COMPITO di MATEMATICA GENERALE 8/1/2026 A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

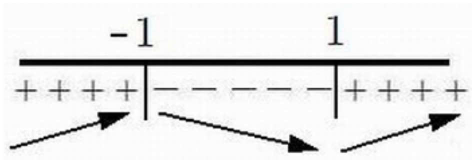
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^2 \cdot e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^2}{e^{-x}} = 0^+$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 \cdot e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^2 \cdot e^x}{x} = +\infty$: non ci sono asintoti obliqui.

$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x \geq 0$ vera $\forall\, x$; funzione sempre non negativa; $f(0) = 1$; $f(1) = 0$.

$f'(x) = 2(x-1) \cdot e^x + (x-1)^2 \cdot e^x = e^x \cdot \left(2x - 2 + x^2 - 2x + 1\right) = e^x \cdot \left(x^2 - 1\right) \geq 0$ per $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \,\cup\, x \geq 1$.

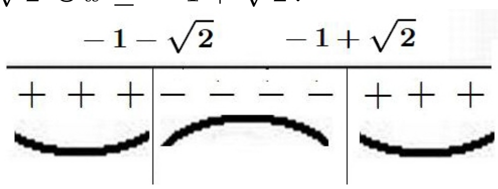


La funzione è crescente per $x < -1$ e per $x > 1$, decrescente per $-1 < x < 1$.
Quindi in $x = -1$ abbiamo un punto di massimo, in $x = 1$ un punto di minimo.
Da $f'(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 1\right)$ avremo poi :

$f''(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot e^x + 2x\, e^x = \left(x^2 + 2x - 1\right) \cdot e^x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 \geq 0$. Da

$x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$ e quindi :

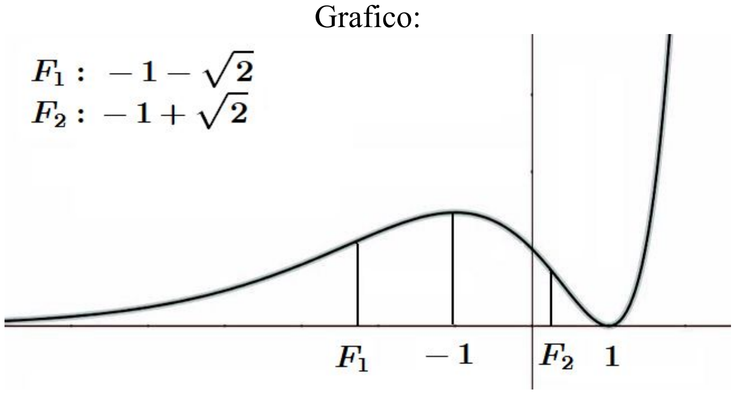
$f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 - \sqrt{2} \cup x \geq -1 + \sqrt{2}$.



Quindi $f(x)$ è funzione convessa per $x \leq -1 - \sqrt{2} \,\cup\, x \geq -1 + \sqrt{2}$, è funzione concava per $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$.

Nei punti $F_1 : x = -1 - \sqrt{2}$ e $F_2 : x = -1 + \sqrt{2}$ abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log\left(1 + x^2\right)}{1 - \cos 2x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 - 2^{-x} + x}{3 \operatorname{sen} x + 2x^3}\right)^x$.

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{4x^2}\cdot\dfrac{4x^2}{1-\cos 2x}=1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 2=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2^{-x}+x}{3\operatorname{sen}x+2x^3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^3}\right)^x=\left(\to\dfrac{1}{2}\right)^{(\to+\infty)}=0^+$

in quanto $-2^{-x}+x=o\big(x^3\big)$ e $3\operatorname{sen}x=o\big(2x^3\big)$ per $x\to+\infty$.

3) Date le funzioni $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$ e $g(x)=e^{1-x}$, determinata l'espressione della funzione composta $f(g(x))$, di questa si determini dove risulta invertibile, nonchè l'espressione della sua funzione inversa.

Da $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$ segue $f(g(x))=\dfrac{1-e^{1-x}}{e^{1-x}+1}$.

$f(g(x))$ esiste ed è continua su tutto $\mathbb{R}$. Da $F(x)=f(g(x))=\dfrac{1-e^{1-x}}{e^{1-x}+1}$ segue:

$F'(x)=\dfrac{e^{1-x}\left(e^{1-x}+1\right)-\left(1-e^{1-x}\right)\left(-e^{1-x}\right)}{\left(e^{1-x}+1\right)^2}=\dfrac{e^{1-x}\left(e^{1-x}+1+1-e^{1-x}\right)}{\left(e^{1-x}+1\right)^2}=$

$F'(x)=\dfrac{2e^{1-x}}{\left(e^{1-x}+1\right)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Funzione strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

Da $f(g(x))=\dfrac{1-e^{1-x}}{e^{1-x}+1}=y\Rightarrow 1-e^{1-x}=y\,e^{1-x}+y\Rightarrow e^{1-x}\left(y+1\right)=1-y\Rightarrow$ $e^{1-x}=\dfrac{1-y}{y+1}\Rightarrow 1-x=\log\left(\dfrac{1-y}{y+1}\right)\Rightarrow x=1-\log\left(\dfrac{1-y}{y+1}\right)$ e quindi l'espressione della funzione inversa sarà $y=1-\log\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$.

4) Data la funzione $f(x)=3x^2-2x+1$ e la retta di equazione $y=-8x-2$ si determini il punto (x_0,y_0) nel quale tale retta risulta tangente al grafico della funzione.

L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0 è data da:
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Per $f(x)=3x^2-2x+1$ avremo $f'(x)=6x-2$ e dato che la derivata nel punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente, dovrà risultare $f'(x_0)=-8$ ovvero dovrà essere $6x_0-2=-8\Rightarrow 6x_0=-6\Rightarrow x_0=-1$.
Sarà allora $f(-1)=3+2+1=6$ e quindi, da $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ avremo:
$y-6=-8\,(x+1)\Rightarrow y=-8x-2$ e quindi $(x_0,y_0)=(-1,6)$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 3x^2+2\sqrt[3]{x^2}+3e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k=0)$ ed avremo:

$$\int_0^1 3x^2+2\sqrt[3]{x^2}+3e^{2x-1}\,\mathrm{d}x=\left(x^3+2\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\cdot x^{\frac{2}{3}+1}+\frac{3}{2}e^{2x-1}\right|_0^1=$$

$$=\left(x^3+\frac{6}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{2}e^{2x-1}\right|_0^1=\left(1+\frac{6}{5}+\frac{3}{2}\,e\right)-\left(0+0+\frac{3}{2e}\right)=\frac{11}{5}+\frac{3}{2}\,e-\frac{3}{2e}.$$

6) Data $f(x,y)=2x^2-3xy^2+3y^2-x+2$, se ne determinino gli eventuali punti di massimo e/o minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y)=\left(f'_x,f'_y\right)=\left(4x-3y^2-1;\,-6xy+6y\right)$ per cui:
$\begin{cases}4x-3y^2-1=0\\-6xy+6y=6y\,(1-x)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-1=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=0\end{cases}$ oppure
$\begin{cases}4x-3y^2-1=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\4-3y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\cup\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}.$
Abbiamo quindi tre punti stazionari: $\left(\frac{1}{4};0\right),(1;1)$ e $(1;-1)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix}4&-6y\\-6y&6-6x\end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}\left(\frac{1}{4};0\right)=\begin{Vmatrix}4&0\\0&\frac{9}{2}\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|\mathbb{H}_1|=4>0\\|\mathbb{H}_2|=18>0\end{cases}$ e quindi il punto $\left(\frac{1}{4};0\right)$ è un punto di minimo;
$\mathbb{H}(1;1)=\begin{Vmatrix}4&-6\\-6&0\end{Vmatrix}\Rightarrow|\mathbb{H}_2|=-36<0$ e quindi il punto $(1;1)$ è un punto di sella;
$\mathbb{H}(1;-1)=\begin{Vmatrix}4&6\\6&0\end{Vmatrix}\Rightarrow|\mathbb{H}_2|=-36<0$ e quindi il punto $(1;-1)$ è un punto di sella.

7) Data $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix}k&1&2\\2&k&1\\1&2&k\end{Vmatrix}$, $\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}1\\2\\-1\end{Vmatrix}$ e $\mathbb{Y}=\begin{Vmatrix}-2\\1\\-1\end{Vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}$.

Risulta $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}k&1&2\\2&k&1\\1&2&k\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\2\\-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}k+2-2\\2+2k-1\\1+4-k\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}k\\2k+1\\5-k\end{Vmatrix}$.
$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}=(-2,1,-1)$ se :
$(k;2k+1;5-k)\cdot(-2,1,-1)=-2k+2k+1-5+k=k-4=0\Rightarrow k=4$.

8) Data $f(x)=\operatorname{sen}2x-e^{3x}$, si determini l'espressione del polinomio di MacLaurin di II grado della funzione.

Essendo $P_2(x,0)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2=f(0)+f'(0)\,x+\frac{1}{2}f''(0)x^2$ avremo:
$f(0)=0-1=-1$;
da $f'(x)=2\cos2x-3e^{3x}$ segue $f'(0)=2-3=-1$;
da $f''(x)=-4\operatorname{sen}2x-9e^{3x}$ segue $f''(0)=0-9=-9$ e quindi :
$P_2(x,0)=-1+(-1)\,x+\dfrac{1}{2}(-9)\,x^2=-1-x-\dfrac{9}{2}x^2$.

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare quando risulta vera la proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})$ risulti altrettanto vera.

Posto $P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ e $P_2:\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{B}$, costruita la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$P_2 : \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$P_1 \; o \; P_2$	$\mathbb{A} \; e \; \mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0

la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \, o \, (\mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbb{B})$ risulta vera quando la proposizione $(\mathbb{A} \, e \, \mathbb{C})$ risulta vera solo nella prima riga della tavola, ovvero quando le tre proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono tutte vere.

10) Determinare i punti di massimo e di minimo, sia assoluti che relativi, per la funzione $f(x) = x^2 \, e^{x^4}$ limitatamente all'intervallo $[-1, 1]$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$.
Da $f(x) = x^2 \, e^{x^4}$ segue $f'(x) = 2x \, e^{x^4} + x^2 \cdot 4x^3 \, e^{x^4} = 2x \, e^{x^4} \left(1 + 2x^4\right) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.
La funzione è decrescente per $-1 < x < 0$ e crescente per $0 < x < 1$.
Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di minimo, assoluto, con $f(0) = 0$.
Dato che $f(-1) = f(1) = e$, nei punti $x = -1$ e $x = 1$ abbiamo due punti di massimo, ambedue assoluti.