n}$ rappresenta l' n -esima parte dell'argomento α del radicando z mentre $\frac{2\pi}{n}$ rappresenta un n -esimo di un giro intero.

Per $k = 0$ otteniamo $y = \frac{\alpha}{n}$, per $k = 1$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$ e così via; per $k = n - 1$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + (n - 1) \frac{2\pi}{n}$, ed infine, per $k = n$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi$, che nel piano complesso ci rappresenta lo stesso punto dato da $y = \frac{\alpha}{n}$. Avendo diviso l'angolo giro in n

parti uguali, partendo dalla posizione data da $y = \frac{\alpha}{n}$, dopo aver aggiunto n di queste parti ci ritroviamo nella posizione di partenza. Se diamo allora a k i valori $n + 1$, $n + 2$ eccetera ritroveremo gli stessi punti trovati in precedenza, e quindi le stesse radici n -esime.

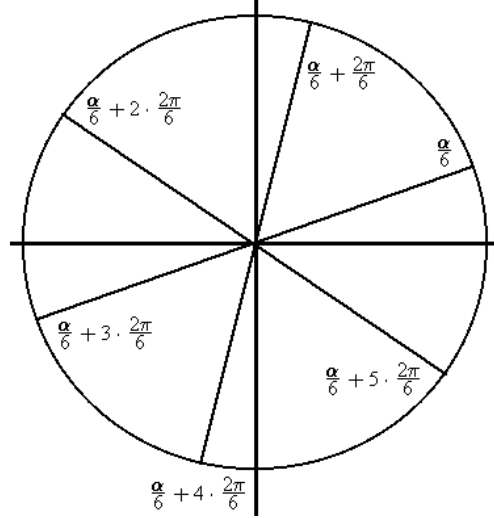
Quindi vale il seguente

Teorema 5 : Le radici n -esime del numero complesso z sono in numero di n e sono date dalla formula generale:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), 0 \leq k \leq n - 1, k \in \mathbb{N}.$$

Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha esattamente n radici n -esime; queste hanno tutte lo stesso modulo, pari a $\sqrt[n]{\rho}$, quindi stanno su di una circonferenza avente centro in $(0, 0)$ e raggio pari a $\sqrt[n]{\rho}$. Dato che i loro argomenti differiscono per un angolo pari a $\frac{2\pi}{n}$, le n radici n -esime di z formano i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt[n]{\rho}$; il primo di questi vertici ha per argomento $\frac{\alpha}{n}$.

Nella figura seguente vengono rappresentate le 6 radici seste di $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.



Esempio 7 : Calcoliamo $\sqrt[4]{i}$. Essendo $i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ avremo:

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k \frac{2\pi}{4} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq 3, \text{ da cui si ottengono:}$$

$$\text{per } k = 0: 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$\text{per } k = 1: 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right);$$

$$\text{per } k = 2: 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \pi \right) \right) = \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right);$$

$$\text{per } k = 3: 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} \right) \right) = \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

Dalle formule di bisezione $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$ e $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$, essendo:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ otteniamo:}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ e } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \text{ dalle quali infine:}$$

$$\text{per } k = 0 \text{ si ha: } \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

$$\text{per } k = 1 \text{ si ha: } -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2};$$

$$\text{per } k = 2 \text{ si ha: } -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

per $k = 3$ si ha: $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Esempio 8 : Calcoliamo $\sqrt[n]{1}$. Essendo $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$ avremo:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos \left(\frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq n-1, k \in \mathbb{N}, \text{ ovvero:}$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \left(k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(k \frac{2\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Riprendendo l'uguaglianza precedentemente trovata:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq n-1, k \in \mathbb{N},$$

per quanto visto sul prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica, potremo scrivere:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right) \left(\cos \left(k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(k \frac{2\pi}{n} \right) \right),$$

dove $\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right)$ rappresenta la prima radice n -esima del numero z , quella che corrisponde a $k = 0$, mentre $\left(\cos \left(k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(k \frac{2\pi}{n} \right) \right)$, come visto nell'Esempio 8, rappresenta, per $0 \leq k \leq n-1$, le radici n -esime dell'unità 1. Quindi:

Teorema 6 : Le radici n -esime di un qualunque numero complesso $z \neq 0$ si possono ottenere calcolandone una sola, quella che corrisponde a $k = 0$, e moltiplicando poi questa per le n radici n -esime dell'unità 1.

Esempio 9 : Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$ e da questa $\sqrt[4]{i}$. Avremo allora:

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \left(k \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(k \frac{2\pi}{4} \right) \right) = \left(\cos \left(k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(k \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq 3,$$

e quindi: per $k = 0$ si ha $\cos 0 + i \sin 0 = 1$; per $k = 1$ si ha $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$;

per $k = 2$ si ha $\cos \pi + i \sin \pi = -1$; per $k = 3$ si ha $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$.

Riprendendo la prima radice trovata per $\sqrt[4]{i}$, ovvero, per $k = 0$:

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \text{ moltiplicandola per } i, \text{ per } -1 \text{ e per } -i, \text{ ritroviamo le altre radici}$$

quarte di i trovate in precedenza. Infatti:

$$\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right) \cdot i = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \text{ quella per } k = 1;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right) \cdot (-1) = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \text{ quella per } k = 2;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right) \cdot (-i) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \text{ quella per } k = 3.$$

Esempio 10 : Calcoliamo $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^2}$. Essendo $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = 1$, risulta:

$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right)$, dalla quale otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 &= \cos\left(\frac{11}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11}{3}\pi\right) = \\ &= \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Sarà allora $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \cos\left(\frac{5}{6}\pi + k\frac{2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi + k\frac{2\pi}{2}\right)$, $0 \leq k \leq 1$:

per $k = 0$ otteniamo: $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$;

per $k = 1$ otteniamo: $\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Come si vede, quindi, non è corretto scrivere $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Esempio 11 : Risolviamo l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$.

Avremo allora $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Essendo $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$, otteniamo $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, e quindi abbiamo due soluzio-

ni, complesse e coniugate, $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Esempio 12 : Risolviamo l'equazione $x^3 + 1 = 0$, che ammette un'unica soluzione reale data da $x = -1$.

Da $x^3 = -1$, otteniamo $x = \sqrt[3]{-1}$, e quindi le tre radici di $z = 1 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$:

$$\sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) \right), \quad 0 \leq k \leq 2, \text{ ovvero:}$$

per $k = 0$ si ha: $\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

per $k = 1$ si ha: $\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$;

per $k = 2$ si ha: $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Si sono trovate quindi tre soluzioni, in numero pari al grado del polinomio $x^3 + 1$.

Passiamo infine alle **potenze ad esponente razionale**, $z^{\frac{m}{n}}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$; supponiamo che m e n siano primi tra loro, con $m \neq 1$.

In base alle definizioni precedenti, poniamo $z^{\frac{m}{n}} = (z^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$, ed operiamo di conseguenza. La potenza z^m ci dà un solo risultato, del quale vanno poi calcolate le n radici n -esime.

L'ESPONENZIALE COMPLESSA $e^z, z \in \mathbb{C}$

Preso un numero immaginario puro $z = xi, x \in \mathbb{R}$, diamo la seguente

Definizione 6 : Si definisce l'esponenziale e^{xi} come:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Vediamo una giustificazione (non certo una dimostrazione !) di tale definizione utilizzando i polinomi di Mac Laurin delle funzioni reali e^x , $\sin x$ e $\cos x$, anche se, più correttamente, si dovrebbero utilizzare i loro sviluppi in serie di potenze. Sappiamo che risulta:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Sostituendo, in maniera formale in queste espressioni, alla variabile x la variabile xi , si ha:

$$e^{xi} = 1 + (xi) + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \frac{(xi)^5}{5!} + \frac{(xi)^6}{6!} + \frac{(xi)^7}{7!} + \dots \text{ da cui:}$$

$$e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}i + \dots \text{ ovvero:}$$

$$e^{xi} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \text{ e quindi:}$$

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Preso ora $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$, usando le proprietà delle potenze reali, poniamo:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

ovvero otteniamo un numero complesso avente per modulo il numero reale positivo e^x e per argomento il coefficiente dell'immaginario y . Si ha infatti: $|\cos y + i \sin y| = 1$.

Dalla definizione data segue subito, $\forall k \in \mathbb{Z}$, che:

$$e^{z+2k\pi i} = e^{x+y i+2k\pi i} = e^x \cdot e^{(y+2k\pi)i} = e^x (\cos (y+2k\pi) + i \sin (y+2k\pi)) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z, \text{ cioè la funzione complessa } z \rightarrow e^z \text{ è periodica di periodo } 2\pi i.$$

Esempio 13 : Calcoliamo e^i . Essendo $e^i = e^{0+1 \cdot i}$ otteniamo:

$$e^i = e^0 (\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1.$$

Se calcoliamo $e^{2\pi i}$ avremo invece $e^{2\pi i} = e^{0+2\pi i} = e^0 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$.

LOGARITMI DI NUMERI COMPLESSI $\log z$, $z \in \mathbb{C}$

Vediamo ora come definire il $\log z$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Posto $\log z = w$, otteniamo $z = e^w$.

Se poniamo $w = x + yi$, con x e y incogniti, e $z = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, ρ e α valori invece noti, imponiamo che sia: $e^w = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, che risulta

$$\text{soddisfatta quando: } \begin{cases} e^x = \rho \\ y = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ ovvero se } \begin{cases} x = \log \rho \\ y = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Notiamo che $\log \rho$ è sempre definito, essendo ρ un modulo e quindi una quantità reale sempre positiva; la seconda uguaglianza dipende dal poter rappresentare un punto del piano complesso in infiniti modi, vista l'identità di rappresentazione a meno di giri interi.

Sostituendo le uguaglianze trovate avremo allora:

$$\log z = w = x + yi = \log \rho + (\alpha + 2k\pi)i, k \in \mathbb{Z}.$$

Con questa uguaglianza si definiscono gli infiniti logaritmi di un numero complesso $z \neq 0$.

Questi hanno tutti la stessa parte reale, $\log \rho$, mentre varia, di 2π in 2π , il coefficiente della loro parte immaginaria. I valori di $\log z$ stanno quindi tutti su una retta perpendicolare all'asse reale, passante per il punto $(\log \rho, \alpha)$.

Il valore corrispondente ad $\alpha = 0$ viene detto **valore principale**.

Esempio 14 : Calcoliamo $\log(-1)$. Essendo $-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$, otteniamo:
 $\log(-1) = \log 1 + (\pi + 2k\pi)i = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Da questa ricaviamo anche:
 $e^{(2k+1)\pi i} = \cos((2k+1)\pi) + i \sin((2k+1)\pi) = -1$.

Esempio 15 : Calcoliamo $\log i$. Essendo $i = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$, avremo:

$$\log i = \log 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio 16 : Calcoliamo $\log(1+i)$.

Essendo $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$, avremo infine:

$$\log(1+i) = \log \sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

POTENZE AD ESPONENTE COMPLESSO

Per definire la potenza w^z , $w \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, si usa l'uguaglianza, valida per le potenze reali di numeri a positivi: $a^x = e^{x \log a}$.

Definizione 7 : Si pone $w^z = e^{z \log w}$, dove sia l'esponenziale che il logaritmo vanno intesi in ambito complesso.

Esempio 17 : Calcoliamo i^i . Da $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ e da $\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$, otteniamo:
 $i^i = e^{i \log i} = e^{i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

La potenza i^i assume allora infiniti valori, che sono comunque tutti reali.

Calcoliamo ora $(1+i)^{1-i} = e^{(1-i) \log(1+i)}$. Essendo $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si è visto

(Esempio 16) che $\log(1+i) = \log \sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i$, e quindi, sostituendo, otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{(1-i) \log(1+i)} &= e^{(1-i) \left(\log \sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i\right)} = e^{\log \sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i - i \log \sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} = \\ &= e^{\log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log \sqrt{2}\right)i} = e^{\log \sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log \sqrt{2}\right)i} = \\ &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log \sqrt{2}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log \sqrt{2}\right)\right). \end{aligned}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE COMPLESSE

Dalla definizione $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, otteniamo, sostituendo xi con $(-xi)$, la:

$$e^{-xi} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Sommando e sottraendo tra loro le due uguaglianze $\begin{cases} e^{xi} = \cos x + i \sin x \\ e^{-xi} = \cos x - i \sin x \end{cases}$ otteniamo:

$$\begin{cases} e^{xi} + e^{-xi} = 2 \cos x \\ e^{xi} - e^{-xi} = 2i \sin x \end{cases} \text{ e da queste: } \begin{cases} \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \end{cases}.$$

Estendendo queste uguaglianze a $z \in \mathbb{C}$, otteniamo la definizione del **seno** e del **coseno** di un

$$\text{numero complesso: } \begin{cases} \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \end{cases}.$$

$$\text{Da queste abbiamo poi anche } \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}.$$