

COMPITO di MATEMATICA GENERALE 17/10/2025

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log(1 + x^2)$.

C.E.: $\mathbb{R}$, in quanto $1 + x^2 > 0 \forall x$. La funzione è continua in $\mathbb{R}$.

$f(x) = f(-x)$: funzione pari, grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1 + x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + x^2) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^2)}{x} = 0 : \text{non ci sono asintoti obliqui.}$$

$f(x) = \log(1 + x^2) \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1$ vera $\forall x$; funzione sempre non negativa;

$$f(0) = \log 1 = 0.$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0;$$

la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$.

Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di minimo.

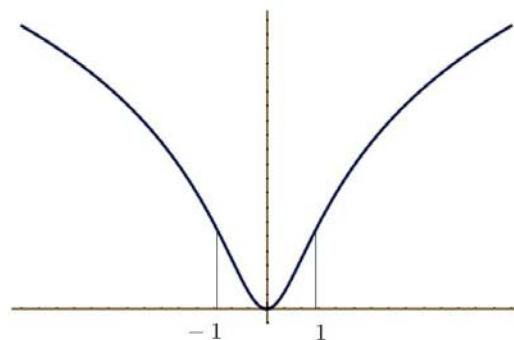
$$\text{Da } f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \text{ avremo poi } f''(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Quindi $f(x)$ è funzione concava per $x < -1$ e per $x > 1$, convessa per $-1 < x < 1$.

Nei punti $x = -1$ e $x = 1$ abbiamo due punti di flesso con $f(-1) = f(1) = \log 2$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + e^x}{x + e^{2x}}.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{4} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + e^x}{x + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$$

in quanto $2^x = o(e^x)$ e $x = o(e^{2x})$ per $x \rightarrow +\infty$.

3) Data la funzione $f(x) = 3x + 2$ sia $f(g(x)) = e^{1-2x}$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e poi della funzione $g(f(x))$.

$$\text{Da } f(x) = 3x + 2 \text{ segue } f(g(x)) = 3g(x) + 2 = e^{1-2x} \Rightarrow 3g(x) = e^{1-2x} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}(e^{1-2x} - 2) \Rightarrow g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}(e^{1-2(3x+2)} - 2) = \frac{1}{3}(e^{-6x-3} - 2).$$

4) Considerate le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2 - x^2$, e le rette tangenti ai loro grafici nel punto $x = 0$, determinare il punto nel quale si tagliano le due rette tangenti.

L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0 è data da:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Per $f(x) = e^x$ avremo $f(0) = 1$ e da $f'(x) = e^x$ avremo $f'(0) = 1$ e quindi l'equazione della retta tangente in $x = 0$ sarà: $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$;

per $g(x) = 2 - x^2$ avremo $g(0) = 2$ e da $g'(x) = -2x$ avremo $g'(0) = 0$ e quindi l'equazione della retta tangente in $x = 0$ sarà: $y - 2 = 0 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 2$.

Per determinare il punto nel quale si tagliano le due rette tangenti basta porre:

$$y = x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2. \text{ Il punto di intersezione è quindi il punto } (1, 2).$$

5) Calcolare $\int_0^1 x + 2x^2 + 3e^{3x} dx$.

Determiniamo una primitiva ($k = 0$) ed avremo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x + 2x^2 + 3e^{3x} dx &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + e^{3x} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + e^3 \right) - (0 + 0 + 1) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + e^3 - 1 = e^3 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

6) Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - kxy$, che presenta $(0, 0)$ come suo unico punto stazionario, determinare se esistono valori del parametro k per i quali tale punto risulta un punto di sella.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (2x - ky, 2y - kx) \text{ per cui:}$$

$$\begin{cases} 2x - ky = 0 \\ 2y - kx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ come unica soluzione.}$$

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ -k & 2 \end{vmatrix}$, per avere un punto di sella basta che sia:

$$|\mathbb{H}_2(0, 0)| = 4 - k^2 < 0 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow k < -2 \text{ oppure } k > 2.$$

Se fosse $k = -2$ oppure $k = 2$ sarebbe $f(x, y) = x^2 + y^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$ e in questo caso si vede facilmente che il punto $(0, 0)$ sarebbe un punto di minimo.

7) Data la funzione $f(x) = e^x - x$ si determini il punto x_0 ottenuto applicando alla funzione il Teorema di Lagrange (o del Valor Medio) nell'intervallo $[0, 3]$.

La funzione data è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Applicando il Teorema di Lagrange segue che esiste almeno un punto x_0 dell'intervallo $[0, 3]$

per il quale vale l'uguaglianza: $f'(x_0) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \Rightarrow e^{x_0} - 1 = \frac{e^3 - 3 - 1}{3} \Rightarrow$ da cui :

$$e^{x_0} = \frac{e^3 - 4}{3} + 1 = \frac{e^3 - 1}{3} \Rightarrow x_0 = \log \left(\frac{e^3 - 1}{3} \right).$$

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ e il vettore $\mathbb{X} = (2, 1, 1)$, si determini il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $\mathbb{Y} = (1, 1, 1)$.

$$\text{Risulta } \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2+1 \\ 2-1+k \\ 4+1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ k+1 \\ 5 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} \text{ risulta parallelo al vettore } \mathbb{Y} = (1, 1, 1) \text{ se } k = 4 \text{ per cui } \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, se le proposizioni $\mathbb{P}_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ e $\mathbb{P}_2 : \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$ fossero entrambe false, determinare verità o falsità della proposizione $\mathbb{P} : \text{non } \mathbb{A} \Leftrightarrow \text{non } \mathbb{C}$.

Costruita la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{P}_1: \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{P}_2: \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$	$\text{non } \mathbb{A}$	$\text{non } \mathbb{C}$	$\text{non } \mathbb{A} \Leftrightarrow \text{non } \mathbb{C}$
1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

le proposizioni $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono entrambe false solo nella terza riga, nella quale la proposizione $\mathbb{P} : \text{non } \mathbb{A} \Leftrightarrow \text{non } \mathbb{C}$ risulta vera.

10) Data la funzione $f(x) = x^2 \cdot e^x$ se ne determini l'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado.

Essendo $P_2(x, 0) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2} f''(0)(x - 0)^2$ avremo:

$$f(0) = 0 \cdot 1 = 0;$$

$$\text{da } f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \text{ segue } f'(0) = 0 + 0 = 0;$$

$$\text{da } f''(x) = 2e^x + 2x \cdot e^x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \text{ segue } f''(0) = 2 + 0 + 0 + 0 = 2 \text{ e quindi :}$$

$$P_2(x, 0) = 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} (2) x^2 = x^2.$$