

Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA 2/12/2025

I M 1) Calcolare $\sqrt[4]{i^{40} + i^{15}}$.

Da $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ segue:

$$i^{40} = \cos \left(40 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(40 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos (20\pi) + i \sin (20\pi) = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$i^{15} = \cos \left(15 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(15 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(6\pi + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(6\pi + \frac{3\pi}{2} \right) =$$

$$i^{15} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Quindi $\sqrt[4]{i^{40} + i^{15}} = \sqrt[4]{1 - i}$.

Oppure $i^{40} = (i^4)^{10} = 1^{10} = 1$ mentre $i^{15} = i^{12} \cdot i^3 = (i^4)^3 \cdot (-i) = 1 \cdot (-i) = -i$.

Ma $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ e quindi:

$$\sqrt[4]{1 - i} = \sqrt[8]{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{16} + k \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{16} + k \frac{2\pi}{4} \right) \right), 0 \leq k \leq 3 \text{ e quindi:}$$

$$\text{se } k = 0 : \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16} \right);$$

$$\text{se } k = 1 : \sqrt[8]{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16} \right);$$

$$\text{se } k = 2 : \sqrt[8]{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{16} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{16} + \pi \right) \right) = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{16} + i \sin \frac{23\pi}{16} \right);$$

$$\text{se } k = 3 : \sqrt[8]{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) \right) = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{31\pi}{16} + i \sin \frac{31\pi}{16} \right).$$

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[5]{(x^2 + y^2)^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ k & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, si determini il valore

del parametro k che rende la funzione continua in $(0, 0)$ e si verifichi poi se tale funzione risulti anche differenziabile in $(0, 0)$.

Calcoliamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt[5]{(x^2 + y^2)^2}}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt[5]{(x^2 + y^2)^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\varrho^{\frac{4}{5}}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{\frac{6}{5}} \cos \vartheta \sin \vartheta = 0;$$

la convergenza è uniforme dato che $\left| \varrho^{\frac{6}{5}} \cos \vartheta \sin \vartheta \right| \leq \varrho^{\frac{6}{5}} < \varepsilon$, soddisfatta per $\varrho < \varepsilon^{\frac{5}{6}}$. La funzione è continua in $(0, 0)$ se $k = 0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h \cdot 0}{\sqrt[5]{(h^2 + 0^2)^2}} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{0 \cdot h}{\sqrt[5]{(0^2 + h^2)^2}} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt[5]{(x^2+y^2)^2}} - 0 - (0,0) \cdot (x,y) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{9}{10}}} . \end{aligned}$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\varrho^{\frac{9}{5}}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^{\frac{1}{5}} \cos \vartheta \sin \vartheta = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sqrt[5]{\varrho} \cos \vartheta \sin \vartheta = 0 .$$

la convergenza è uniforme dato che $|\sqrt[5]{\varrho} \cos \vartheta \sin \vartheta| \leq \sqrt[5]{\varrho} < \varepsilon$ soddisfatta per $\varrho < \varepsilon^5$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Sia $f(x,y) = x^2y - xy^2$ e siano v il versore di $(1, -1)$ e w il versore di $(1, 1)$. Determinare tutti i punti (x_0, y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = 0 \\ \mathcal{D}_{v,w}^2 f(x_0, y_0) = 2 \end{cases}$.

La funzione, essendo un polinomio, risulta differenziabile due volte ovunque.

Da $(1, -1)$ si ha $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, da $(1, 1)$ si ha $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mentre dal gradiente $\nabla f(x,y) = (2xy - y^2; x^2 - 2xy)$ otteniamo: $\mathbb{H}(x,y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x - 2y \\ 2x - 2y & -2x \end{vmatrix}$.

Quindi sarà:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (2xy - y^2; x^2 - 2xy) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ \mathcal{D}_{v,w}^2 f(x,y) = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \begin{vmatrix} 2y & 2x - 2y \\ 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| = 2 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (2xy - y^2 - x^2 + 2xy) = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \| \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \| \cdot \begin{vmatrix} 2y & 2x - 2y \\ 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4xy - y^2 - x^2 = 0 \\ \| \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \| \cdot \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 4xy - y^2 - x^2 = 0 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4x(2-x) - (2-x)^2 - x^2 = 0 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 8x - 4x^2 - 4 - x^2 + 4x - x^2 = 0 \\ y = 2-x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 0 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} \\ y = 2-x \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi le due soluzioni $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

I M 4) Con l'equazione $f(x,y,z) = e^{x^2y} - e^{yz^2} - x + z = 0$, che risulta soddisfatta nel punto $P = (1, 1, 1)$, si definisce una funzione implicita $z = z(x,y)$. Si calcoli il gradiente di z nel punto $(1, 1)$.

La funzione è chiaramente differenziabile ed il suo gradiente è dato da:

$$\nabla f(x, y, z) = (2xy e^{x^2 y} - 1; x^2 e^{x^2 y} - z^2 e^{y z^2}; -2yz e^{y z^2} + 1)$$

da cui si ha $\nabla f(1, 1, 1) = (2e - 1; 0; 1 - 2e)$ ed essendo $f'_z(1, 1, 1) = 1 - 2e \neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $z = z(x, y)$. Risulta quindi:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -\frac{f'_x(1, 1, 1)}{f'_z(1, 1, 1)} = -\frac{2e - 1}{1 - 2e} = 1 \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -\frac{f'_y(1, 1, 1)}{f'_z(1, 1, 1)} = -\frac{0}{1 - 2e} = 0 \text{ e quindi avremo } \nabla z(1, 1) = (1; 0).$$

I M 5) Verificare che con il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = e^{xy} + e^{xz} - 2e^{yz} = 0 \\ g(x, y, z) = xyz^2 - x^2 z - y^3 z + y = 0 \end{cases}$, che risulta soddisfatto nel punto $P = (1, 1, 1)$, si può definire, in un intorno di $x = 1$, una funzione in forma implicita $x \rightarrow (y, z)$ e di questa calcolare le derivate prime in $x = 1$.

Calcoliamo la matrice Jacobiana :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} y e^{xy} + z e^{xz} & x e^{xy} - 2z e^{yz} & x e^{xz} - 2y e^{yz} \\ y z^2 - 2xz & x z^2 - 3y^2 z + 1 & 2xyz - x^2 - y^3 \end{vmatrix} \text{ da cui:}$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)}(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} 2e & -e & -e \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dato che risulta $\begin{vmatrix} -e & -e \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -e \neq 0$ si può definire, in un intorno di $x = 1$, una funzione in forma implicita $x \rightarrow (y, z)$, le cui derivate in $x = 1$ sono date da:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1) = -\frac{\begin{vmatrix} 2e & -e \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e & -e \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{-e}{-e} = -1 \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1) = -\frac{\begin{vmatrix} -e & 2e \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e & -e \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{e + 2e}{-e} = 3.$$