

## COMPITO di MATEMATICA GENERALE 2/2/2026 B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = (x^2 - 3x + 3) \cdot e^x$ .

C.E.:  $\mathbb{R}$ , la funzione è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) \cdot e^x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - 3x + 3)}{e^{-x}} = 0^+$$

in quanto  $(x^2 - 3x + 3) = o(e^{-x})$  per  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 3) \cdot e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 3x + 3) \cdot e^x}{x} = +\infty : \text{non ci sono asintoti obliqui.}$$

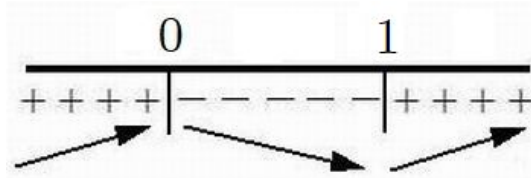
$$f(x) = (x^2 - 3x + 3) \cdot e^x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 \geq 0; \text{ da}$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} \text{ e quindi, essendo } \Delta < 0 \text{ sar\`a :}$$

$$f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}. f(0) = 3.$$

$$f'(x) = (2x - 3) \cdot e^x + (x^2 - 3x + 3) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 - x) = e^x \cdot x \cdot (x - 1) \geq 0 \text{ per}$$

$$x \cdot (x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq 1.$$



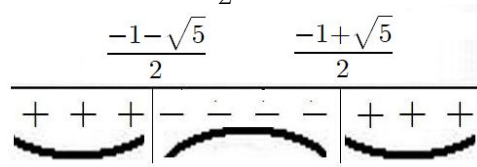
La funzione \u00e8 crescente per  $x < 0$  e per  $x > 1$ , decrescente per  $0 < x < 1$ . Quindi in  $x = 0$  abbiamo un punto di massimo, in  $x = 1$ , con  $f(1) = e$ , un punto di minimo.

Da  $f'(x) = e^x \cdot (x^2 - x)$  avremo poi :

$$f''(x) = (x^2 - x) \cdot e^x + (2x - 1) \cdot e^x = (x^2 + x - 1) \cdot e^x \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 \geq 0. \text{ Da}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ e quindi :}$$

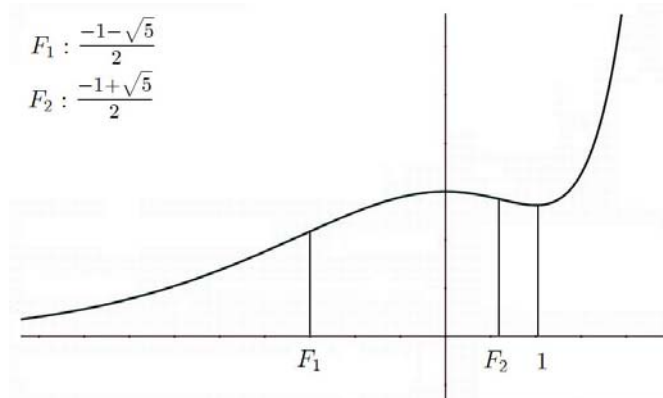
$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \cup x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Quindi  $f(x)$  \u00e8 funzione convessa per  $x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \cup x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , \u00e8 funzione concava per  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Nei punti  $F_1 : x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  e  $F_2 : x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(1 + x^2)^5 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2+x}{3+x} \right)^x.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(1 + x^2)^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{(1+x^2)^5 - 1}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \text{ e da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2+x}{3+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3+x-1}{3+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{(-1)}{3+x} \right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{k+x} \right)^x = e^\alpha.$$

3) Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{e^{kx} - 1} = \log 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{e^{kx} - 1} = \log 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{kx} \cdot \frac{1}{\frac{e^{kx} - 1}{kx}} = \log 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot 1 = \log 2 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

4) Data la funzione  $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$  sapendo che  $f(g(x)) = 1 + e^{x-1}$ , dopo aver determinato l'espressione della funzione  $g(x)$ , di quest'ultima si determini l'espressione della sua funzione inversa.

$$\text{Da } f(x) = \frac{3-x}{x+2} \text{ segue } f(g(x)) = \frac{3-g(x)}{g(x)+2}.$$

$$\text{Posto } f(g(x)) = \frac{3-g(x)}{g(x)+2} = 1 + e^{x-1} \Rightarrow 3 - g(x) = (1 + e^{x-1})(g(x) + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - g(x) = g(x) + 2 + e^{x-1}g(x) + 2e^{x-1} \Rightarrow g(x)(2 + e^{x-1}) = 1 - 2e^{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1 - 2e^{x-1}}{2 + e^{x-1}}. \text{ Per determinare l'espressione dell'inversa di } g(x) \text{ poniamo}$$

$$g(x) = \frac{1 - 2e^{x-1}}{2 + e^{x-1}} = y \Rightarrow 1 - 2e^{x-1} = 2y + ye^{x-1} \Rightarrow e^{x-1}(y + 2) = 1 - 2y \Rightarrow$$

$\Rightarrow e^{x-1} = \frac{1-2y}{y+2} \Rightarrow x-1 = \log\left(\frac{1-2y}{y+2}\right) \Rightarrow x = \log\left(\frac{1-2y}{y+2}\right) + 1$  e quindi l'espressione dell'inversa di  $g(x)$  sarà  $g^{-1}(x) = y = \log\left(\frac{1-2x}{x+2}\right) + 1$ .

5) Determinare il valore del parametro  $k$  per il quale  $\int_0^k \frac{2}{2x+1} dx = 1$ .

Determinata una primitiva, avremo:

$$\int_0^k \frac{2}{2x+1} dx = (\log(2x+1))\Big|_0^k = \log(2k+1) - \log(1) = \log(2k+1) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2k+1 = e \Rightarrow 2k = e-1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}(e-1).$$

6) Data  $f(x, y) = kx + my - x^2 - y^2 + 1$ , si determini il valore dei parametri  $k$  e  $m$  affinché la funzione abbia un punto di massimo nel punto  $(3, 2)$ .

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (k-2x, m-2y)$  per cui:

$$\begin{cases} k-2x=0 \\ m-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{k}{2} \\ y=\frac{m}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi un solo punto stazionario:  $\left(\frac{k}{2}, \frac{m}{2}\right)$ .

Essendo poi  $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}\left(\frac{k}{2}, \frac{m}{2}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ , avremo:

$$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -2 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 4 > 0 \end{cases} \text{ per cui il punto } \left(\frac{k}{2}, \frac{m}{2}\right) \text{ è un punto di massimo.}$$

Dovendo essere  $\left(\frac{k}{2}, \frac{m}{2}\right) = (3, 2)$  dovrà essere  $\begin{cases} k=6 \\ m=4 \end{cases}$ .

7) Determinare il valore del parametro  $k$  per cui  $\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 5$ .

$$\text{Risulta } \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2-k \\ -2k-1 \end{pmatrix} \right\| = 2-k-4k-2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -5k=5 \Rightarrow k=-1.$$

8) La funzione  $f(x) = e^{x-1}$  ha il differenziale  $df(x_0) = \frac{1}{4}$  per un incremento  $dx = \frac{1}{2}$ . Determinare il punto  $x_0$ .

$$\text{Essendo } df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx \text{ avremo } df(x_0) = e^{x_0-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{x_0-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ x_0-1 = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2 \Rightarrow x_0 = 1 - \log 2 = \log \frac{e}{2}.$$

9) Si determini se la proposizione  $P : [\mathbb{A} \circ (\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B})] \Rightarrow \mathbb{B}$  risulta una tautologia.

Costruita la tavola di verità:

| $\mathbb{A}$ | $\mathbb{B}$ | $\text{non } \mathbb{B}$ | $\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B}$ | $\mathbb{A} \circ (\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B})$ | $[\mathbb{A} \circ (\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B})] \Rightarrow \mathbb{B}$ |
|--------------|--------------|--------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1            | 1            | 0                        | 0                                               | 1                                                                  | 1                                                                                           |
| 1            | 0            | 1                        | 1                                               | 1                                                                  | 0                                                                                           |
| 0            | 1            | 0                        | 1                                               | 1                                                                  | 1                                                                                           |
| 0            | 0            | 1                        | 1                                               | 1                                                                  | 0                                                                                           |

come si vede dalla seconda e dalla quarta riga, la proposizione  $P : [\mathbb{A} \circ (\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{B})] \Rightarrow \mathbb{B}$  non risulta una tautologia.

10) Data la funzione  $f(x) = x^2 \cdot \log^2 x$ , determinare i punti nei quali la retta tangente al grafico della funzione risulta orizzontale, stabilendo poi la natura di tali punti.

C.E.:  $\mathbb{R}_+^*$ , la funzione è continua e derivabile  $\forall x > 0$ .

Per avere la retta tangente orizzontale la derivata nel punto deve essere uguale a 0. Da

$$f(x) = x^2 \cdot \log^2 x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \log^2 x + x^2 \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \log x \cdot (\log x + 1) \Rightarrow$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \log x \cdot (\log x + 1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x \geq 0 \\ \log x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \log x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}.$$

Risulta quindi  $f'(x) = 0$  per  $x = \frac{1}{e}$  e per  $x = 1$ .

Visto l'andamento crescita/decrecenza della funzione

| 0     | $e^{-1}$ | 1   |
|-------|----------|-----|
| — — — | — — —    | +   |
| — — — | +        | +   |
|       | (+)      | (-) |
|       |          | (+) |

la funzione è crescente per  $0 < x < \frac{1}{e}$  e per  $1 < x$ , decrescente per  $\frac{1}{e} < x < 1$ , e quindi in  $x = \frac{1}{e}$ , con  $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}$  abbiamo un punto di massimo, in  $x = 1$ , con  $f(1) = 0$ , un punto di minimo.