COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2025/26

Prova Intermedia 2025

I M 1) Calcolare $\sqrt[4]{i^{40}+i^{15}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt[5]{(x^2+y^2)^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ k & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, si determini il valore del parametro k che rende la funzione continua in $(0,0)$ e si verifichi poi se tale funzione risulti anche differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Sia $f(x,y)=x^2y-xy^2$ e siano v il versore di $(1,-1)$ e w il versore di $(1,1)$. Determinare tutti i punti (x_0,y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=0 \\ \mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)=2 \end{cases}$.

I M 4) Con l'equazione $f(x,y,z)=e^{x^2y}-e^{yz^2}-x+z=0$, che risulta soddisfatta nel punto $P=(1,1,1)$, si definisce una funzione implicita $z=z(x,y)$. Si calcoli il gradiente di z nel punto $(1,1)$.

I M 5) Verificare che con il sistema $\begin{cases} f(x,y,z)=e^{xy}+e^{xz}-2e^{yz}=0 \\ g(x,y,z)=xyz^2-x^2z-y^3z+y=0 \end{cases}$, che risulta soddisfatto nel punto $P=(1,1,1)$, si può definire, in un intorno di $x=1$, una funzione in forma implicita $x\to(y,z)$ e di questa calcolare le derivate prime in $x=1$.

I Appello Sessione Invernale 2026

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^3=3i\,z$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x,y)=\begin{cases} x^2\cdot\dfrac{x+y}{x^2+y^2} & :(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & :(x,y)=(0,0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y)=e^{x^2-y^2}-xy=0$ definisce una funzione implicita $y=y(x)$ in un intorno del punto $P=(1,1)$. Calcolare $y'(1)$ e $y''(1)$.

I M 4) Data $f(x,y)=e^{x-y}$ e la direzione $v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$ si determinino i valori α per i quali risulta $\mathcal{D}_v f(0,0)=0=\mathcal{D}^2_{v,v}f(0,0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=2x-4y \\ \text{s.v. } x^2+4y^2\le 1 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=x+y+2t \\ y'=-x+y-3t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'=(1+e^x)(1+y) \\ y(0)=3 \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y)=x+2y$ e data $\mathbb{Q}=\{(x,y):0\le x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.