

Compito di ANALISI MATEMATICA 1/9/2025

I M 1) Se $z = 1 + \sqrt{3}i$, calcolare $\sqrt[3]{z}$.

Da $z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ otteniamo:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right), 0 \leq k \leq 2.$$

Se $k = 0$: $\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$;

$$\begin{aligned} \text{se } k = 1 : \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \\ = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{se } k = 2 : \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \\ = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{12\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{12\pi}{9} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, si determini per quali valori del parametro α essa risulta continua e poi anche differenziabile in $(0, 0)$.

Valutiamo se la funzione può essere continua in $(0, 0)$. Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^{2\alpha} |\cos \vartheta \sin \vartheta|^\alpha}{\varrho^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{2(\alpha-1)} |\cos \vartheta \sin \vartheta|^\alpha = 0 \text{ se } \alpha - 1 > 0$$

ovvero se $\alpha > 1$, con convergenza uniforme in quanto $\varrho^{2(\alpha-1)} |\cos \vartheta \sin \vartheta|^\alpha < \varrho^{2(\alpha-1)}$.

Quindi la funzione è continua in $(0, 0)$ se $\alpha > 1$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h \cdot 0|^\alpha}{h^2 + 0^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 \cdot h|^\alpha}{0^2 + h^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} - 0 - (0, 0)(x, y) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^{2\alpha} |\cos \vartheta \sin \vartheta|^\alpha}{\varrho^3} = \\ = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{2\alpha-3} |\cos \vartheta \sin \vartheta|^\alpha = 0 \text{ se } 2\alpha - 3 > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Anche ora la convergenza è uniforme in quanto $\varrho^{2\alpha-3} |\cos \vartheta \sin \vartheta|^\alpha < \varrho^{2\alpha-3}$.

Quindi la funzione è differenziabile in $(0, 0)$ se $\alpha > \frac{3}{2}$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = x^2 - y - e^y + e^x = 0$ ed il punto $P_0 = (1, 1)$ che la soddisfa, determinare derivata prima e seconda della funzione implicita $x \rightarrow y(x)$ da questa definita.

Dato che f è palesemente funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, passiamo a calcolare il gradiente ed avremo: $\nabla f(x, y) = (2x + e^x; -1 - e^y)$ da cui $\nabla f(1, 1) = (2 + e; -1 - e)$ ed essendo $f'_y(1, 1) = -1 - e$ si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.

$$\text{Risulta } \frac{dy}{dx}(1) = -\frac{f'_x(1, 1)}{f'_y(1, 1)} = -\frac{2 + e}{-1 - e} = \frac{2 + e}{1 + e}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} 2 + e^x & 0 \\ 0 & -e^y \end{vmatrix}$ sarà $\mathbb{H}(1, 1) = \begin{vmatrix} 2 + e & 0 \\ 0 & -e \end{vmatrix}$. Dalla:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}(y') + f''_{yy}(y')^2}{f'_y} \text{ si ha :}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1) = -\frac{2 + e + 2(0)\left(\frac{2+e}{1+e}\right) + (-e)\left(\frac{2+e}{1+e}\right)^2}{-1 - e} = \frac{(2 + e)(1 + e)^2 - e(2 + e)^2}{(1 + e)^3} =$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1) = \frac{2e^2 + 2 + 4e + e^3 + e + 2e^2 - 4e - e^3 - 4e^2}{(1 + e)^3} = \frac{2 + e}{(1 + e)^3}.$$

I M 4) Data la funzione $f(x, y) = xy - x$, siano u e v i versori di $(1, 1)$ e $(1, 2)$. Sapendo che $\mathcal{D}_u f(P_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_v f(P_0) = \sqrt{5}$, si determini P_0 e si calcoli poi $\mathcal{D}_{u,v}^2 f(P_0)$.

Essendo funzione differenziabile, sarà $\mathcal{D}_u f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot u$ e $\mathcal{D}_v f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot v$.

Essendo: $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $\nabla f(x, y) = (y - 1, x)$, avremo:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_u f(P_0) = (y - 1, x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \\ \mathcal{D}_v f(P_0) = (y - 1, x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5} \end{cases} \text{ ovvero:}$$

$$\begin{cases} y - 1 + x = 2 \\ y - 1 + 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3 - x - 1 + 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - 3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi $P_0 = (3, 0)$. Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:

$$\mathcal{D}_{u,v}^2 f(3, 0) = u \cdot \mathbb{H}(3, 0) \cdot v^T \text{ e quindi, da } \mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(3, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ avremo:}$$

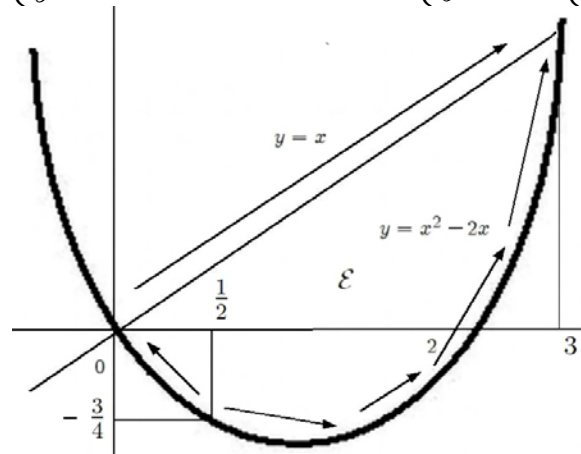
$$\mathcal{D}_{u,v}^2 f(3, 0) = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \right\| = \frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 - 2x \leq y \leq x \end{cases}.$

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - 2x - y \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases} \end{cases}.$

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = x(x - 3) = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$



Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x + y - \lambda_1(x^2 - 2x - y) - \lambda_2(y - x).$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \neq 0 \\ \Lambda'_y = 1 \neq 0 \\ x^2 - 2x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \text{ nessuna soluzione.}$$

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2x - 2 = 0 \\ \lambda_1 = -1 \\ y = x^2 - 2x \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ \lambda_1 = -1 \\ -\frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} : \text{vera} \end{cases}.$$

Il punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, con $\lambda_1 = -1 < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x \\ x^2 - 2x \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ y = x \\ x^2 - 2x \leq y \end{cases} : \text{nessuna soluzione.}$$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \text{ dato che } \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} :$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda_1 + 1 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{3} < 0 \\ \lambda_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Il punto $(0, 0)$ non è nulla.

$$\begin{cases} 1 - 6\lambda_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4\lambda_1 + 1 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{3} > 0 \\ \lambda_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} > 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Il punto $(3, 3)$ con $\lambda_1 = \frac{2}{3} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{5}{3} > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo.

Essendo emerso un solo candidato, sia per il punto di massimo che per il punto di minimo, il punto $(3, 3)$, con $f(3, 3) = 6$ sarà il punto di massimo mentre il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, con $f(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) = -\frac{1}{4}$ sarà il punto di minimo.

Infine, tanto per completezza, studiamo il comportamento sui punti della frontiera di $\mathcal{E}$.

Se $y = x$ risulta $f(x, x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$: funzione sempre crescente.

Se $y = x^2 - 2x$, avremo:

$$f(x, x^2 - 2x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Questo conferma che il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ è il punto di minimo.

II M 2) Data $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 - 6yz - 3x^2$, si studi la natura dei suoi punti stazionari.

La funzione è una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2 - 6x = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 6z = 0 \\ f'_z = 2z - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(x - 2) = 0 \\ 3y^2 - 18y = 3y(y - 6) = 0 \\ z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ z = 18 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = 18 \end{cases} \end{cases}.$$

$$P_1 : (0, 0, 0), \quad P_2 : (0, 6, 18), \quad P_3 : (2, 0, 0), \quad P_4 : (2, 6, 18).$$

$$\text{Da } \mathbb{H}(x, y, z) = \begin{vmatrix} 6x - 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6y & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} \text{ otteniamo:}$$

$$- \mathbb{H}(0, 0, 0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}; \text{ da } |\mathbb{H}_1| = -6 < 0 \text{ e } |\mathbb{H}_2| = 2 > 0 \text{ segue che}$$

$(0, 0, 0)$ è un punto di sella;

$$- \mathbb{H}(0, 6, 18) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}; \text{ da } |\mathbb{H}_1| = -6 < 0 \text{ e } |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \text{ segue che}$$

$(0, 6, 18)$ è un punto di sella;

$$- \mathbb{H}(2, 0, 0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}; \text{ da } |\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -36 < 0 \text{ si ha che } (2, 0, 0)$$

è un punto di sella;

$$- \mathbb{H}(2, 6, 18) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix}; \text{ da } |\mathbb{H}_1| = 6 > 0, \quad |\mathbb{H}_2| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = 216 > 0 \text{ e}$$

$$|\mathbb{H}_3| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (72 - 36) = 216 > 0 \text{ essendo:}$$

$$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 216 > 0 \\ |\mathbb{H}_3| = 216 > 0 \end{cases} \text{ si ha che } (2, 6, 18) \text{ è un punto di minimo.}$$

II M 3) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - 3x - y = 0 \\ x + y' - 3y = 0 \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale

$$\text{poniamo: } \begin{vmatrix} D-3 & -1 \\ 1 & D-3 \end{vmatrix} (x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((D-3)^2 + 1)(x) = (D^2 - 6D + 10)(x) = 0.$$

Quindi l'equazione sarà: $x'' - 6x' + 10x = 0$.

Risolvendo l'equazione, da $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ abbiamo :

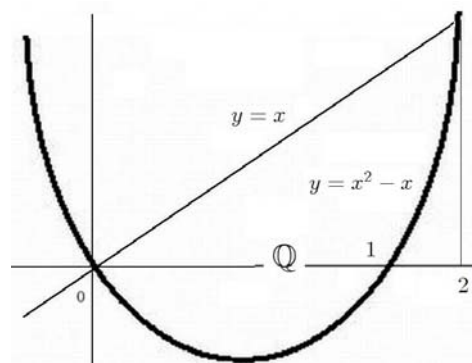
$\lambda = 3 \pm \sqrt{9 - 10} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$ ovvero le soluzioni $\lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 3 - i$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 e^{3t} \sin t + c_2 e^{3t} \cos t$.

Se $x(t) = e^{3t} (c_1 \sin t + c_2 \cos t)$, dall'equazione $x' - 3x - y = 0$ ricaviamo $y = x' - 3x$ e quindi:

$y(t) = 3e^{3t} (c_1 \sin t + c_2 \cos t) + e^{3t} (c_1 \cos t - c_2 \sin t) - 3e^{3t} (c_1 \sin t + c_2 \cos t)$ da cui la soluzione generale del sistema:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} \sin t + c_2 e^{3t} \cos t \\ y(t) = c_1 e^{3t} \cos t - c_2 e^{3t} \sin t \end{cases}$$

II M 4) Se $\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - x \leq y \leq x\}$, calcolare $\iint_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy$.



Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - x \leq y \leq x\}$ avremo:

$$\begin{cases} x^2 - x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ da cui:}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{Q}} \int xy \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_{x^2-x}^x xy \, dy \, dx = \int_0^2 \left(x \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2-x}^x \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} \right) - \left(x \frac{(x^2-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 - x(x^4 + x^2 - 2x^3) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 - x^5 - x^3 + 2x^4 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2x^4 - x^5 dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 \right) - 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \cdot 64 - \frac{1}{6} \cdot 64 \right) = \\ &= \frac{64}{2} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6} \right) = 32 \cdot \frac{12-5}{30} = \frac{32 \cdot 7}{30} = \frac{16 \cdot 7}{15} = \frac{112}{15}. \end{aligned}$$