

COMPITO di MATEMATICA GENERALE 2/2/2026 A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1) \cdot e^x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x - 1)}{e^{-x}} = 0^+$$

in quanto $(x^2 + x - 1) = o(e^{-x})$ per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 1) \cdot e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x - 1) \cdot e^x}{x} = +\infty : \text{non ci sono asintoti obliqui.}$$

$$f(x) = (x^2 + x - 1) \cdot e^x \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 \geq 0; \text{ da}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ e quindi :}$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \cup x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

funzione negativa per $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, positiva per $x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ e per

$$x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; f\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 0, f(0) = -1.$$

$$f'(x) = (2x + 1) \cdot e^x + (x^2 + x - 1) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 3x) = e^x \cdot x \cdot (x + 3) \geq 0 \text{ per}$$

$$x \cdot (x + 3) \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \cup x \geq 0.$$

$$-3 \quad 0$$

La funzione è crescente per $x < -3$ e per $x > 0$, decrescente per $-3 < x < 0$.

Quindi in $x = -3$ abbiamo un punto di massimo, con $f(-3) = \frac{5}{e^3}$, in $x = 0$ un punto di minimo.

Da $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 3x)$ avremo poi :

$$f''(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x + (2x + 3) \cdot e^x = (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 \geq 0. \text{ Da}$$

$$x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ e quindi :}$$

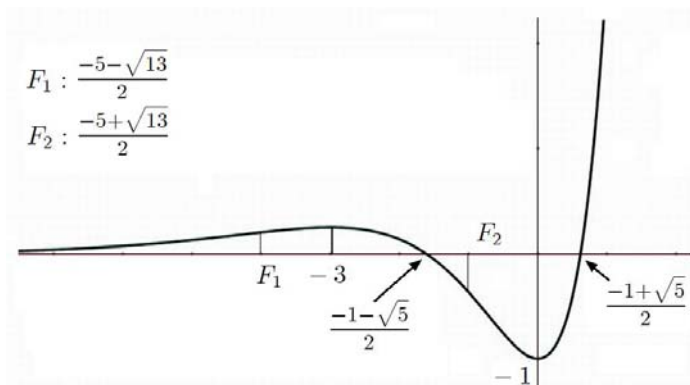
$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \cup x \geq \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \quad \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$$

Quindi $f(x)$ è funzione convessa per $x \leq \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \cup x \geq \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$, è funzione concava per $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$.

Nei punti $F_1 : x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$ e $F_2 : x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$ abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{1-\cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{3+x} \right)^x.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \text{ e da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{3+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x-2}{3+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-2)}{3+x} \right)^x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{k+x} \right)^x = e^\alpha.$$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin 3x} = \pi$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin 3x} = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} \cdot \frac{kx}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} = 1 \cdot \frac{k}{3} \cdot 1 = \frac{k}{3} = \pi \Rightarrow k = 3\pi.$$

4) Data la funzione $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$ sapendo che $f(g(x)) = 1 - e^{x-2}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione $g(x)$, di quest'ultima si determini l'espressione della sua funzione inversa.

$$\text{Da } f(x) = \frac{2-x}{x+1} \text{ segue } f(g(x)) = \frac{2-g(x)}{g(x)+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Posto } f(g(x)) &= \frac{2-g(x)}{g(x)+1} = 1 - e^{x-2} \Rightarrow 2 - g(x) = (1 - e^{x-2})(g(x) + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 - g(x) = g(x) + 1 - e^{x-2}g(x) - e^{x-2} \Rightarrow g(x)(2 - e^{x-2}) = 1 + e^{x-2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1 + e^{x-2}}{2 - e^{x-2}}$. Per determinare l'espressione dell'inversa di $g(x)$ poniamo
 $g(x) = \frac{1 + e^{x-2}}{2 - e^{x-2}} = y \Rightarrow 1 + e^{x-2} = 2y - y e^{x-2} \Rightarrow e^{x-2} (1 + y) = 2y - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow e^{x-2} = \frac{2y-1}{1+y} \Rightarrow x - 2 = \log \left(\frac{2y-1}{1+y} \right) \Rightarrow x = \log \left(\frac{2y-1}{1+y} \right) + 2$ e quindi l'espressione dell'inversa di $g(x)$ sarà $g^{-1}(x) = y = \log \left(\frac{2x-1}{1+x} \right) + 2$.

5) Determinare il valore del parametro k per il quale $\int_0^k e^{2x-1} dx = 1$.

Determinata una primitiva, avremo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^k e^{2x-1} dx &= \left(\frac{1}{2} e^{2x-1} \right) \Big|_0^k = \frac{1}{2} e^{2k-1} - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e} (e^{2k} - 1) = 1 \Rightarrow e^{2k} - 1 = 2e \Rightarrow \\
 \Rightarrow e^{2k} &= 2e + 1 \Rightarrow 2k = \log(2e + 1) \Rightarrow k = \frac{1}{2} \log(2e + 1) = \log \sqrt{2e + 1}.
 \end{aligned}$$

6) Data $f(x, y) = x^2 + y^2 - kx - my - 1$, si determini il valore dei parametri k e m affinché la funzione abbia un punto di minimo nel punto $(2, 3)$.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (2x - k; 2y - m) \text{ per cui:}$$

$$\begin{cases} 2x - k = 0 \\ 2y - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{2} \\ y = \frac{m}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi un solo punto stazionario: $\left(\frac{k}{2}; \frac{m}{2} \right)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}\left(\frac{k}{2}; \frac{m}{2}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, avremo:

$$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 4 > 0 \end{cases} \text{ per cui il punto } \left(\frac{k}{2}; \frac{m}{2} \right) \text{ è un punto di minimo.}$$

Dovendo essere $\left(\frac{k}{2}; \frac{m}{2} \right) = (2, 3)$ dovrà essere $\begin{cases} k = 4 \\ m = 6 \end{cases}$.

7) Determinare il valore del parametro k per cui $\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 5$.

$$\begin{aligned}
 \text{Risulta } \| \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| &= \| \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} k-2 \\ 1+2k \end{pmatrix} \right\| = 2k - 4 + 1 + 2k \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4k - 3 &= 5 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2.
 \end{aligned}$$

8) La funzione $f(x) = \log(2x + 1)$ ha il differenziale $df(x_0) = \frac{1}{3}$ per un incremento $dx = \frac{1}{2}$. Determinare il punto x_0 .

$$\begin{aligned}
 \text{Essendo } df(x_0) &= f'(x_0) \cdot dx \text{ avremo } df(x_0) = \frac{2}{2x_0 + 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2x_0 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2x_0 + 1 &= 3 \Rightarrow 2x_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1.
 \end{aligned}$$

9) Si determini se la proposizione $P : [\mathbb{A} \wedge (\text{non } \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow \mathbb{B}$ risulta una tautologia.

Costruita la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\text{non } \mathbb{A}$	$\text{non } \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{A} \wedge (\text{non } \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})$	$[\mathbb{A} \wedge (\text{non } \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow \mathbb{B}$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1

come si vede dalla seconda riga, la proposizione $P : [\mathbb{A} \wedge (\text{non } \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})] \Rightarrow \mathbb{B}$ non risulta una tautologia.

10) Data la funzione $f(x) = x^3 \cdot \log^2 x$, determinare i punti nei quali la retta tangente al grafico della funzione risulta orizzontale, stabilendo poi la natura di tali punti.

C.E.: $\mathbb{R}_+^*$, la funzione è continua e derivabile $\forall x > 0$.

Per avere la retta tangente orizzontale la derivata nel punto deve essere uguale a 0. Da

$$f(x) = x^3 \cdot \log^2 x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot \log^2 x + x^3 \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = x^2 \cdot \log x \cdot (3 \log x + 2) \Rightarrow$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \log x \cdot (3 \log x + 2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x \geq 0 \\ 3 \log x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \log x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \end{cases}.$$

Risulta quindi $f'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ e per $x = 1$.

Visto l'andamento crescita/decrecenza della funzione

0	$e^{-\frac{2}{3}}$	1
— — —	— — —	+
— — —	+	+
	(+)	(-)
		(+)

la funzione è crescente per $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ e per $1 < x$, decrescente per $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} < x < 1$, e quindi in $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\right) = \frac{4}{9e^2}$ abbiamo un punto di massimo, in $x = 1$, con $f(1) = 0$, un punto di minimo.