

Compito di ANALISI MATEMATICA 2/2/2026

I M 1) Sono dati due numeri complessi z_1 e z_2 , aventi modulo pari ad 1 ed argomenti rispettivamente uguali a $\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{4}$. Calcolare le radici quadrate del numero $z = z_1^3 + z_2^2$.

$$\text{Se } z_1 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z_1^3 = \cos \left(3 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(3 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) = \cos 5\pi + i \sin 5\pi \Rightarrow z_1^3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$\text{Se } z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z_2^2 = \cos \left(2 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(2 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_2^2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i. \text{ Quindi } z = z_1^3 + z_2^2 = -1 - i.$$

$$\text{Essendo } z = -1 - i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \text{ avremo:}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{8} + k \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{8} + k \frac{2\pi}{2} \right) \right), 0 \leq k \leq 1 \text{ da cui:}$$

$$\text{per } k = 0 : \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right);$$

$$\text{per } k = 1 : \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x, y) = x|y|$ risulta differenziabile nel punto $(0, 0)$.

La funzione risulta palesemente continua in $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y| - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \text{ Passando a coordinate polari:}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^2 \cos \vartheta |\sin \vartheta|}{\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \cos \vartheta |\sin \vartheta| = 0.$$

La convergenza è uniforme in quanto $|\varrho \cos \vartheta |\sin \vartheta|| \leq \varrho$, ne consegue quindi che la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = x e^{y+z} + y e^{x-z} - z e^{x+y} = 1 \\ g(x, y, z) = x e^y - 2y e^z + z e^x = 0 \end{cases}$, soddisfatto nel punto

$P_0 = (1, 1, 1)$, verificare che con esso si può definire una funzione implicita $x \rightarrow (y, z)$ e di questa si calcolino le derivate prime nel punto opportuno.

Le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sono palesemente funzioni differenziabili. Risulta :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} e^{y+z} + y e^{x-z} - z e^{x+y} & x e^{y+z} + e^{x-z} - z e^{x+y} & x e^{y+z} - y e^{x-z} - e^{x+y} \\ e^y + z e^x & x e^y - 2 e^z & -2 y e^z + e^x \end{vmatrix}$$

e quindi:

$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)}(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2e & -e & -e \end{vmatrix}$. Dato che $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -e & -e \end{vmatrix} = -2e \neq 0$, si può definire una funzione implicita avente y e z come variabili dipendenti.

Per quanto riguarda le derivate prime avremo:

$$\frac{dy}{dx}(1) = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2e & -e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -e & -e \end{vmatrix}} = - \frac{e}{-2e} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{dz}{dx}(1) = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e & 2e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -e & -e \end{vmatrix}} = - \frac{3e}{-2e} = \frac{3}{2}.$$

I M 4) Data $f(x, y) = x^2 - xy^2$, siano $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$, e sia w il versore di $u + v$. Sapendo che $\mathcal{D}_{u,v}^2 f(P_0) = -1$ e che $\mathcal{D}_{w,w}^2 f(P_0) = 0$, trovare P_0 .

Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:

$\mathcal{D}_{u,v}^2 f(x, y) = u \cdot \mathbb{H}(x, y) \cdot v^T$. Essendo $\nabla f(x, y) = (2x - y^2, -2xy)$ sarà poi:

$$\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix}.$$

Essendo $u + v = (1, 1)$ sarà $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e quindi dovrà essere:

$$\begin{cases} \|1 & 0\| \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -1 \\ \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|1 & 0\| \cdot \begin{vmatrix} -2y \\ -2x \end{vmatrix} = -1 \\ \frac{1}{2} \cdot \|1 & 1\| \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = -1 \\ \frac{1}{2} \cdot \|1 & 1\| \cdot \begin{vmatrix} 2-2y & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot (2 - 2y - 2y - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 1 - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 + y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Si tratta di un problema di ricerca di massimi e minimi sotto vincolo di uguaglianza.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette valore massimo e valore minimo assoluti.

Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y - \lambda(4x^2 + y^2 - 4).$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 8\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1 - 4\lambda) = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2y} \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ e} \\ \cup \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2\lambda} = 2 \\ 4x^2 + 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ soluzione già trovata.}$$

Abbiamo due soluzioni: $\left(0; 2; \frac{1}{4}\right)$ e $\left(0; -2; -\frac{1}{4}\right)$.

Avendo trovato due sole soluzioni, il punto $(0; 2)$ con $f(0; 2) = 2$ sarà il punto di massimo mentre il punto $(0; -2)$ con $f(0; -2) = -2$ sarà il punto di minimo.

II M 2) Data $f(x, y) = x^2y + xy^2 + 2xy$, si studi la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (2xy + y^2 + 2y; x^2 + 2xy + 2x)$ per cui:

$$\begin{cases} 2xy + y^2 + 2y = 0 \\ x^2 + 2xy + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(2x + y + 2) = 0 \\ x(x + 2y + 2) = 0 \end{cases} \text{ Avremo quindi quattro sistemi:} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Dal primo la soluzione $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$;

dal secondo la soluzione $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$;

dal terzo la soluzione $\begin{cases} y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$;

dal quarto la soluzione $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x - 2 \\ x - 4x - 4 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}.$

Abbiamo quindi quattro punti stazionari: $(0; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$, $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x + 2y + 2 \\ 2x + 2y + 2 & 2x \end{vmatrix}$, avremo:

$\mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}(-2, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0$ e quindi $(-2, 0)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}(0, -2) = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0$ e quindi $(0, -2)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -\frac{4}{3} < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} > 0 \end{cases} \text{ e quindi } \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ è un punto di massimo.}$

II M 3) Risolvere il sistema differenziale lineare $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - x - y = 1 \\ 3x + y' - 5y = 0 \end{cases}$ e quindi, in forma matriciale:

$$\left\| \begin{pmatrix} D-1 & -1 \\ 3 & D-5 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ 3 & D-5 \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & D-5 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D^2 - 6D + 8)(x) = (D-5)(1) - 0 = 0 - 5 = -5.$$

Quindi l'equazione sarà: $x'' - 6x' + 8x = -5$.

Risolvendo l'equazione omogenea, da $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ abbiamo:

$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm \sqrt{1}$ da cui le due soluzioni $\lambda = 4$ e $\lambda = 2$, per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t}$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t) = k$.

Sarà: $x'_0(t) = x''_0(t) = 0$ e quindi, andando a sostituire nella $x'' - 6x' + 8x = -5$ otteniamo: $8k = -5 \Rightarrow k = -\frac{5}{8}$ e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea sarà:

$$x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} - \frac{5}{8}.$$

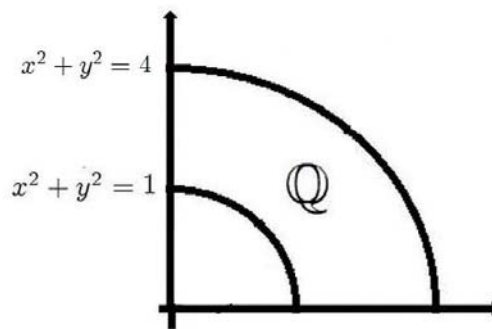
Dalla prima equazione $x' - x - y = 1$ ricaviamo $y = x' - x - 1$ e quindi:

$y(t) = 4c_1 e^{4t} + 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{4t} - c_2 e^{2t} + \frac{5}{8} - 1$ e quindi la soluzione generale del sistema

$$\text{sarà: } \begin{cases} x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} - \frac{5}{8} \\ y(t) = 3c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} - \frac{3}{8} \end{cases}.$$

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y, 0 \leq x\}$, calcolare $\int\limits_{\mathbb{Q}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy$.

Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y, 0 \leq x\}$, passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$ avremo:



$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{Q}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{\varrho^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\varrho^2} \cdot \varrho d\varrho d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \varrho^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\varrho d\vartheta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \varrho^3 \Big|_1^2 \right) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} (8 - 1) \right) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{7}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{7}{3} \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{7}{9} [(0 - 1)] = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$