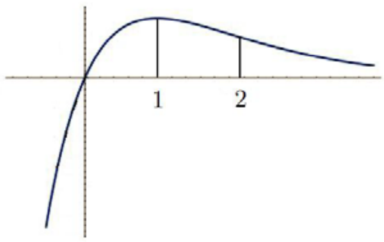
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 1/9/2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x \cdot e^{1-x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^{1-x} = (\to\ -\infty) \cdot (\to\ +\infty) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x-1}} = 0^+$ in quanto $x = o\left(e^{x-1}\right)$ per $x \to +\infty$.
Quindi asintoto orizzontale sulla destra.
$f(x) = x \cdot e^{1-x} > 0 \Rightarrow x > 0$; $f(0) = 0$.
$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x}(1-x) > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$;
la funzione è crescente per $x < 1$, decrescente per $x > 1$.
Quindi in $x = 1$ abbiamo un punto di massimo, con $f(1) = 1$.
Da $f'(x) = e^{1-x}(1-x)$ avremo poi $f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$
e quindi $f''(x) = e^{1-x}(x-2) > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.
Quindi $f(x)$ è funzione concava per $x < 2$, convessa per $x > 2$.
Nel punto $x = 2$ abbiamo un punto di flesso con $f(2) = \dfrac{2}{e}$.
Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4 + 2x}{2 + 4x}\right)^{1-x}$.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$.
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4 + 2x}{2 + 4x}\right)^{1-x} = \left(\to \dfrac{2}{4}\right)^{(\to -\infty)} = \left(\to \dfrac{1}{2}\right)^{(\to -\infty)} = +\infty$.

3) Data la funzione $f(x) = \log x$ sia $F(x) = f(1 - f(x))$; determinare Campo di esistenza ed espressione della funzione inversa di $F(x)$.

Da $f(x) = \log x$ si ha $F(x) = f(1 - f(x)) = f(1 - \log x) = \log(1 - \log x)$:
$F(x) = \log(1 - \log x)$.
Campo di esistenza :
$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < e \end{cases} \Rightarrow 0 < x < e$.
Campo di esistenza : $0 < x < e$.

Per avere l'espressione dell'inversa, sarà poi:
$\log(1-\log x) = y \Rightarrow 1-\log x = e^y \Rightarrow \log x = 1-e^y \Rightarrow x = e^{1-e^y}$
e quindi la funzione inversa: $y = e^{1-e^x}$.

4) Sapendo che la retta tangente al grafico di $f(x) = x\log x - x$ nel punto x_0 ha equazione $y = -1$, trovare x_0.

Se la retta tangente al grafico ha equazione $y = -1$, vuol dire che il suo coefficiente angolare è $m = f'(x_0) = 0$, quindi basta trovare dove si annulla la derivata della funzione.
Da $f(x) = x\log x - x$ segue $f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x = 0 \Rightarrow x_0 = 1$.

5) Calcolare $\int_0^1 e^{1-x} + \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k=0)$ ed avremo:
$\int_0^1 e^{1-x} + \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x = \left(-e^{1-x} + \log(x+1)\right|_0^1 = (-1+\log 2) - (-e+\log 1) =$
$= e + \log 2 - 1$.

6) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + 6y$, determinare la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = (2x-3; 2y+6)$ per cui:
$\begin{cases} 2x-3=0 \\ 2y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases}$.
Abbiamo un solo punto stazionario: $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right\|$, avremo:
$\mathbb{H}\left(\frac{3}{2}, -3\right) = \left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right\|$, per cui, essendo :
$\begin{cases} \left|\mathbb{H}_1\left(\frac{3}{2}, -3\right)\right| = 2 > 0 \\ \left|\mathbb{H}_2\left(\frac{3}{2}, -3\right)\right| = 4 > 0 \end{cases}$ il punto $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ è un punto di minimo.

7) Data la funzione $f(x) = x^2 - 2x + 3$ si determini il punto x_0 ottenuto applicando alla funzione il Teorema di Lagrange (o del Valor Medio) nell'intervallo $[0,1]$.

La funzione data è un polinomio, quindi continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
Applicando il Teorema di Lagrange segue che esiste almeno un punto x_0 dell'intervallo dato per il quale vale l'uguaglianza: $f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow 2x_0 - 2 = \frac{2-3}{1} \Rightarrow 2x_0 = 1$ da cui otteniamo $x_0 = \frac{1}{2}$.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{Vmatrix}$ e il vettore $\mathbb{X} = (1, 2, -3)$, si determini il valore del parametro k per cui vale l'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = k\,\mathbb{X}$.

Risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3+2-3 \\ 2+8-6 \\ 1-10+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k \\ 2k \\ -3k \end{Vmatrix}$.
L'uguaglianza è palesemente vera per $k = 2$.

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare se risultano logicamente equivalenti le due proposizioni $\mathbb{P}_1 : \mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ e $\mathbb{P}_2 : (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{C}$.

Costruita la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$	$\mathbb{P}_1 : \mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{P}_2 : (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0

si vede dalla sesta e ottava riga che le due proposizioni non risultano logicamente equivalenti.

10) Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo per la funzione $f(x) = x^3 \cdot \log x$.

Occorre studiare i cambiamenti di segno della derivata prima della funzione.
Da $f(x) = x^3 \cdot \log x$ segue $f'(x) = 3x^2 \cdot \log x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x} = 3x^2 \cdot \log x + x^2$ da cui:
$f'(x) = x^2\,(3\log x + 1) > 0 \Rightarrow 3\log x + 1 > 0 \Rightarrow \log x > -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x > e^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.
La funzione è decrescente per $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ e crescente per $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.
Abbiamo quindi un punto di minimo in $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.