Compito di ANALISI MATEMATICA 17/10/2025

I M 1) Calcolare $i^5 \cdot \dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^7}$.

Essendo $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$;
da $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$ otteniamo:
$(1-i)^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{21\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = -2-2\,i$;
da $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ otteniamo:
$(1+i)^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = 8 - 8\,i$ e quindi:

$$i^5 \cdot \frac{(1-i)^3}{(1+i)^7} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$i^5 \cdot \frac{(1-i)^3}{(1+i)^7} = \frac{1}{4}(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = \frac{1}{4}\,.$$

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

Valutiamo se la funzione risulta continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\vartheta \cdot \frac{\varrho^2(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\,\vartheta)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\vartheta \cdot \cos 2\vartheta = 0$$

con convergenza uniforme in quanto: $|\varrho\cos\vartheta \cdot \cos 2\vartheta| \leq \varrho$.
Quindi la funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \frac{h^2 - 0^2}{h^2 + 0^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 \cdot \frac{0^2 - h^2}{0^2 + h^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 0 - (1,0)(x,y)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2 - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \text{ e passando a coordinate polari:}$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \frac{-2\varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^3} = -2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,.$$

Essendo il limite uguale a 0 solo per particolari valori di ϑ, ne consegue che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = \log(x+y) - 2y = 0$ definisce in un intorno del punto $(1,0)$ una funzione implicita $y = y(x)$. Calcolare $y'(1)$ e $y''(1)$.

Dato che f è palesemente funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, passiamo a calcolare il gradiente ed avremo: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x+y}; \frac{1}{x+y} - 2\right)$ da cui $\nabla f(1,0) = (1;\, -1)$.
Essendo $f'_y(1,0) = -1 \neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.
Risulta $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\frac{f'_x(1,0)}{f'_y(1,0)} = -\frac{1}{-1} = 1$.
Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{Vmatrix}$ sarà :
$\mathbb{H}(1,0) = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$. Dalla $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{f''_{xx} + 2\,f''_{xy}\,(y') + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha :
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(1) = -\frac{-1 + 2(-1)(1) + (-1)(1)^2}{-1} = -4$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x-y}$, siano $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $w = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Calcolare le derivate direzionali $D_v\, f(x,y)$ e $D^2_{v,w}\, f(x,y)$ sapendo che $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:
$\mathcal{D}_v f\,(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x,y) = v \cdot \mathbb{H}(x,y) \cdot w^T$.
Risultando $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e
$w = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) = \left(\cos\frac{3\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, avremo poi:
$\nabla f(x,y) = (e^{x-y},\, -e^{x-y})$ e $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{Vmatrix}$.
Sarà quindi $\mathcal{D}_v f\,(x,y) = (e^{x-y},\, -e^{x-y}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e^{x-y} - e^{x-y}) = 0$ ed inoltre:

$$\mathcal{D}^2_{v,w} f(x,y) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} =$$

$$\mathcal{D}^2_{v,w} f(x,y) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\sqrt{2}\,e^{x-y} \\ \sqrt{2}\,e^{x-y} \end{Vmatrix} = -e^{x+y} + e^{x+y} = 0\,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x - 2y \\ \text{s.v. } x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$.

Si tratta di un problema di ricerca di massimi e minimi sotto vincolo di uguaglianza.
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette valore massimo e valore minimo assoluti.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = x - 2y - \lambda\left(x^2 + 2y^2 - 1\right)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = -2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo due soluzioni: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Occorre a questo punto, per le condizioni del II ordine, costruire la matrice Hessiana orlata.

$\overline{\mathbb{H}}(x,y,\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & -4\lambda \end{Vmatrix}$ dalla quale otteniamo:

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

avendo sommato alla terza riga il doppio della seconda, per cui:

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (-4-8) > 0$$

e quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$ sarà il punto di massimo;

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

avendo sommato alla terza riga il doppio della seconda, per cui:

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (-4-8) < 0$$

e quindi il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, con $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$ sarà il punto di minimo.

II M 2) Risolvere l'equazione differenziale $y' = (1+2x)(1+y)$.

Si tratta di una equazione a variabili separabili, per cui avremo, dopo aver posto $1 + y \neq 0$ ovvero $y \neq -1$:

$y' = (1+2x)(1+y) \Rightarrow \frac{1}{1+y}\, y' = 1 + 2x$, da cui, passando alle primitive:

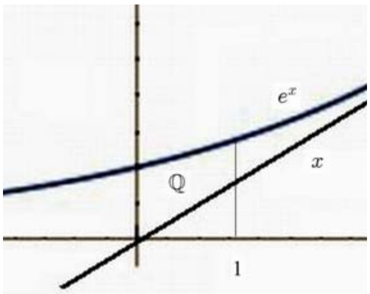
$$\int \frac{1}{1+y}\, y' \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y}\, \mathrm{d}y = \int 1 + 2x \, \mathrm{d}x + k \Rightarrow \log(1+y) = x + x^2 + k \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1+y=e^{x+x^2+k} \Rightarrow y=e^{x+x^2+k}-1$.
La funzione $y=-1$ che si vede essere soluzione sostituendo nell'equazione di partenza, risulta una soluzione particolare in quanto ottenuta per $k \to -\infty$.

II M 3) Risolvere l'equazione differenziale lineare non omogenea: $y'''-y''-y'+y=\operatorname{sen} x$.

Per determinare le radici del polinomio caratteristico $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$ notiamo che questo si annulla per $\lambda=1$ ed usando la regola di Ruffini avremo:
$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right)=0$ per avere quindi le radici $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$
e quindi la soluzione dell'equazione omogenea sarà data da $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}$.
Per trovare una soluzione particolare, usando gli annichilatori, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo: $y_0(x)=a\operatorname{sen} x+b\cos x$ dalla quale poi:
$y_0'(x)=a\cos x-b\operatorname{sen} x$; $y_0''(x)=-a\operatorname{sen} x-b\cos x$; $y_0'''(x)=-a\cos x+b\operatorname{sen} x$
e quindi andando a sostituire avremo:
$-a\cos x+b\operatorname{sen} x+a\operatorname{sen} x+b\cos x-a\cos x+b\operatorname{sen} x+a\operatorname{sen} x+b\cos x=$
$=2a\operatorname{sen} x+2b\operatorname{sen} x-2a\cos x+2b\cos x=\operatorname{sen} x$ che porta al sistema:
$\begin{cases} 2a+2b=1 \\ -2a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+2a=1 \\ a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$ e quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà: $y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} x+\dfrac{1}{4}\cos x$.

II M 4) Data $f(x,y)=x+2y$ e data la regione $\mathbb{Q}=\{(x,y): 0\le x\le 1, x\le y\le e^x\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q}=\{(x,y): 0\le x\le 1, x\le y\le e^x\}$ avremo:
$$\iint_{\mathbb{Q}} x+2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\int_x^{e^x} x+2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(xy+y^2\right|_x^{e^x}\mathrm{d}x=$$
$$=\int_0^1\left(xe^x+e^{2x}\right)-\left(x^2+x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 xe^x+e^{2x}-2x^2\,\mathrm{d}x=$$
integrando xe^x per parti $\int e^x\,x\,\mathrm{d}x=e^x\,x-\int e^x\cdot 1\,\mathrm{d}x=e^x\,x-e^x$
$$=\left(xe^x-e^x+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{2}{3}x^3\right|_0^1=\left(e-e+\frac{1}{2}e^2-\frac{2}{3}\right)-\left(0-1+\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{6}.$$