Prova Intermedia Anno 2025- Compito $\mathbb{C}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{tg}2x}\ ;\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{2}}-1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{tg}2x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\text{, da}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha\,;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^{x}=\lim_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\frac{x}{x+3}}=\left(e^{2}\right)^{1}=e^{2}.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\log\left(2-\log x\right)$.

Dovrà essere: $\begin{cases} x>0 \\ 2-\log x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0 \\ \log x<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0 \\ x<e^{2}\end{cases}$ e quindi:
$\mathcal{C.E.}\ :\ ]0;e^{2}[$ ovvero $0<x<e^{2}$.

3) Date le funzioni $f(x)=3x+1$, $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ e $h(x)=2^{x}$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(h(x)))=f(g(2^{x}))=f\left(\frac{2^{x}}{2^{x}+1}\right)=3\,\frac{2^{x}}{2^{x}+1}+1=\frac{3\cdot 2^{x}+2^{x}+1}{2^{x}+1}=\frac{4\cdot 2^{x}+1}{2^{x}+1}.$$

Da $\dfrac{4\cdot 2^{x}+1}{2^{x}+1}=y\Rightarrow 4\cdot 2^{x}+1=y\left(2^{x}+1\right)\Rightarrow 2^{x}\left(4-y\right)=y-1\Rightarrow 2^{x}=\dfrac{y-1}{4-y}\Rightarrow$
$\Rightarrow x=\log_{2}\dfrac{y-1}{4-y}$ e quindi la funzione inversa: $y=\log_{2}\dfrac{x-1}{4-x}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{A})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})$ sia vera.

Costruita la tavola di verità, vista l'ipotesi, dobbiamo considerare solo la quinta e la settima riga, dove la proposizione $(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})$ è vera.
Ed in queste vediamo che la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{A})$ è vera in quinta riga e falsa in settima.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$P_2 : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A}$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$	$non \mathbb{A}$	$non \mathbb{A}\, e\, \mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0

5) Date le funzioni $f(x) = k \cdot 3^{1+x}$ e $g(x) = \log(x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 12.

Risulta $f(0) = k \cdot 3^{1+0} = 3k$ mentre $g(x) = \log(x-3) = 0$ se $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 4 = 12 \Rightarrow 12k = 24 \Rightarrow k = 2$.

Prova Intermedia Anno 2025- Compito $\mathbb{D}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(2^x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x} \, ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3+2x}{3+3x} \right)^{1-x} .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(2^x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{2^x - 1}{x} = 1 \cdot 1 \cdot \log 2 = \log 2 .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3+2x}{3+3x} \right)^{1-x} = \left(\to \frac{2}{3} \right)^{(\to -\infty)} = +\infty .$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \log(1-x) \cdot \log^2 x$.

Dovrà essere: $\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ e quindi: $\mathcal{C.E.}: \,]0;1[$ ovvero $0 < x < 1$.

3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = 2x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione dell'inversa.

$$f(g(h(x))) = f(g(2x)) = f(\log 2x) = \frac{\log 2x}{\log 2x + 3} .$$

Da $\frac{\log 2x}{\log 2x + 3} = y \Rightarrow \log 2x = y(\log 2x + 3) \Rightarrow \log 2x \cdot (1-y) = 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2x = \frac{3y}{1-y} \Rightarrow 2x = e^{\frac{3y}{1-y}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} e^{\frac{3y}{1-y}}$ e quindi la funzione inversa: $y = \frac{1}{2} e^{\frac{3x}{1-x}}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{C}\, e\, non\, \mathbb{B})$ sia vera.

Costruita la tavola di verità, vista l'ipotesi, dobbiamo considerare solo la terza e la settima riga, dove la proposizione $(\mathbb{C}\, e\, non\, \mathbb{B})$ è vera.
Ed in queste vediamo che la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ è vera in terza riga e falsa in settima.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	P_1:$\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	P_2:$\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C}$	$P_1\Rightarrow P_2$	$non\mathbb{B}$	$\mathbb{C}\, e\, non\mathbb{B}$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0

5) Date le funzioni $f(x) = 2^{1-x} + k$ e $g(x) = \log(x-4)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 10.

Risulta $f(0) = 2^{1-0} + k = 2 + k$ mentre $g(x) = \log(x-4) = 0$ se $x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot (2+k) = 10 \Rightarrow 2 + k = 4 \Rightarrow k = 2$.