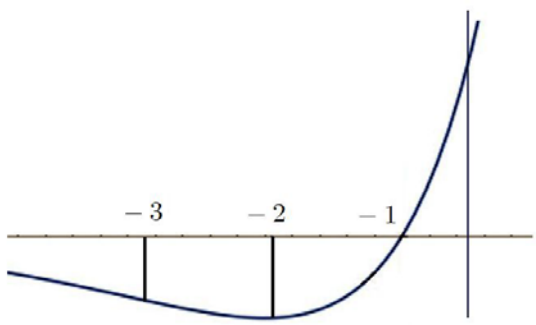
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 16/9/2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x+1) \cdot e^{x-1}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in $\mathbb{R}$.
$\lim_{x \to -\infty} (x+1) \cdot e^{x-1} = (\to -\infty) \cdot (\to 0^+) = 0^-$
in quanto $x+1 = o\left(e^{x-1}\right)$ per $x \to -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} (x+1) \cdot e^{x-1} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$.
Quindi asintoto orizzontale sulla sinistra.
$f(x) = (x+1) \cdot e^{x-1} > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$; $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(-1) = 0$.
$f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + (x+1) \cdot e^{x-1} = e^{x-1}(x+2) > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$;
la funzione è decrescente per $x < -2$, crescente per $x > -2$.
Quindi in $x = -2$ abbiamo un punto di minimo, con $f(-2) = -\frac{1}{e^3}$.
Da $f'(x) = e^{x-1}(x+2)$ avremo poi $f''(x) = e^{x-1}(x+2) + e^{x-1} = e^{x-1}(x+3)$
e quindi $f''(x) = e^{x-1}(x+3) > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$.
Quindi $f(x)$ è funzione concava per $x < -3$, convessa per $x > -3$.
Nel punto $x = -3$ abbiamo un punto di flesso con $f(-3) = -\frac{2}{e^4}$.
Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+2x}{1+2x}\right)^{1-x}$.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{x}{2x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
da $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e da $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2+2x}{1+2x}\right)^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(1+2x)+1}{1+2x}\right)^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1+2x}\right)^{1-x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{1+2x}\right)^{1+2x}\right)^{\frac{1-x}{1+2x}} = (\to e)^{\left(\to -\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) Data la funzione $f(x) = 3x + 2$ sia $F(x) = f(f(2x))$; determinare l'espressione della funzione inversa di $F(x)$.

Da $f(x) = 3x + 2$ si ha $f(2x) = 3(2x) + 2 = 6x + 2$ e quindi:
$F(x) = f(f(2x)) = f(6x + 2) = 3(6x + 2) + 2 = 18x + 8$.
Per avere l'espressione dell'inversa sarà poi:
$18x + 8 = y \Rightarrow 18x = y - 8 \Rightarrow x = \frac{1}{18}y - \frac{8}{18} \Rightarrow x = \frac{1}{18}y - \frac{4}{9}$ e quindi la funzione inversa: $y = \frac{1}{18}x - \frac{4}{9}$.

4) Sapendo che la retta tangente al grafico di $f(x) = x \log x - x$ nel punto x_0 ha equazione $y = x - e$, trovare x_0.

Se la retta tangente al grafico ha equazione $y = x - e$, vuol dire che il suo coefficiente angolare è $m = f'(x_0) = 1$, quindi basta trovare dove la derivata della funzione vale 1.
Da $f(x) = x \log x - x$ segue $f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x = 1 \Rightarrow x_0 = e$.
Essendo l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x_0 = e$ data da:
$y - f(e) = f'(e)(x - e)$ risulta $y - (e \log e - e) = 1 \cdot (x - e)$ ovvero
$y - 0 = x - e \Rightarrow y = x - e$.

5) Calcolare $\int_0^1 e^{1-2x} + e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k = 0)$ ed avremo:

$$\int_0^1 e^{1-2x} + e^{2x-1}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}e^{1-2x} + \frac{1}{2}e^{2x-1} \right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-e^{1-2x} + e^{2x-1} \right|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(-e^{-1} + e^{1} \right) - \left(-e^{1} + e^{-1} \right) \right) = \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + e^{1} + e^{1} - e^{-1} \right) = e - \frac{1}{e}\ .$$

6) Data la funzione $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2 - xy$, determinare la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x, y) = \left(f'_x, f'_y \right) = (2 - 2x - y; 2 - 2y - x)$ per cui:

$$\begin{cases} 2 - 2x - y = 0 \\ 2 - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 2 - 2(2 - 2x) - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 4 + 4x - x = 0 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Abbiamo un solo punto stazionario: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left\| \begin{matrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{matrix} \right\|$, avremo:

$\begin{cases} \left| \mathbb{H}_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right| = -2 < 0 \\ \left| \mathbb{H}_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right| = 4 - 1 = 3 > 0 \end{cases}$ e quindi il punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ è un punto di massimo.

7) Data la funzione $f(x) = e^x - 2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x$ se ne determini l'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado.

Essendo $P_2(x,0) = f(0) + f'(0)(x-0) + \dfrac{1}{2} f''(0)(x-0)^2$ avremo:
$f(0) = 1 - 0 + 3 = 4$;
da $f'(x) = e^x - 2\cos x - 3\,\mathrm{sen}\,x$ segue $f'(0) = 1 - 2 - 0 = -1$;
da $f''(x) = e^x + 2\,\mathrm{sen}\,x - 3\cos x$ segue $f''(0) = 1 + 0 - 3 = -2$ e quindi :
$P_2(x,0) = 4 - 1\cdot x + \dfrac{1}{2}(-2)\,x^2 = 4 - x - x^2$.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{Vmatrix}$ e il vettore $\mathbb{X} = (1,2,1)$, si determinino i valori del parametro k per i quali il modulo del vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulta pari a $\sqrt{76}$.

Risulta $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2+2+2 \\ 1+4+1 \\ 1-2+k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ k-1 \end{Vmatrix}$.
Dovremo quindi avere $\|\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}\| = \sqrt{6^2 + 6^2 + (k-1)^2} = \sqrt{76}$ da cui si ha:
$\sqrt{36 + 36 + k^2 - 2k + 1} = \sqrt{76}$ ovvero $k^2 - 2k + 73 = 76$ da cui:
$k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) = 0$ e quindi le due soluzioni $k = -1$ e $k = 3$.

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare se risultano logicamente equivalenti le due proposizioni $\mathbb{P}_1 : \mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ e $\mathbb{P}_2 : non\,(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})\,o\,\mathbb{C}$.

Costruita la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C}$	$\mathbb{P}_1{:}\mathbb{A}\Rightarrow(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C})$	$\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$	$non(\mathbb{A}e\mathbb{B})$	$\mathbb{P}_2{:}non(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})o\mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1

si vede dalle colonne della $\mathbb{P}_1$ e della $\mathbb{P}_2$ che le due proposizioni risultano logicamente equivalenti.

10) Trovare gli eventuali punti di flesso per la funzione $f(x) = x^3 \cdot \log x$.

Occorre studiare i cambiamenti di segno della derivata seconda della funzione.
Da $f(x) = x^3\cdot\log x$ segue $f'(x) = 3x^2\cdot\log x + x^3\cdot\dfrac{1}{x} = 3x^2\cdot\log x + x^2$ da cui poi:
$f''(x) = 6x\cdot\log x + 3x^2\cdot\dfrac{1}{x} + 2x = 6x\cdot\log x + 5x = x\cdot(6\log x + 5) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x > -\dfrac{5}{6} \Rightarrow x > e^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$.

La funzione è concava per $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ e convessa per $x > \dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$.

Abbiamo quindi un punto di flesso in $x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$.