COMPITO di MATEMATICA GENERALE 8/1/2026 B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x+1)^2 e^x$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^{-x}} = 0^+$ in quanto $(x+1)^2 = o(e^{-x})$:
asintoto orizzontale sulla sinistra.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2 e^x = +\infty$.

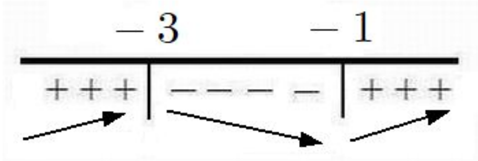
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^2 e^x}{x} = +\infty$: non ci sono asintoti obliqui.

$f(x) = (x+1)^2 e^x \geq 0$ vera $\forall\, x$; funzione sempre non negativa; $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$.

$f'(x) = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x = (x+1)e^x(2+x+1) = (x+1)(x+3)e^x > 0 \Rightarrow$

$f'(x) = (x+1)(x+3)e^x > 0 \Rightarrow x < -3 \cup x > -1$:

la funzione è crescente per $x < -3 \;\cup\; x > -1$, decrescente per $-3 < x < -1$.



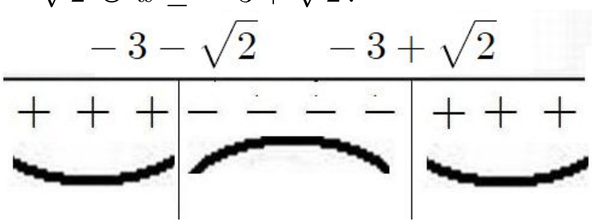
Quindi in $x = -1$ abbiamo un punto di minimo e in $x = -3$ un punto di massimo.

Da $f'(x) = \left(x^2+4x+3\right) e^x$ avremo poi $f''(x) = (2x+4)e^x + \left(x^2+4x+3\right)e^x \Rightarrow$

$f''(x) = \left(x^2+6x+7\right) e^x > 0 \Rightarrow x^2+6x+7 > 0$.

$x^2+6x+7 = 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{9-7} = -3 \pm \sqrt{2}$ e quindi :

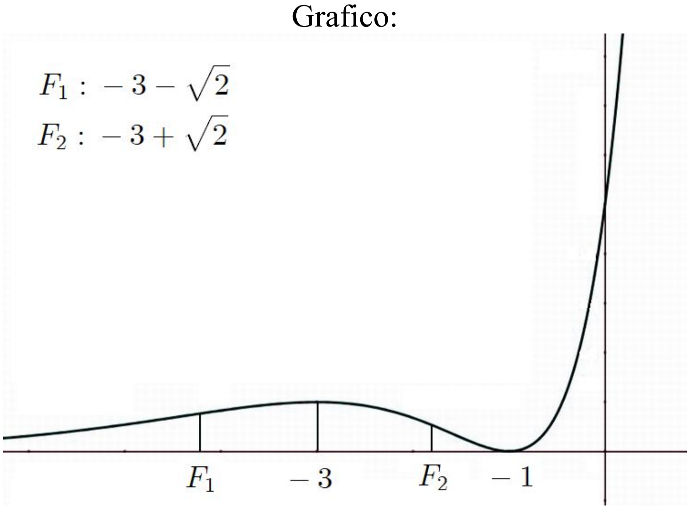
$f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq -3-\sqrt{2} \;\cup\; x \geq -3+\sqrt{2}$.



Quindi $f(x)$ è funzione convessa per $x \leq -3-\sqrt{2}$ e per $x \geq -3+\sqrt{2}$, funzione concava per $-3-\sqrt{2} < x < -3+\sqrt{2}$.

Nei punti $F_1 : x = -3-\sqrt{2}$ e $F_2 : x = -3+\sqrt{2}$ abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log\left(1+2x^2\right)}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3^{-x}-5x}{\cos x+x^2}\right)^x .$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\log\left(1+2x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2x^2}\cdot\frac{2x^2}{\log\left(1+2x^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}\,.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3^{-x}-5x}{\cos x+x^2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)^x=(\to 2)^{(\to+\infty)}=+\infty$

in quanto $3^{-x}-5x=o\big(x^2\big)$ e $\cos x=o\big(x^2\big)$ per $x\to+\infty$.

3) Date le funzioni $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ e $g(x)=e^{x-2}$, determinata l'espressione della funzione composta $f(g(x))$, di questa si determini dove risulta invertibile, nonchè l'espressione della sua funzione inversa.

Da $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ segue $f(g(x))=\dfrac{2-e^{x-2}}{e^{x-2}+1}$.

$f(g(x))$ esiste ed è continua su tutto $\mathbb{R}$. Da $F(x)=f(g(x))=\dfrac{2-e^{x-2}}{e^{x-2}+1}$ segue:

$$F'(x)=\frac{-e^{x-2}\left(e^{x-2}+1\right)-\left(2-e^{x-2}\right)\left(e^{x-2}\right)}{\left(e^{x-2}+1\right)^2}=\frac{e^{x-2}\left(-e^{x-2}-1-2+e^{x-2}\right)}{\left(e^{x-2}+1\right)^2}=$$

$$F'(x)=\frac{-3\,e^{x-2}}{\left(e^{x-2}+1\right)^2}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Funzione strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

Da $f(g(x))=\dfrac{2-e^{x-2}}{e^{x-2}+1}=y\Rightarrow 2-e^{x-2}=y\,e^{x-2}+y\Rightarrow e^{x-2}\,(y+1)=2-y\Rightarrow$

$e^{x-2}=\dfrac{2-y}{y+1}\Rightarrow x-2=\log\left(\dfrac{2-y}{y+1}\right)\Rightarrow x=\log\left(\dfrac{2-y}{y+1}\right)+2$ e quindi l'espressione della funzione inversa sarà $y=\log\left(\dfrac{2-x}{x+1}\right)+2$.

4) Data la funzione $f(x)=x^2-5x+3$ e la retta di equazione $y=x-6$ si determini il punto (x_0,y_0) nel quale tale retta risulta tangente al grafico della funzione.

L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0 è data da:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Per $f(x)=x^2-5x+3$ avremo $f'(x)=2x-5$ e dato che la derivata nel punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente, dovrà risultare $f'(x_0)=1$ ovvero dovrà essere $2x_0-5=1\Rightarrow 2x_0=6\Rightarrow x_0=3$.

Sarà allora $f(3)=9-15+3=-3$ e quindi, da $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ avremo:

$y+3=1\,(x-3)\Rightarrow y=x-6$ e quindi $(x_0,y_0)=(3,-3)$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2x^3+3\sqrt[4]{x^3}+2e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k=0)$ ed avremo:

$$\int_0^1 2x^3+3\sqrt[4]{x^3}+2e^{2x+1}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{4}\,x^4+3\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}+1}\cdot x^{\frac{3}{4}+1}+e^{2x+1}\right|_0^1=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\,x^4+\frac{12}{7}\cdot\sqrt[4]{x^7}+e^{2x+1}\right|_0^1=\left(\frac{1}{2}+\frac{12}{7}+e^3\right)-(0+0+e)=\frac{31}{14}+e^3-e\,.$$

6) Data $f(x,y)=3x^2y-3x^2-2y^2+y-3$, se ne determinino gli eventuali punti di massimo e/o minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y)=\left(f'_x,f'_y\right)=\left(6xy-6x;3x^2-4y+1\right)$ per cui:

$$\begin{cases}6xy-6x=6x\,(y-1)=0\\3x^2-4y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\-4y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=\frac{1}{4}\end{cases}\text{ oppure}$$
$$\begin{cases}3x^2-4+1=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2=3\\y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\cup\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}.$$

Abbiamo quindi tre punti stazionari: $\left(0;\frac{1}{4}\right),(1;1)$ e $(-1;1)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}6y-6&6x\\6x&-4\end{matrix}\right\|$, avremo:

$\mathbb{H}\left(0;\frac{1}{4}\right)=\left\|\begin{matrix}-\frac{9}{2}&0\\0&-4\end{matrix}\right\|\Rightarrow\begin{cases}|\mathbb{H}_1|=-\frac{9}{2}<0\\|\mathbb{H}_2|=18>0\end{cases}$ e quindi il punto $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ è un punto di massimo;

$\mathbb{H}(1;1)=\left\|\begin{matrix}0&6\\6&-4\end{matrix}\right\|\Rightarrow|\mathbb{H}_2|=-36<0$ e quindi il punto $(1;1)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}(-1;1)=\left\|\begin{matrix}0&-6\\-6&-4\end{matrix}\right\|\Rightarrow|\mathbb{H}_2|=-36<0$ e quindi il punto $(-1;1)$ è un punto di sella.

7) Data $\mathbb{A}=\left\|\begin{matrix}2&1&k\\1&k&2\\k&2&1\end{matrix}\right\|$, $\mathbb{X}=\left\|\begin{matrix}-1\\1\\2\end{matrix}\right\|$ e $\mathbb{Y}=\left\|\begin{matrix}2\\-6\\-8\end{matrix}\right\|$, determinare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $\mathbb{Y}$.

Risulta $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\left\|\begin{matrix}2&1&k\\1&k&2\\k&2&1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-1\\1\\2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}-2+1+2k\\-1+k+4\\-k+2+2\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}2k-1\\k+3\\4-k\end{matrix}\right\|$.

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $\mathbb{Y}=(2,-6,-8)$ se $\dfrac{2k-1}{2}=\dfrac{k+3}{-6}=\dfrac{4-k}{-8}$ ovvero:

$$\begin{cases}\frac{2k-1}{2}=\frac{k+3}{-6}\\\frac{k+3}{-6}=\frac{4-k}{-8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-12k+6=2k+6\\-8k-24=-24+6k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14\,k=0\\14\,k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\k=0\end{cases}$$

per cui $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\left\|\begin{matrix}-1\\3\\4\end{matrix}\right\|=-\dfrac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}2\\-6\\-8\end{matrix}\right\|$.

8) Data $f(x)=\cos 3x-e^{2x}$, si determini l'espressione del polinomio di MacLaurin di II grado della funzione.

Essendo $P_2(x,0) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)(x-0)^2 = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$ avremo:
$f(0) = 1 - 1 = 0\,;$
da $f'(x) = -3\,\mathrm{sen}\,3x - 2e^{2x}$ segue $f'(0) = 0 - 2 = -2\,;$
da $f''(x) = -9\cos 3x - 4e^{2x}$ segue $f''(0) = -9 - 4 = -13$ e quindi :
$P_2(x,0) = 0 + (-2)\,x + \dfrac{1}{2}\,(-13)\,x^2 = -2x - \dfrac{13}{2}\,x^2\,.$

9) Determinare quando risulta falsa la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\,e\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{C})$ risulti falsa.

Posto $P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ e $P_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$, costruita la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$P_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$	$P_1\,e\,P_2$	$\mathbb{A}\,o\,\mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0

la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\,e\,(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulta falsa nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{C})$ sia falsa solo nella sesta riga della tavola, ovvero quando le proposizioni $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono false mentre la $\mathbb{B}$ è vera.

10) Determinare i punti di massimo e di minimo, sia assoluti che relativi, per la funzione $f(x) = x^4\,e^{x^2}$ limitatamente all'intervallo $[-1, 1]$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua e derivabile $\forall\,x \in \mathbb{R}$.
Da $f(x) = x^4\,e^{x^2}$ segue $f'(x) = 4x^3\,e^{x^2} + x^4 \cdot 2x\,e^{x^2} = 2x^3\,e^{x^2}\left(2 + x^2\right) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0\,.$
La funzione è decrescente per $-1 < x < 0$ e crescente per $0 < x < 1\,.$
Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di minimo, assoluto, con $f(0) = 0\,.$
Dato che $f(-1) = f(1) = e$, nei punti $x = -1$ e $x = 1$ abbiamo due punti di massimo, ambedue assoluti.