

Compito di ANALISI MATEMATICA 18/3/2026

I M 1) Calcolare le radici quadrate del numero $z = \frac{2+4i}{3i-1}$.

$$\text{Sarà } z = \frac{2+4i}{3i-1} = \frac{2+4i}{-1+3i} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = \frac{-2-4i-6i+12}{1+9} = \frac{10-10i}{10} = 1-i.$$

$$\text{Essendo } z = 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \text{ avremo:}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{8} + k \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{8} + k \frac{2\pi}{2} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq 1 \text{ da cui:}$$

$$\text{per } k = 0 : \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right);$$

$$\text{per } k = 1 : \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right).$$

I M 2) Si verifichi se la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ risulta continua e poi anche differenziabile nel punto $(0, 0)$.

Valutiamo se la funzione risulta continua in $(0, 0)$. Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^3(\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta)}{\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^2(\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta) = 0$$

con convergenza uniforme in quanto: $|\varrho^2(\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta)| \leq \varrho^2$.

Quindi la funzione è continua in $(0, 0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0}{\sqrt{h^2+0}} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h^2}{\sqrt{0+h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \text{ Passando a coordinate polari:}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^3(\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho(\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta) = 0.$$

La convergenza è uniforme in quanto $|\varrho(\cos \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta)| \leq \varrho$, ne consegue quindi che la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x, y, z) = xyz + e^{x-y} - 2e^{z-x} = 0 \\ g(x, y, z) = 2xyz - e^{y-x} - e^{z-y} = 0 \end{cases}$, soddisfatto in $P_0 = (1, 1, 1)$, verificare che con esso si può definire una funzione implicita $x \rightarrow (y(x), z(x))$ e di questa si calcolino le derivate prime nel punto opportuno.

Le funzioni $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sono palesemente funzioni differenziabili. Risulta :

$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} yz + e^{x-y} + 2e^{z-x} & xz - e^{x-y} & xy - 2e^{z-x} \\ 2yz + e^{y-x} & 2xz - e^{y-x} + e^{z-y} & 2xy - e^{z-y} \end{vmatrix}$ e quindi:
 $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)}(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Dato che $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, si può definire una funzione implicita avente y e z come variabili dipendenti : $x \rightarrow (y(x), z(x))$.

Per quanto riguarda le derivate prime avremo:

$$\frac{dy}{dx}(1) = - \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = - \frac{7}{2};$$

$$\frac{dz}{dx}(1) = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = - \frac{-8}{2} = 4.$$

I M 4) Data $f(x, y) = x^2 - y^2$, sia $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Sapendo che $\mathcal{D}_v f(-1; -1) = 0$, si determinino i valori positivi di α che la soddisfano, e per il minore di questi si calcoli poi $\mathcal{D}_{v, -v}^2 f(x, y)$.

Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:

$$\mathcal{D}_v f(-1; -1) = \nabla f(-1; -1) \cdot v = 0 \text{ e sarà poi:}$$

$$\mathcal{D}_{v, -v}^2 f(-1; -1) = v \cdot \mathbb{H}(-1; -1) \cdot (-v)^T.$$

Da $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ segue $\nabla f(-1; -1) = (-2, 2)$ e quindi:

$$\mathcal{D}_v f(-1; -1) = (-2, 2) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = 2(\sin \alpha - \cos \alpha) = 0 \text{ ovvero } \cos \alpha = \sin \alpha.$$

Quindi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ oppure $\alpha = \frac{5\pi}{4}$. Preso $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avremo $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Essendo $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(-1; -1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ avremo infine:

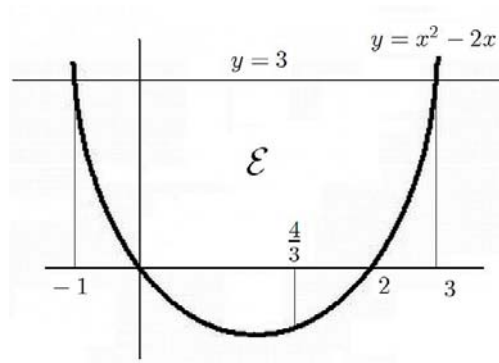
$$\mathcal{D}_{v, -v}^2 f(-1; -1) = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{matrix} \right\| = 0$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = xy \\ \text{s.v.: } x^2 - 2x \leq y \leq 3 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - 2x - y \leq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo. Avremo:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3) = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$



Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = xy - \lambda_1(x^2 - 2x - y) - \lambda_2(y - 3).$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x^2 - 2x \leq y \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 \leq 0 \\ 0 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} : (0, 0) \text{ punto di sella.}$$

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2x^2 - 2x = 0 \\ \lambda_1 = -x \\ y = x^2 - 2x \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ \lambda_1 = -x \\ y = x^2 - 2x \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(3x - 4) = 0 \\ \lambda_1 = -x \\ y = x^2 - 2x \\ y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ y = 0 \\ 0 \leq 3 : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{16}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{8}{9} \\ \lambda_1 = -\frac{4}{3} < 0 \\ -\frac{8}{9} \leq 3 : \text{vera} \end{cases}.$$

Il punto $(0, 0)$, con $\lambda_1 = 0$ è già stato esaminato;

il punto $(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9})$, con $\lambda_1 = -\frac{4}{3} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x - \lambda_2 = 0 \\ y = 3 \\ x^2 - 2x \leq y \end{cases} : \text{ sistema impossibile, nessuna soluzione.}$$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y = 3 \end{cases} \text{ dato che } \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{3}{4} < 0 \\ \lambda_2 = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4} < 0 \\ x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ed anche}$$

$$\begin{cases} 3 - 6\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{4} > 0 \\ \lambda_2 = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} > 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Il punto $(-1, 3)$ con $\lambda_1 = -\frac{3}{4} < 0$ e $\lambda_2 = -\frac{7}{4} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo;

il punto $(3, 3)$ con $\lambda_1 = \frac{3}{4} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{15}{4} > 0$ potrebbe essere un punto di massimo.

Studiamo la funzione sulla frontiera della regione ammissibile.

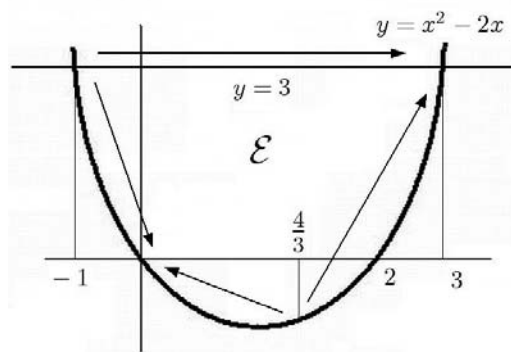
Se $y = 3 \Rightarrow f(x, 3) = 3x$, funzione strettamente crescente;

se $y = x^2 - 2x \Rightarrow f(x, x^2 - 2x) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x > 0$

per $x < 0 \cup x > \frac{4}{3}$



quindi $(0, 0)$ sarebbe, relativamente alla frontiera, un punto di massimo mentre $(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9})$ sarebbe un punto di minimo, confermando quanto trovato nel caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.



Concludendo, il punto $(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9})$ con $f(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}) = -\frac{32}{27}$ è un punto di minimo ed anche il punto $(-1, 3)$ con $f(-1, 3) = -3$ è un punto di minimo, per cui $(-1, 3)$ è il punto di minimo assoluto mentre $(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9})$ è un punto di minimo relativo.

Il punto $(3, 3)$ con $f(3, 3) = 9$ è il punto di massimo assoluto.

Il punto $(0, 0)$ sarebbe di massimo ma solo relativamente ai punti della frontiera, e quindi non è nulla.

II M 2) Data $f(x, y) = 3xy - 12x + 3y - 3y^2$, si studi la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (3y - 12; 3x + 3 - 6y)$ per cui:

$$\begin{cases} 3y - 12 = 0 \\ 3x + 3 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 3x + 3 - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Abbiamo un solo punto stazionario: $(7, 4)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(7, 4) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$, avremo:

$|\mathbb{H}_2| = -9 < 0$ per cui $(7, 4)$ è un punto di sella.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Da $(D^2 - 4D + 4)(x) = e^x$, risolvendo l'equazione omogenea, abbiamo :

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ e quindi la soluzione reale doppia $\lambda = 2$, per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

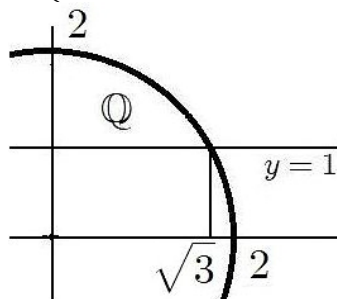
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $y_0(x) = k e^x$.

Sarà : $y_0'(x) = y_0''(x) = k e^x$ e quindi, andando a sostituire nella $y'' - 4y' + 4y = e^x$ otteniamo: $k e^x - 4k e^x + 4k e^x = e^x \Rightarrow k = 1$ e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea sarà: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x$. Avremo infine:

$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^x \\ y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 + 1 = 1 \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \end{cases}$
e quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = e^x - x e^{2x}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 1 \leq y\}$, calcolare $\int\int_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy$.

Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 1 \leq y\}$



avremo:

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dx \, dy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} xy^2 \Big|_1^{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} x (4 - x^2) - x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} 4x - x^3 - x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} 3x - x^3 \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) - (0) \right] = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$