Prova Intermedia Anno 2025- Compito $\mathbb{A}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\cdot(3^x-1)}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\cdot(3^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x^2}\cdot\frac{4x}{x}\cdot\frac{x}{(3^x-1)} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{\log 3} = 2\log_3 e = \log_3 e^2 .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5-6}{x+5}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{(-6)}{x+5}\right)^{x+5}\right]^{\frac{x}{x+5}} = \left(e^{-6}\right)^1 = \frac{1}{e^6} .$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\log(1-\log(1-x))$.

Dovrà essere $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-\log(1-x)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ \log(1-x)<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ 1-x<e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>1-e \end{cases}$
e quindi $\mathcal{C.E.}$: $]1-e;1[$ ovvero $1-e<x<1$.

3) Date le funzioni $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $g(x)=2^x-1$ e $h(x)=3x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(h(x))) = f(g(3x)) = f\left(2^{3x}-1\right) = \frac{1}{1-(2^{3x}-1)} = \frac{1}{2-2^{3x}} = \frac{1}{2-8^x} .$$

Da $\frac{1}{2-8^x} = y \Rightarrow 2-8^x = \frac{1}{y} \Rightarrow 8^x = 2-\frac{1}{y} \Rightarrow x = \log_8\left(\frac{2y-1}{y}\right)$
e quindi la funzione inversa: $y=\log_8\left(\frac{2x-1}{x}\right)$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $(non\,\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})$ sia falsa.

Costruita la tavola di verità, vista l'ipotesi, dobbiamo considerare solo la terza e la quarta riga, dove la proposizione $(non\,\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})$ è falsa.
Ed in queste vediamo che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ è sempre vera.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$P_2:\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C}$	$P_1\Rightarrow P_2$	$non\ \mathbb{A}$	$non\mathbb{A}o\mathbb{B}$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

5) Date le funzioni $f(x)=2^{x-1}+k$ e $g(x)=\log(x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O

l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 3.

Risulta $f(0)=2^{0-1}+k=\dfrac{1}{2}+k$ mentre $g(x)=\log(x-3)=0$ se $x-3=1\Rightarrow x=4$ e quindi: $\text{Area(AOB)}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+k\right)\cdot 4=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}+k\right)\Rightarrow 1+2k=3\Rightarrow k=1\,.$

$\boxed{\text{Prova Intermedia Anno 2025- Compito } \mathbb{B}1}$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1-x)}{\operatorname{tg}2x}\;;\;\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2+2x}\right)^{x}\,.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1-x)}{\operatorname{tg}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+(-x))}{(-x)}\cdot\dfrac{2x}{\operatorname{tg}2x}\cdot\dfrac{-1}{2}=1\cdot(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\,.$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2x+2}\right)^{x}=\left(\to\frac{3}{2}\right)^{(\to+\infty)}=+\infty\,.$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\dfrac{1}{\log(x-1)-2}\,.$
Dovrà essere:
$\begin{cases}x-1>0\\ \log(x-1)-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ \log(x-1)\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ x-1\neq e^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ x\neq e^2+1\end{cases}$ e quindi:
$\mathcal{C.E.}\;:\;]1;e^2+1[\,\cup\,]e^2+1;+\infty[$ ovvero $1<x$ e $x\neq e^2+1\,.$

3) Date le funzioni $f(x)=\log x\,,\;g(x)=\dfrac{x+1}{x}$ e $h(x)=x-3$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione dell'inversa.

$f(g(h(x)))=f(g(x-3))=f\left(\dfrac{x-3+1}{x-3}\right)=f\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)=\log\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)\,.$
Da $\log\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)=y\Rightarrow\dfrac{x-2}{x-3}=e^y\Rightarrow x-2=e^y(x-3)\Rightarrow x(1-e^y)=2-3e^y\Rightarrow$
$\Rightarrow x=\dfrac{2-3e^y}{1-e^y}$ e quindi la funzione inversa: $y=\dfrac{2-3e^x}{1-e^x}=\dfrac{3e^x-2}{e^x-1}\,.$

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{B})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $(non\,\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ sia falsa.

Costruita la tavola di verità, vista l'ipotesi, dobbiamo considerare solo la seconda e la sesta riga, dove la proposizione $(non\,\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ è falsa.
Ed in queste vediamo che la proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{B})$ è sempre vera.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	P_1:$\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	P_2:$\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{B}$	$P_1\Leftrightarrow P_2$	*non* $\mathbb{B}$	*non*$\mathbb{B}$*o*$\mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

5) Date le funzioni $f(x) = 3^{1-x} + k$ e $g(x) = \log(x-2)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Risulta $f(0) = 3^{1-0} + k = 3 + k$ mentre $g(x) = \log(x-2) = 0$ se $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$ e quindi: $\text{Area(AOB)} = \dfrac{1}{2} \cdot (3+k) \cdot 3 = 6 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot (3+k) = 2 \Rightarrow 3 + k = 4 \Rightarrow k = 1$.