

COMPITI DI ANALISI MATEMATICA AA. 2025/26

Prova Intermedia 2025

I M 1) Calcolare $\sqrt[4]{i^{40} + i^{15}}$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[5]{(x^2 + y^2)^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ k & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, si determini il valore

del parametro k che rende la funzione continua in $(0, 0)$ e si verifichi poi se tale funzione risulti anche differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Sia $f(x, y) = x^2y - xy^2$ e siano v il versore di $(1, -1)$ e w il versore di $(1, 1)$. Determinare tutti i punti (x_0, y_0) per i quali risulta $\begin{cases} \mathcal{D}_v f(x_0, y_0) = 0 \\ \mathcal{D}_{v,w}^2 f(x_0, y_0) = 2 \end{cases}$.

I M 4) Con l'equazione $f(x, y, z) = e^{x^2y} - e^{yz^2} - x + z = 0$, che risulta soddisfatta nel punto $P = (1, 1, 1)$, si definisce una funzione implicita $z = z(x, y)$. Si calcoli il gradiente di z nel punto $(1, 1)$.

I M 5) Verificare che con il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = e^{xy} + e^{xz} - 2e^{yz} = 0 \\ g(x, y, z) = xyz^2 - x^2z - y^3z + y = 0 \end{cases}$, che risulta soddisfatto nel punto $P = (1, 1, 1)$, si può definire, in un intorno di $x = 1$, una funzione in forma implicita $x \rightarrow (y, z)$ e di questa calcolare le derivate prime in $x = 1$.

I Appello Sessione Invernale 2026

I M 1) Determinare tutte le soluzioni, reali o complesse, dell'equazione $z^3 = 3iz$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \cdot \frac{x+y}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0, 0)$.

I M 3) L'equazione $f(x, y) = e^{x^2-y^2} - xy = 0$ definisce una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno del punto $P = (1, 1)$. Calcolare $y'(1)$ e $y''(1)$.

I M 4) Data $f(x, y) = e^{x-y}$ e la direzione $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ si determinino i valori α per i quali risulta $\mathcal{D}_v f(0, 0) = 0 = \mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = 2x - 4y \\ \text{s.v. } x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + 2t \\ y' = -x + y - 3t \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (1 + e^x)(1 + y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x, y) = x + 2y$ e data $\mathbb{Q} = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, calcolare $\int_{\mathbb{Q}} f(x, y) \, dx \, dy$.

II Appello Sessione Invernale 2026

I M 1) Sono dati due numeri complessi z_1 e z_2 , aventi modulo pari ad 1 ed argomenti rispettivamente uguali a $\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{3\pi}{4}$. Calcolare le radici quadrate del numero $z = z_1^3 + z_2^2$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x, y) = x|y|$ risulta differenziabile nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = x e^{y+z} + y e^{x-z} - z e^{x+y} = 1 \\ g(x, y, z) = x e^y - 2y e^z + z e^x = 0 \end{cases}$, soddisfatto nel punto $P_0 = (1, 1, 1)$, verificare che con esso si può definire una funzione implicita $x \rightarrow (y, z)$ e di questa si calcolino le derivate prime nel punto opportuno.

I M 4) Data $f(x, y) = x^2 - x y^2$, siano $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$, e sia u il versore di $v + w$. Sapendo che $\mathcal{D}_{v,w}^2 f(P_0) = -1$ e che $\mathcal{D}_{u,u}^2 f(P_0) = 0$, trovare P_0 .

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 + y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x, y) = x^2 y + x y^2 + 2xy$, si studi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il sistema differenziale lineare $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y, 0 \leq x\}$, calcolare $\int\int_{\mathbb{Q}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} dx dy$.

Appello Sessione Straordinaria I 2026

I M 1) Calcolare le radici quadrate del numero $z = \frac{2 + 4i}{3i - 1}$.

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0, 0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = xyz + e^{x-y} - 2e^{z-x} = 0 \\ g(x, y, z) = 2xyz - e^{y-x} - e^{z-y} = 0 \end{cases}$, soddisfatto in $P_0 = (1, 1, 1)$, verificare che con esso si può definire una funzione implicita $x \rightarrow (y(x), z(x))$ e di questa si calcolino le derivate prime nel punto opportuno.

I M 4) Data $f(x, y) = x^2 - y^2$, sia $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Sapendo che $\mathcal{D}_v f(-1; -1) = 0$, si determinino i valori positivi di α che la soddisfano, e per il minore di questi si calcoli poi $\mathcal{D}_{v,-v}^2 f(x, y)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = xy \\ \text{s.v.: } x^2 - 2x \leq y \leq 3 \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x, y) = 3xy - 12x + 3y - 3y^2$, si studi la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 1 \leq y\}$, calcolare $\int\int_{\mathbb{Q}} xy dx dy$.