Compito di ANALISI MATEMATICA 16/9/2025

I M 1) Se $z = 1 + i$, calcolare $\sqrt[3]{z^8}$.

Da $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ otteniamo:

$z^8 = (1+i)^8 = 2^4\left(\cos 8\cdot\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\, 8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 16\,(\cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi) = 16$. Per cui

$\sqrt[3]{z^8} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2$.

Se $k = 0$: $\sqrt[3]{16}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -\sqrt[3]{2}\big(1 - \sqrt{3}\,i\big)$;

se $k = 1$: $\sqrt[3]{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) =$

$= 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = -\sqrt[3]{2}\big(1 + \sqrt{3}\,i\big)$;

se $k = 2$: $\sqrt[3]{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) =$

$= 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{6\pi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{2}\,\left(\cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi\right) = 2\sqrt[3]{2}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, si determini per quali valori del parametro positivo α essa risulta continua e poi anche differenziabile in $(0,0)$.

Valutiamo se la funzione può essere continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|^\alpha}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^{2\alpha}\,|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^\alpha}{\sqrt[3]{\varrho^2}} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho^{2\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)}\,|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^\alpha = 0$ se:

$\alpha - \frac{1}{3} > 0$ ovvero se $\alpha > \frac{1}{3}$, con convergenza uniforme in quanto:

$\varrho^{2\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)}\,|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^\alpha < \varrho^{2\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)}$.

Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $\alpha > \frac{1}{3}$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h\cdot 0|^\alpha}{\sqrt[3]{h^2+0^2}}\cdot\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h\sqrt[3]{h^2}} = 0$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|0\cdot h|^\alpha}{\sqrt[3]{0^2+h^2}}\cdot\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h\sqrt[3]{h^2}} = 0$.

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{|xy|^\alpha}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt[3]{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^{2\alpha}\,|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^\alpha}{\varrho^{\frac{5}{3}}} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho^{2\alpha-\frac{5}{3}} |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta|^{\alpha} = 0 \text{ se } 2\alpha - \frac{5}{3} > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{5}{6}.$$

Anche ora la convergenza è uniforme in quanto $\varrho^{2\alpha-\frac{5}{3}} |\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta|^{\alpha} < \varrho^{2\alpha-\frac{5}{3}}$.
Quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$ se $\alpha > \frac{5}{6}$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - e^{x+y} = 0$ ed il punto $P_0 = (0,0)$ che la soddisfa, determinare derivata prima e seconda della funzione implicita $y = y(x)$ da questa definita.

Dato che f è palesemente funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, passiamo a calcolare il gradiente ed avremo: $\nabla f(x,y) = \left(2x\, e^{x^2+y^2} - e^{x+y}; 2y\, e^{x^2+y^2} - e^{x+y}\right)$ da cui :
$\nabla f(0,0) = (-1; -1)$ ed essendo $f'_y(0,0) = -1 \neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.

Risulta $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -\dfrac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = -\dfrac{-1}{-1} = -1$.

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} (2+4x^2)e^{x^2+y^2} - e^{x+y} & 4xye^{x^2+y^2} - e^{x+y} \\ 4xye^{x^2+y^2} - e^{x+y} & (2+4y^2)e^{x^2+y^2} - e^{x+y} \end{Vmatrix}$ sarà :

$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$. Dalla $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{f''_{xx} + 2\, f''_{xy}\,(y') + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha :

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0) = -\dfrac{1 + 2\,(-1)(-1) + (1)(-1)^2}{-1} = 4$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{x+y}$, con u versore di $(1,1)$, calcolare $\mathcal{D}_u f(0,0)$ e $\mathcal{D}^2_{u,u} f(0,0)$.

Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:
$\mathcal{D}_u f\,(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot u$ e $\mathcal{D}^2_{u,u} f(0,0) = u \cdot \mathbb{H}(0,0) \cdot u^T$. Sarà poi $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Essendo: $\nabla f(x,y) = ((1+x+y)e^{x+y}, (1+x+y)e^{x+y})$, avremo $\nabla f(0,0) = (1,1)$ per cui: $\mathcal{D}_u f\,(0,0) = (1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Avremo poi:

$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} (2+x+y)e^{x+y} & (2+x+y)e^{x+y} \\ (2+x+y)e^{x+y} & (2+x+y)e^{x+y} \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$ e quindi:

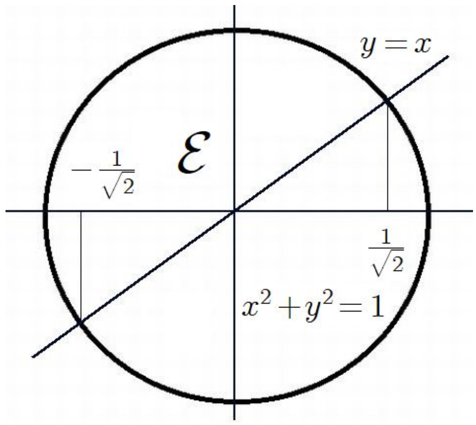
$$\mathcal{D}^2_{u,u} f(0,0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{Vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \leq y \end{cases} \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2x^2=1 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$



Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x+y-\lambda_1\left(x^2+y^2-1\right)-\lambda_2(x-y)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1=0,\lambda_2=0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x=1\neq 0 \\ \Lambda'_y=1\neq 0 \\ x^2+y^2\leq 1 \\ x\leq y \end{cases} \text{ nessuna soluzione.}$$

2) caso $\lambda_1\neq 0,\lambda_2=0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x=1-2\lambda_1 x=0 \\ \Lambda'_y=1-2\lambda_1 y=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x\leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2\lambda_1} \\ y=\frac{1}{2\lambda_1} \\ \frac{1}{4\lambda_1^2}+\frac{1}{4\lambda_1^2}=1 \\ x\leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2\lambda_1} \\ y=\frac{1}{2\lambda_1} \\ \lambda_1^2=\frac{1}{2} \\ x\leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2\lambda_1} \\ y=\frac{1}{2\lambda_1} \\ \lambda_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x\leq y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x\leq y : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x\leq y : \text{vera} \end{cases}.$$

Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$ potrebbe essere punto di massimo;
il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1=0,\lambda_2\neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_2 = 0 \\ y = x \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ y = x \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} : \text{ nessuna soluzione.}$$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \text{dato che } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 1 - \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2}\lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_1 + 1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{2}\lambda_1 - 1 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \lambda_2 = 1 - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases};$$

Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è già stato studiato al caso 2) e potrebbe essere punto di massimo;

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 1 + \sqrt{2}\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{2}\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_1 + 1 = 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{2}\lambda_1 - 1 \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ \lambda_2 = 1 - 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases};$$

Il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è già stato studiato al caso 2) e potrebbe essere un punto di minimo.

Essendo emerso un solo candidato, sia per il punto di massimo che per il punto di minimo, il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ sarà il punto di massimo mentre il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$ sarà il punto di minimo.

II M 2) Risolvere l'equazione differenziale $y' = (1 + x)\left(1 + y^2\right)$.

Si tratta di una equazione a variabili separabili, per cui avremo:

$y' = (1 + x)\left(1 + y^2\right) \Rightarrow \dfrac{1}{1 + y^2}\, y' = 1 + x$, da cui, passando alle primitive:

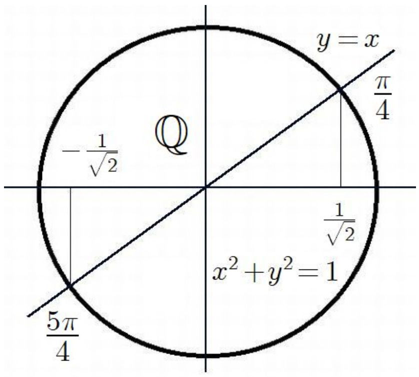
$$\int \frac{1}{1 + y^2}\, y' \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y = \int 1 + x \,\mathrm{d}x + k \Rightarrow$$

$\operatorname{arctg} y = x + \frac{1}{2}x^2 + k \Rightarrow y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + k\right)$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Posto il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x + y = 1 \\ -x + y' - 3y = 0 \end{cases}$, passando alla forma matriciale poniamo:

$$\begin{Vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D-3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D-3 \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & D-3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(D^2 - 4D + 4\right)(x) = (D-2)^2(x) = (D-3)(1) - 0 = 0 - 3 = -3\,.$$
Quindi l'equazione sarà: $x'' - 4x' + 4x = -3$.
Dall'equazione $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ abbiamo la soluzione doppia $\lambda = 2$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t}$.
Per trovare una soluzione particolare della non omogenea dobbiamo porre $x_0(t) = k$ che, sostituita nell'equazione $x'' - 4x' + 4x = -3$ ci da $4k = -3 \Rightarrow k = -\dfrac{3}{4}$.
La soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t} - \dfrac{3}{4}$.
Dall'equazione $x' - x + y = 1$ ricaviamo $y = x - x' + 1$ e quindi:
$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t} - \dfrac{3}{4} - \left(2c_1 e^{2t} + c_2\, e^{2t} + 2c_2\, t\, e^{2t}\right) + 1$ da cui :
$y(t) = -c_1 e^{2t} - c_2\,(1+t)\, e^{2t} + \dfrac{1}{4}$ e quindi la soluzione generale del sistema:
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, t\, e^{2t} - \frac{3}{4} \\ y(t) = -c_1 e^{2t} - c_2\,(1+t)\, e^{2t} + \frac{1}{4} \end{cases}.$$
II M 4) Se $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \le y; x^2 + y^2 \le 1\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \le y; x^2 + y^2 \le 1\right\}$ passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ avremo:
$$\iint_{\mathbb{Q}} x + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 (\varrho\cos\vartheta + \varrho\operatorname{sen}\vartheta)\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 \varrho^2(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\frac{\varrho^3}{3}\bigg|_0^1\right)(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 0\,.$$
Come si sarebbe potuto dedurre vista la simmetria della funzione integranda rispetto alla retta di equazione $y = -x$.