Compito di ANALISI MATEMATICA 8/1/2026

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^3 = 3iz$.

Da $z^3 = 3iz \Rightarrow z^3 - 3iz = z\left(z^2 - 3i\right) = 0$.
Una prima soluzione è data da $z = 0$; le altre due soluzioni sono date da:
$z^2 = 3i \Rightarrow z = \sqrt{3i}$. Essendo:
$3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$ sarà poi:
$\sqrt{3i} = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{2}\right)\right),\ 0 \le k \le 1$.
Per $k = 0\ :\ \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$;
per $k = 1\ :\ \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \dfrac{x+y}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

Valutiamo se la funzione risulta continua in $(0,0)$. Passando a coordinate polari avremo:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cdot \frac{x+y}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\ \varrho^2 \cos^2\vartheta \cdot \frac{\varrho(\cos\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta)}{\varrho^2} =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0}\ \varrho\cos^2\vartheta \cdot (\cos\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta) = 0$$
con convergenza uniforme in quanto: $\left|\varrho\cos^2\vartheta \cdot (\cos\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta)\right| \le 2\varrho$.
Quindi la funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\ h^2 \cdot \frac{h+0}{h^2+0} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = \lim_{h\to 0} 1 = 1;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\ 0^2 \cdot \frac{0+h}{0^2+h^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 \cdot \frac{x+y}{x^2+y^2} - 0 - (1,0)(x,y)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 \cdot \frac{x+y}{x^2+y^2} - x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + x^2y - x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \text{ e passando a coordinate polari:}$$
$$\Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta)}{\varrho^3} = \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta).$$
Essendo il limite uguale a 0 solo per particolari valori di ϑ, ne consegue che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = e^{x^2-y^2} - xy = 0$ definisce una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno del punto $P = (1,1)$. Calcolare $y'(1)$ e $y''(1)$.

Dato che f è palesemente funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, passiamo a calcolare il gradiente ed avremo: $\nabla f(x,y) = \left(2x\, e^{x^2-y^2} - y;\, -2y\, e^{x^2-y^2} - x\right)$ da cui $\nabla f(1,1) = (1;\, -3)$.
Essendo $f'_y(1,1) = -3 \neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.
Risulta $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = y'(1) = -\dfrac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.
Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2(1+2x^2)\, e^{x^2-y^2} & -4xy\, e^{x^2-y^2} - 1 \\ -4xy\, e^{x^2-y^2} - 1 & 2(2y^2-1)\, e^{x^2-y^2} \end{Vmatrix}$ sarà :
$\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 2 \end{Vmatrix}$. Dalla $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{f''_{xx} + 2\, f''_{xy}\,(y') + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(1) = y''(1) = -\frac{6 + 2\,(-5)\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2}{-3} = \frac{6 - \frac{10}{3} + \frac{2}{9}}{3} = \frac{54 - 30 + 2}{27} = \frac{26}{27}.$$

I M 4) Data $f(x,y) = e^{x-y}$ e la direzione $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ si determinino i valori α per i quali risulta $\mathcal{D}_v f(0,0) = 0 = \mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0)$.

Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:
$\mathcal{D}_v f\,(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = v \cdot \mathbb{H}(x,y) \cdot v^T$.
Avremo poi: $\nabla f(x,y) = (e^{x-y},\, -e^{x-y}) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,\, -1)$ e
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.
Dovrà quindi risultare:

$$\begin{cases} (1,\, -1) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = 0 \\ \| \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0 \\ \| \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \| \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \\ -\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} = 0 \end{cases}$$ e sostituendo la prima nella seconda:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \\ \| \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \| \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

La seconda condizione risulta sempre soddisfatta quando è soddisfatta la prima, per cui le soluzioni saranno $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ e $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x - 4y \\ \text{s.v. } x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}$.

Si tratta di un problema di ricerca di massimi e minimi sotto vincolo di disuguaglianza.
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette valore massimo e valore minimo assoluti.
Formiamo la funzione lagrangiana:

$\Lambda(x,y,\lambda) = 2x - 4y - \lambda\big(x^2 + 4y^2 - 1\big)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

Caso $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 \neq 0 \\ \Lambda'_y = -4 \neq 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases} \text{ : nessuna soluzione;}$$

Caso $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = -4 - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + 4 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{2}{\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \lambda = \sqrt{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \lambda = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Abbiamo due soluzioni: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$.

Avendo trovato due sole soluzioni, il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ con $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$ sarà il punto di massimo mentre il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ con $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$ sarà il punto di minimo.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + 2t \\ y' = -x + y - 3t \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x - y = 2t \\ x + y' - y = -3t \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale: $\begin{Vmatrix} D-1 & -1 \\ 1 & D-1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2t \\ -3t \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} 2t & -1 \\ -3t & D-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(D^2 - 2D + 2\big)(x) = (D)(2t) - 2t - 3t = 2 - 5t$.
Quindi l'equazione sarà: $x'' - 2x' + 2x = 2 - 5t$.
Risolvendo l'equazione omogenea, da $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ abbiamo :
$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 e^t \operatorname{sen} t + c_2\, e^t \cos t$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t) = at + b$.
Sarà : $x_0'(t) = a, x_0''(t) = 0$ e quindi, andando a sostituire nella $x'' - 2x' + 2x = 2 - 5t$ otteniamo: $0 - 2a + 2at + 2b = 2 - 5t \Rightarrow \begin{cases} 2a = -5 \\ 2b - 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = 1 + a = -\frac{3}{2} \end{cases}$ e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea: $x(t) = c_1 e^t \operatorname{sen} t + c_2\, e^t \cos t - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}$.
Dalla prima equazione $x' = x + y + 2t$ ricaviamo $y = x' - x - 2t$ e quindi:
$y(t) = c_1 e^t \operatorname{sen} t + c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \cos t - c_2 e^t \operatorname{sen} t - \frac{5}{2} - c_1 e^t \operatorname{sen} t - c_2 e^t \cos t + \frac{5}{2}t + \frac{3}{2} - 2t$
e quindi la soluzione generale del sistema sarà:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t \operatorname{sen} t + c_2\, e^t \cos t - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2} \\ y(t) = c_1 e^t \cos t - c_2 e^t \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t - 1 \end{cases}.$$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (1+e^x)(1+y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$.

Si tratta di una equazione a variabili separabili, per cui avremo, dopo aver posto $1+y \neq 0$ ovvero $y \neq -1$:

$y' = (1+e^x)(1+y) \Rightarrow \dfrac{1}{1+y}\, y' = 1+e^x$, da cui, passando alle primitive:

$\displaystyle\int \frac{1}{1+y}\, y'\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y}\, \mathrm{d}y = \int 1+e^x\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow \log\,(1+y) = x + e^x + k \Rightarrow$

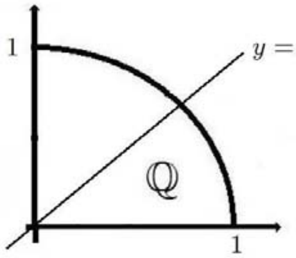
$\Rightarrow 1+y = e^{x+e^x+k} \Rightarrow y = e^{x+e^x+k} - 1$.

La funzione $y = -1$ che si vede essere soluzione sostituendo nell'equazione di partenza, risulta una soluzione particolare in quanto ottenuta per $k \to -\infty$.

Posto poi $y(0) = 3$ avremo $3 = e^{0+1+k} - 1 \Rightarrow e^{1+k} = 4 \Rightarrow 1+k = \log 4 \Rightarrow k = \log 4 - 1$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy $y = e^{x+e^x+\log 4 - 1} - 1 = \dfrac{4}{e}\, e^{x+e^x} - 1$.

II M 4) Data $f(x,y) = x+2y$ e data $\mathbb{Q} = \{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x\}$, passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ avremo:



$$\iint_{\mathbb{Q}} x+2y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (\varrho\cos\vartheta + 2\varrho \operatorname{sen}\vartheta) \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \varrho^2\,(\cos\vartheta + 2\operatorname{sen}\vartheta)\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3}\varrho^3\Big|_0^1\right)(\cos\vartheta + 2\operatorname{sen}\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta + 2\operatorname{sen}\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{3}\,(\operatorname{sen}\vartheta - 2\cos\vartheta|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - (0-2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$