$\boxed{\text{Prova Intermedia 2025}}$

I M 1) Calcolare $\sqrt[4]{i^{40}+i^{15}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt[5]{(x^2+y^2)^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ k & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, si determini il valore del parametro k che rende la funzione continua in $(0,0)$ e si verifichi poi se tale funzione risulti anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Sia $f(x,y)=x^2y-xy^2$ e siano v il versore di $(1,-1)$ e w il versore di $(1,1)$. Determinare tutti i punti (x_0,y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=0 \\ \mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)=2 \end{cases}$.

I M 4) Con l'equazione $f(x,y,z)=e^{x^2y}-e^{yz^2}-x+z=0$, che risulta soddisfatta nel punto $P=(1,1,1)$, si definisce una funzione implicita $z=z(x,y)$. Si calcoli il gradiente di z nel punto $(1,1)$.

I M 5) Verificare che con il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=e^{xy}+e^{xz}-2e^{yz}=0 \\ g(x,y,z)=xyz^2-x^2z-y^3z+y=0 \end{cases}$, che risulta soddisfatto nel punto $P=(1,1,1)$, si può definire, in un intorno di $x=1$, una funzione in forma implicita $x\to(y,z)$ e di questa calcolare le derivate prime in $x=1$.